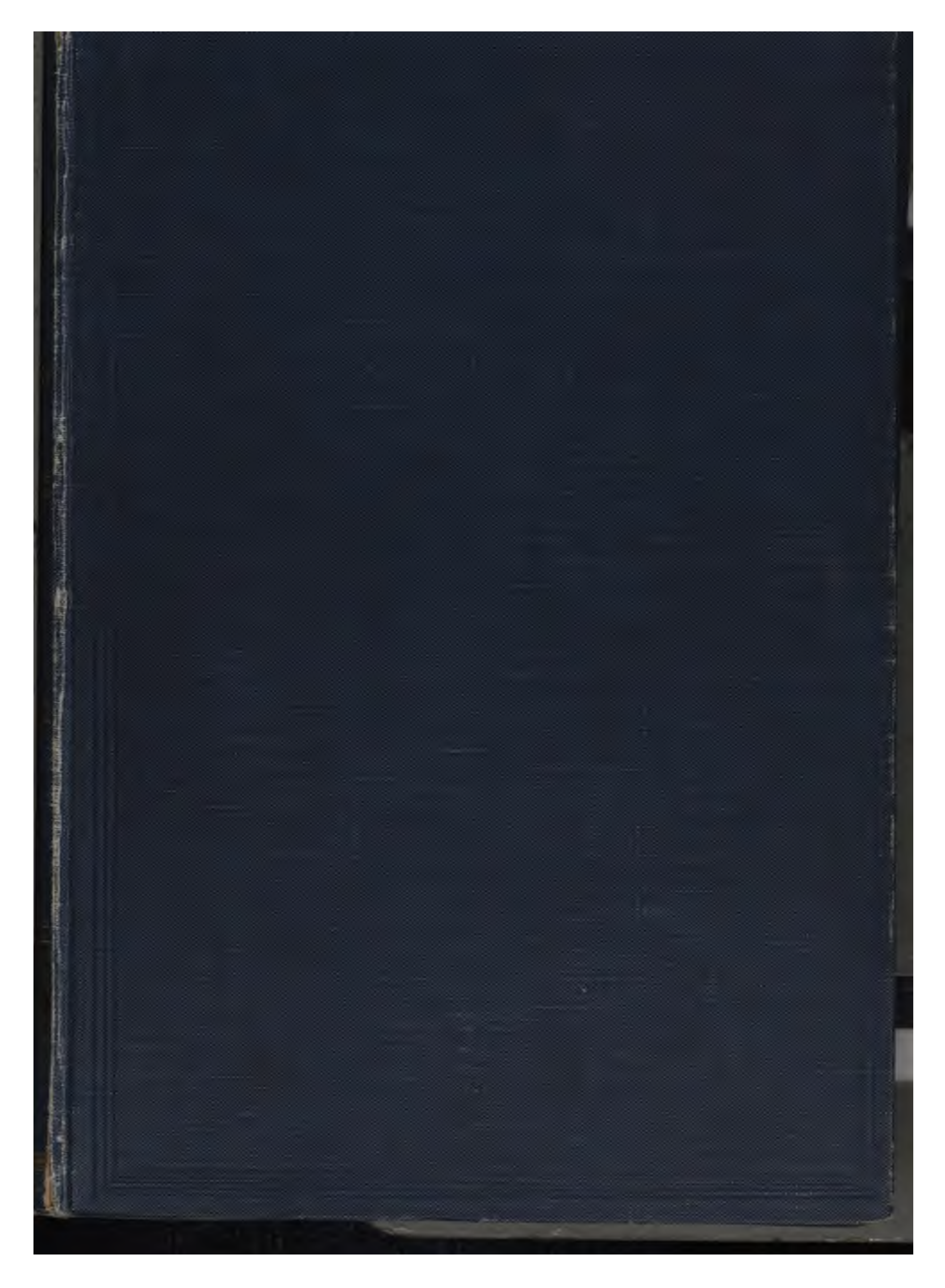
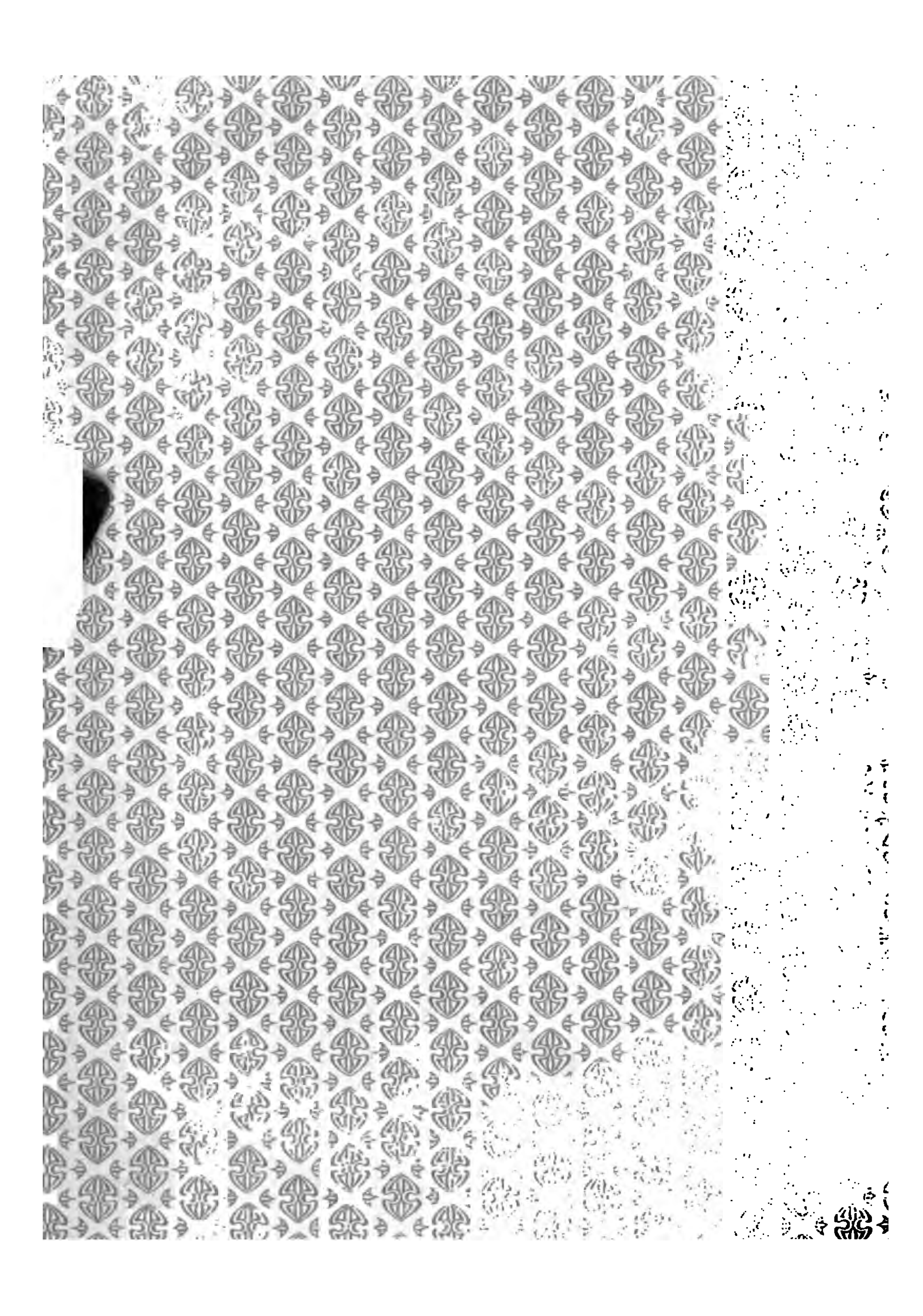
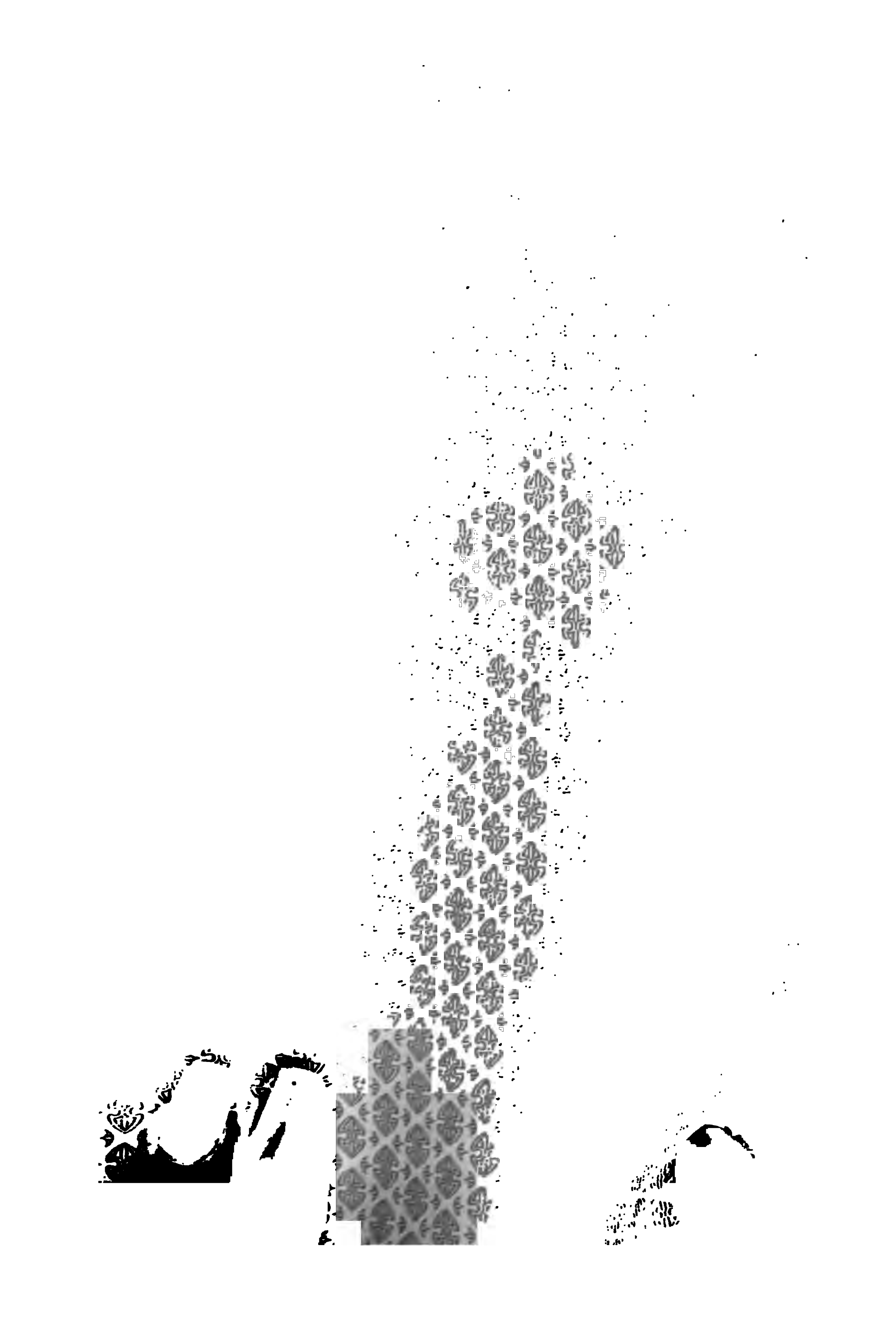








B. G. TEUBNER'S SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.
BAND IX.

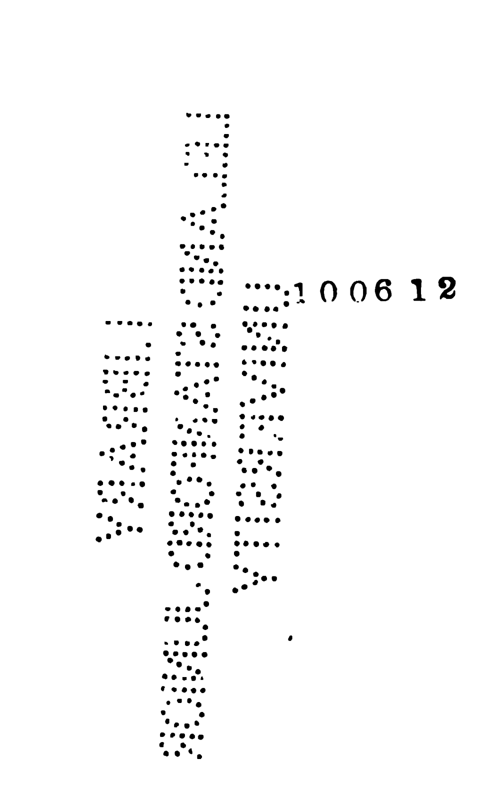
WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

UND IHRE ANWENDUNG AUF FEHLERAUSGLEICHUNG, STATISTIK UND LEBENSVERSICHERUNG.

VON

EMANUEL CZUBER
O. Ö. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN WIEN.

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.


100612

Vorwort.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat längst aufgehört, eine bloße Theorie der Glücksspiele zu sein. Man hat einerseits den hohen Bildungswert ihrer Begriffskonstruktionen und Schlußweisen erkannt und andrerseits den Kreis jener konkreten Materien, auf welche sich ihre Methoden mit Berechtigung anwenden lassen, immer bestimmter gezogen; so ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu einem wohlbegründeten und praktisch wichtigen Zweige der angewandten Mathematik ausgestaltet worden.

Sie nach den beiden erwähnten Richtungen innerhalb vorgezeichneter Schranken zur Darstellung zu bringen, ist das Ziel, das ich mir bei Abfassung dieses Buches gesteckt habe.

Der grundlegende erste Teil geht auf die fundamentalen Fragen soweit ein, als es zur Vorbereitung jener Kritik erforderlich ist, die geübt werden soll, wenn man die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf ein Gebiet der Wirklichkeit anzuwenden sich anschickt. Eine reiche Auswahl von Problemen, darunter die klassischen, soll mit der eigenartigen Denkweise, mit der richtigen Handhabung der Sätze und Rechnungsmethoden vertraut machen.

Für alle Gebiete der Forschung, wo die Resultate aus messenden Beobachtungen abgeleitet werden, ist die auf die Wahrscheinlichkeitstheorie sich stützende Ausgleichungsrechnung zu einem unentbehrlichen Instrument geworden, dazu bestimmt, die Gewinnung der Resultate methodisch zu leiten und für ihre Verläßlichkeit einen Maßstab zu liefern. Diese Seite der Anwendung behandelt der zweite Teil, der in eine kurzgefaßte Theorie der Beobachtungsfehler und in die Erledigung der Hauptprobleme der Kombination von Beobachtungen zerfällt. Erläuternde Beispiele sind in zureichender Zahl eingefügt.

Ein verhältnismäßig junger Zweig der Anwendung ist die mathematische Statistik, die den Gegenstand des dritten Teiles bildet. Neben den Methoden zur Kritik statistischer Resultate werden die Probleme der Sterblichkeits- und Invaliditätsmessung zur Sprache gebracht. Die Hilfsmittel der formalen Bevölkerungstheorie kommen dabei zu weitgehender Anwendung. Die reichliche Vorführung von Erfahrungs-

material wird dazu beitragen, die Ausführungen dieses Teiles zu beleben.

Im vierten Teile wird die Lebensversicherungsrechnung auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Grundlage zum Vortrag gebracht. Im Gegensatze zu dem älteren Verfahren, das jede Versicherungsart für sich betrachtet und immer wieder von Grund auf in Angriff nimmt, ist hier im Interesse der zusammenfassenden Behandlung eine eingehende Darstellung der mannigfachen Versicherungswerte an die Spitze gestellt; denn alle andern Fragen, wie Prämienbestimmung, Rückgewähr der Prämien, Reserveberechnung, Risiko etc. führen auf das Rechnen mit Versicherungswerten zurück. Angewendet ist das Bezeichnungssystem des Text Book, dieses Hauptwerkes der Lebensversicherungsrechnung, ein System, das am ehesten Aussicht hat, allgemein adoptiert zu werden. Tabellen sind in solchem Umfange aufgenommen, als es notwendig erscheint, die Auswertung der Formeln zu erläutern und mit speziellen Zahlwerten dieses Gebietes einigermaßen bekannt zu machen.

Betreffs weitergehender literarischer und historischer Nachweisungen darf ich auf meine Schrift „Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen" im VII. Bande der Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung hinweisen.

Wien, 9. November 1902.

E. Czuber.

Inhalt.

Erster Teil.

Wahrscheinlichkeitstheorie.

I. Abschnitt. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§ 1. Entwicklung der Grundbegriffe.

Nr.		Seite
1.	Das hypothetische Urteil	1
2.	Das hypothetisch-disjunktive Urteil	1
3.	Gegenstand der Wahrscheinlichkeitstheorie	4
4.	Der Zufall	7
5.	Gleichmögliche Fälle	8
6.	Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit	12
7.	Bedeutung der Wahrscheinlichkeit	13
8.	Literatur	15

§ 2. Direkte Wahrscheinlichkeitsbestimmung.

9.	Bildung und Zählung der möglichen und günstigen Fälle	16
10.	Formeln der Kombinatorik	17
11.	Die Formel von Stirling	19
12.	Beispiel I. In zwei Würfen mit einer Münze Wappen zu treffen	23
13.	Beispiel II. Mit zwei Würfeln eine bestimmte Summe zu werfen	24
14.	Beispiel III. Mit drei Würfeln die Summe 9, 10, 11, 12 zu treffen	24
15.	Beispiel IV. Problem der drei Kästchen	25
16.	Beispiel V. Aufgabe über das Zielwerfen	26
17.	Beispiel VI. Mit einer Münze in n Würfen abwechselnd Wappen, Schrift zu treffen	27
18.	Beispiel VII. Aufgabe, Ziehungen aus einer Urne betreffend	28
19.	Beispiel VIII. Aufgaben, Ziehungen aus einer Urne betreffend; verschiedene Modalitäten eines Ereignisses	29
20.	Beispiel IX. Aus einer Urne eine gerade, beziehungsweise eine ungerade Anzahl von Kugeln zu ziehen	29
21.	Beispiel X. Aus einer Urne mit n weißen und n schwarzen Kugeln gleichviel weiße und schwarze Kugeln zu ziehen	31
22.	Beispiel XI. Mit einem Würfel in n Würfen mindestens einmal 6 zu werfen	32
23.	Beispiel XII. Mit zwei Würfeln in n Würfen mindestens einmal Pasch 6 zu werfen	33
24.	Beispiel XIII. Aufgabe, ein Scrutinium betreffend	34
25.	Beispiel XIV. Das Rencontrespiel und seine Modifikationen	35
26.	Beispiel XV. Aufgaben, das Lotteriespiel betreffend	39

§ 3. Indirekte Wahrscheinlichkeitsbestimmung.

Nr. Seite
27. Vorbemerkung . . . 40
28. Vollständige Wahrscheinlichkeit . . . 41
29. Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit . . . 41
30. Beispiel XVI. Mit zwei Würfeln eine ungerade Summe zu werfen . . 44
31. Beispiel XVII. Ziehung aus einer von mehreren äußerlich gleichen Urnen . . . 44
32. Beispiel XVIII. Ein Urnenproblem . . . 46
33. Beispiel XIX. In einer Lotterieziehung eine bezeichnete Nummer zu treffen . . . 47
34. Beispiel XX. Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses von bekannter Wahrscheinlichkeit in einer Reihe von Beobachtungen 48
35. Beispiel XXI. Erschöpfung der Nummern in der Lotterie in einer Reihe von Ziehungen . . . 49
36. Beispiel XXII. Wahrscheinlichkeit verschieden zusammengesetzter Lotterieziehungen . . . 50
37. Beispiel XXIII. Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Kombination zweier entgegengesetzten Ereignisse in einer Reihe von Versuchen. Die Binomialformel . . . 51
38. Beispiel XXIV. Das Teilungsproblem . . . 52
39. Beispiel XXV. Allgemeines Problem über das Zusammentreffen gleichartiger Ereignisse . . . 55
40. Beispiel XXVI. Mit n Würfeln eine bestimmte Summe zu werfen . . 58
41. Beispiel XXVII. Moivres Problem . . . 60
42. Beispiel XXVIII. Das Bouillottespiel . . . 63
43. Beispiel XXIX. Trente et quarante . . . 65
44. Beispiel XXX. Ein Urnenproblem . . . 67

§ 4. Geometrische Wahrscheinlichkeit.

45. Begriffe und Grundlagen . . . 68
46. Beispiel XXXI. Wahrscheinlichkeit, aus drei unter einer gemeinsamen Grenze liegenden Strecken ein Dreieck zu bilden . . . 71
47. Beispiel XXXII. Wahrscheinlichkeit, aus drei Teilen einer Strecke ein Dreieck zu bilden . . . 71
48. Beispiel XXXIII. Das Nadelproblem . . . 72
49. Beispiel XXXIV. Wahrscheinlichkeit, daß zwei in einem Kreise angenommene Punkte zur selben Seite einer beliebig gezogenen Sehne liegen . . . 73
50. Mittelwert einer vom Zufall abhängigen Größe . . . 74
51. Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit und Mittelwert . . . 75
52. Beispiel XXXV. Mittelwert einer beliebigen Strecke innerhalb a und Mittelwert ihrer n-ten Potenz . . . 76
53. Erster Satz über Mittelwerte . . . 77
54. Zweiter Satz über Mittelwerte . . . 77
55. Beispiel XXXVI. Mittelwert des Dreiecks XYC im Dreieck ABC . . 78
56. Beispiel XXXVII. Wahrscheinlichkeit, daß X, Y, Z, C im Dreieck ABC ein konvexes Viereck bestimmen . . . 78
57. Beispiel XXXVIII. Mittelwert eines Dreiecks in einem Halbkreise . . 79
58. Dritter Satz über Mittelwerte . . . 80
59. Das Vierpunktproblem . . . 82
60. Beispiel XXXIX. Das Vierpunktproblem für das Dreieck . . . 82
61. Beispiel XL. Das Vierpunktproblem für den Kreis . . . 83

Nr. Seite
62. Willkürliche Gerade in der Ebene 84
63. Beispiel XLI. Jeu du joint couvert 85
64. Beispiel XLII. Problem, betreffend zwei einander ausschließende Kurven 86
65. Beispiel XLIII. Wahrscheinlichkeit des inneren Schnittes zweier Sekanten 87

II. Abschnitt. Wahrscheinlichkeiten, betreffend die Ergebnisse wiederholter Beobachtungen.

§ 1. Das Theorem von Bernoulli.

66. Entwicklung der Fragestellung 88
67. Wahrscheinlichstes Ergebnis einer Versuchsreihe 92
68. Näherungsweise Darstellung des größten Gliedes 93
69. Näherungsweise Darstellung eines Gliedes, das von dem maximalen eine Abweichung von der Ordnung $\sqrt{s}$ aufweist 95
70. Wahrscheinlichkeit, daß die Abweichung innerhalb gegebener Grenzen verbleibe 97
71. Formulierung des Bernoullischen Theorems 99
72. Ausführung der Rechnungen 100
73. Wahrscheinliche Abweichung 102
74. Mittlere Abweichung 104
75. Mittelwert der Abweichung und durchschnittliche Abweichung 106
76. Beispiel XLIV. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit gegebener Grenzen 107
77. Beispiel XLV. Bestimmung der wahrscheinlichen Grenzen 108
78. Beispiel XLVI. Bestimmung der Versuchszahl 108
79. Begriff der Präzision 109
80. Wiederholte Versuchsreihen. Dispersion 110
81. Erfahrungsdaten 112

§ 2. Das Theorem von Poisson.

82. Entwicklung der Fragestellung 120
83. Ableitung des Theorems 121
84. Beispiel XLVII. Ziehungen aus mehreren Urnen 128
85. Mittlere Abweichung, Unternormale Dispersion. 129
86. Beispiel XLVIII. Ziehungen bei veränderlicher Wahrscheinlichkeit. Übernormale Dispersion. 131

§ 3. Das Gesetz der großen Zahlen.

87. Elementare Wahrscheinlichkeiten und Durchschnittswahrscheinlichkeiten. 133
88. Das Gesetz der großen Zahlen 136

III. Abschnitt. Wahrscheinlichkeiten auf Grund der Erfahrung.

§ 1. Wahrscheinlichkeit der möglichen Ursachen eines beobachteten Ereignisses.

89. Entwicklung der Fragestellung 138
90. Theorem von Bayes für den Fall, daß die Ursachen a priori gleichmöglich sind. 140
91. Theorem von Bayes für den Fall, daß die Ursachen a priori verschiedene Wahrscheinlichkeit besitzen 141

Nr. Seite
92. Die verschiedenartige Natur der Ursachen 143
93. Theorem von Bayes bei unbegrenzter Menge möglicher Ursachen 146
94. Die wahrscheinlichste Hypothese 148
95. Beispiel XLIX. Ziehungen aus einer Urne, deren Inhalt durch Auslosung entstanden ist 149
96. Umkehrung des Bernoullischen Theorems 151
97. Allgemeine Bemerkungen über die Wahrscheinlichkeiten von Ursachen 154
98. Beurteilung einer Abweichung eines beobachteten Erfolges vom erwartungsmäßigen 158

§ 2. Wahrscheinlichkeit künftiger Ereignisse auf Grund von Beobachtungen.

99. Aposteriorische Wahrscheinlichkeit eines zu gewärtigenden Ereignisses 162
100. Hauptaufgabe über die aposteriorische Wahrscheinlichkeit 165
101. Beispiel L. Ziehungen unter zwei verschiedenen Modalitäten 167

IV. Abschnitt. Bewertung von Vor- und Nachteilen, welche an zufällige Ereignisse geknüpft sind.

§ 1. Die mathematische Erwartung.

102. Definition der mathematischen Erwartung 168
103. Beziehung der mathematischen Erwartung zum wahrscheinlichsten Erfolge 169
104. Die aus einer wiederholten Realisierung resultierende mathematische Erwartung 169
105. Beziehungen zwischen Preis und Einsatz. Gewinnteilungsregel . . . 170
106. Beispiel LI. Beispiel einer indirekten Bestimmung der mathematischen Erwartung 172
107. Beispiel LII. Ein anderer Fall indirekter Bestimmung der mathematischen Erwartung 173
108. Beispiel LIII. Beurteilung der Bedingungen eines speziellen Glücksspieles 174
109. Die Sätze von Tchebycheff 176
110. Folgerungen aus diesen Sätzen. Das Poissonsche und das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen 180

§ 2. Das mathematische Risiko.

111. Begriff des mathematischen Risiko 183
112. Fortsetzung. Ausdehnung auf mehrere Preise 185
113. Das Risiko bei einer großen Anzahl von einander unabhängiger, gleichartiger Einzelfälle 187
114. Das sogenannte mittlere Risiko 189
115. Beispiel LIV. Bestimmung des Risiko für eine Reihe verschiedener Vertragsgruppen 194

§ 3. Die moralische Erwartung.

116. Die Hypothese von Daniel Bernoulli 196
117. Die moralische Erwartung 197
118. Folgerungen aus dem Begriff der moralischen Erwartung 198
119. Das Petersburger Problem 201
120. Über die Bedeutung der Bernoullischen Hypothese 204

Zweiter Teil.

Ausgleichungsrechnung.

I. Abschnitt. Theorie der Beobachtungsfehler.

§ 1. Das Fehlergesetz.

Nr.		Seite
121.	Ziel der Ausgleichungsrechnung	206
122.	Entstehung der Fehler und ihre Einteilung	208
123.	Ableitung des Fehlergesetzes aus der Hypothese der Elementarfehler	210
124.	Ableitung des Fehlergesetzes aus der Hypothese des arithmetischen Mittels	216
125.	Das Präzisionsmaß	219
126.	Gesetz, welchem eine lineare Funktion unabhängiger Beobachtungsfehler folgt	219
127.	Der wahre Wert einer physischen Größe	222

§ 2. Genauigkeitsmaße.

128.	Das Fehlerrisiko	225
129.	Der Durchschnittsfehler	227
130.	Der mittlere Fehler	228
131.	Der wahrscheinliche Fehler	228
132.	Vergleichende Betrachtung der Genauigkeitsmaße	229
133.	Verwendung von Beobachtungsdifferenzen zur Genauigkeitsbestimmung	233

II. Abschnitt. Kombination von Beobachtungen.

§ 1. Direkte Beobachtungen.

134.	Direkte Beobachtungen gleicher Genauigkeit. Das arithmetische Mittel als die mit dem kleinsten Fehlerrisiko verbundene Bestimmung	234
135.	Fortsetzung. Das arithmetische Mittel als wahrscheinlichster Wert der Unbekannten	236
136.	Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen und ihres arithmetischen Mittels	237
137.	Direkte Beobachtungen ungleicher Genauigkeit. Begriff des Gewichtes	240
138.	Zusammenstellung der Resultate	244
139.	Beispiel LV. Experimentelle Bestimmung der konstanten Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses	245
140.	Beispiel LVI. Beobachtungen gleicher Genauigkeit	250
141.	Beispiel LVII. Beobachtungen ungleicher Genauigkeit	251
142.	Beispiel LVIII. Beurteilung der Genauigkeit nach Beobachtungsdifferenzen	252
143.	Funktionen direkt beobachteter Größen	253
144.	Beispiel LIX. Verschiedene Fälle solcher Funktionen	255

§ 2. Vermittelnde Beobachtungen.

145.	Stellung der Aufgabe. Vorteilhafteste Kombination der Beobachtungen nach dem Prinzip des kleinsten Fehlerrisikos	257
146.	Gewichte der Unbekannten	261
147.	Bestimmung des mittleren Fehlers einer Beobachtung aus den scheinbaren Fehlern	262

Nr. Seite
148. Vermittelnde Beobachtungen ungleicher Genauigkeit 264
149. Auflösung der Normalgleichungen und der Gewichtsgleichungen . . 266
150. Nichtlineare Relationen zwischen den beobachteten und den unbekannten Größen 270
151. Zusammenstellung der Resultate 273
152. Bedeutung der Resultate. Ableitung empirischer Formeln 276
153. Beispiel LX. Empirische Formel für die Wellenlänge des Wasserstoffspektrums 279
154. Beispiel LXI. Ausgleichung von Höhenmessungen 280
155. Beispiel LXII. Stationsausgleichung 281
156. Beispiel LXIII. Empirische Formel für die Länge des Sekundenpendels 283
157. Beispiel LXIV. Empirische Formel für die Spannkraft des gesättigten Wasserdampfes 286

§ 3. Bedingte Beobachtungen.

158. Problemstellung. Zurückführung auf vermittelnde Beobachtungen . . 289
159. Direkte Lösung des Problems 291
160. Fortsetzung. Beobachtungen ungleicher Genauigkeit 294
161. Beispiel LXV. Winkelausgleichung in einem Dreieck 295
162. Beispiel LXVI. Ausgleichung eines Vierecks 298

Dritter Teil.

Mathematische Statistik.

I. Abschnitt. Die menschlichen Massenerscheinungen vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§ 1. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Statistik.

163. Analogie zwischen statistischen und zufälligen Ereignissen 302
164. Wahrscheinlichkeit vorgegebener Grenzen einer statistischen Wahrscheinlichkeit. Beispiel 303
165. Wahrscheinlichkeit, daß zwei empirischen Bestimmungen ungleiche statistische Wahrscheinlichkeit zugrunde liegen. Beispiele . . . 304
166. Wahrscheinlichkeit, daß ein künftiger statistischer Vorgang innerhalb gegebener Grenzen sich abspielen werde. Beispiel 307

§ 2. Stabilität statistischer Verhältniszahlen und Mittelwerte.

167. Präzision einer statistischen Relativzahl 310
168. Typische Wahrscheinlichkeitsgrößen mit normaler Dispersion 311
169. Typische Wahrscheinlichkeitsgrößen mit übernormaler Dispersion . . 316
170. Fortsetzung. Nähere Untersuchung des Falles einer variablen Grundwahrscheinlichkeit. 317
171. Unternormale Dispersion. Stabilität statistischer Reihen. Symptomatische Reihen 321
172. Untersuchungsergebnisse:
a) Geschlechtsverhältnisse der Geborenen nach den Arbeiten von Lexis 323
b) Dasselbe auf Grund österreichischer Beobachtungen 325
c) Geschlechtsverhältnis der Gestorbenen und Überlebenden. 328
d) Sterblichkeitsverhältnisse 331

Nr. Seite
173. Extensive statistische Größen 333
174. Feststellung eines typischen Mittels 335
175. Beispiel LXVII. Bestimmung des Normalalters der reichsdeutschen Bevölkerung 337
176. Ausdehnung des Dispersionsbegriffes auf extensive Größen 341

II. Abschnitt. Sterblichkeitsmessung.

§ 1. Sterblichkeitsmaße.

177. Sterbens- und Lebenswahrscheinlichkeit 343
178. Sterblichkeitsintensität, Sterblichkeitskoeffizient und zentrales Sterblichkeitsverhältnis 344
179. Lebenserwartung 347
180. Wahrscheinlichste und wahrscheinliche Lebensdauer 349
181. Das Problem der Sterblichkeitsmessung 349

§ 2. Formale Bevölkerungstheorie.

182. Geometrische und analytische Hilfsmittel der Darstellung 350
183. Fortsetzung 354
184. Allgemeine Sätze über Gesamtheiten von Lebenden und Gestorbenen 355
185. Hauptgesamtheiten von Lebenden 357
186. Hauptgesamtheiten von Gestorbenen 358
187. Elementargesamtheiten von Gestorbenen 361

§ 3. Sterbetafeln.

188. Sterbetafeln aus bevölkerungsstatistischem Material 362
189. Fortsetzung 366
190. Die Deutsche Sterbetafel 370
191. Sterblichkeitskurven 375
192. Sterbetafeln aus Beobachtungen an Versicherten 376
193. Einbeziehung der Ein- und Austretenden 378
194. Gewinnung des Materials 382
195. Die Tafeln der 23 deutschen Gesellschaften 386
196. Ausgleichung von Tafeln 392
197. Sterblichkeitsformeln. Die Formeln von Gompertz und Makeham und Beispiel ihrer Verwendung 395
198. Mechanische Ausgleichungsmethoden 403
199. Graphische Ausgleichung 409

III. Abschnitt. Invalidität und Sterblichkeit.

200. Wahrscheinlichkeiten, die aus Invalidität und Sterblichkeit hervorgehen 411
201. Beziehungen zwischen den Wahrscheinlichkeiten und ihre Gewinnung aus den Beobachtungen 413
202. Tafeln, in welchen Invalidität und Sterblichkeit zum Ausdruck kommen 417
203. Konstruktion der Ausscheideordnung der Aktiven aus einer allgemeinen Sterbetafel 421

Vierter Teil.

Lebensversicherungsrechnung.

I. Abschnitt. Versicherungswerte.

§ 1. Grundlagen.

Nr.		Seite
204.	Grundlagen der Lebensversicherungsrechnung	424
205.	Statistische Grundlagen	426
206.	Auf die Verzinsung bezügliche Größen und Formeln	429

§ 2. Erlebensversicherungen und Renten.

207.	Wert einer Anwartschaft. Erlebensversicherung	434
208.	Begriff der Rente. Die Pränumerando-Leibrente	436
209.	Die Postnumerando-Leibrente	437
210.	Aufgeschobene und temporäre Renten	437
211.	Mittlere Zahlungsdauer einer Leibrente. Beziehung zwischen der Leibrente und einer Zeitrente	438
212.	Veränderliche Renten	440

§ 3. Todesfallversicherungen.

213.	Darstellung einer normalen, lebenslänglichen Todesfallversicherung durch die Leibrente	442
214.	Direkte Bestimmung des Wertes einer Todesfallversicherung	443
215.	Aufgeschobene und temporäre Todesfallversicherungen	444
216.	Variable Todesfallversicherungen	445

§ 4. Gemischte Versicherungen.

217.	Die gemischte Versicherung	447
218.	Versicherungen mit bestimmter Verfallzeit (à terme fixe)	448

§ 5. Renten und Todesfallversicherungen von besonderer Zahlungsmodalität.

219.	Renten von unterjähriger Fälligkeit. Näherungsformeln	449
220.	Fortsetzung. Ableitung der strengen Formel	450
221.	Kontinuierliche Rente	454
222.	Vollständige Rente	455
223.	Vollständige m-tel-Rente	457
224.	In unterjährigen Terminen zahlbare Todesfallversicherung	458
225.	Sofort zahlbare Todesfallversicherung	459

§ 6. Renten für verbundene Leben.

226.	Begriff der Verbindungsrente	461
227.	Berechnung von Verbindungsrenten. Satz von De Morgan	463
228.	Verbindungsrenten bis zu einem späteren Tode	466
229.	Überlebensrenten	468
230.	Aufgeschobene, temporäre und unterjährig fällige Verbindungs- und Überlebensrenten	470
231.	Einige Beispiele von Verbindungsrenten	472

§ 7. Kapitalversicherungen für verbundene Leben.

232.	Todesfallversicherung auf das kürzeste von mehreren Leben	474
233.	Gegenseitige Überlebensversicherung	474
234.	Aufgeschobene und kurze gegenseitige Überlebensversicherung	475

Nr. Seite
235. Gemischte gegenseitige Überlebensversicherung 476
236. Todesfallversicherung auf das längste dreier Leben 476
237. Einseitige Überlebensversicherung 477
238. Aufgeschobene und temporäre Überlebensversicherungen 482

§ 8. **Versicherungswerte, die von Invalidität abhängen.**

239. Aktivitätsrenten 483
240. Invalidenrenten 484
241. Invaliditätsrenten 485
242. Kapitalversicherung für den Invaliditätsfall 487

II. Abschnitt. Prämien.

§ 1. **Einmalige und Jahresprämien.**

243. Allgemeine Kennzeichnung des Versicherungsgeschäftes 487
244. Netto- und Bruttoprämien 488
245. Einmalige Prämie 489
246. Jährliche Prämienzahlung 491
247. Jahresprämie für die lebenslängliche Todesfallversicherung 492
248. Einige Beispiele von Jahresprämien 494
1) Aufgeschobene Leibrente 494
2) Erlebensversicherung 495
3) Todesfallversicherung mit abgekürzter Prämienzahlung 495
4) Todesfallversicherung mit Carenz 496
5) Kurze Todesfallversicherung 496
6) Gemischte Versicherung 497
7) Versicherung à terme fixe 497
8) Gegenseitige Überlebensrente 498
9) Einseitige Überlebensrente 498
10) Gegenseitige Überlebensversicherung 499
11) Einseitige Überlebensversicherung 499
12) Invaliditätsrente 499
249. Unterjährige Prämienzahlung 500

§ 2. **Veränderliche Prämien.**

250. Allgemeines über variable Prämien. Natürliche Prämie 502
251. Bespiele abgestufter Prämien 504
252. Die Zillmersche Prämie 507

§ 3. **Prämienrückgewähr.**

253. Allgemeine Bemerkungen 509
254. Beispiele der Rückgewähr von Nettoprämien 510
1) Erlebensversicherung mit Rückgewähr der einmaligen Prämie . . 510
2) Aufgeschobene Leibrente, ebenso 511
3) Erlebensversicherung mit Rückgewähr der Jahresprämie 511
4) Aufgeschobene Leibrente, ebenso 511
5) Erlebensversicherung mit Rückgewähr bei der Auszahlung, eventuell auch im Todesfalle 512
6) Todesfallversicherung mit Rückgewähr der einmaligen Prämie . . 512
7) Gemischte Versicherung mit Rückgewähr der einmaligen Prämie 513
8) Todesfallversicherung mit Rückgewähr der Jahresprämien 513
9) Gemischte Versicherung, ebenso 514
10) Todesfallversicherung mit Rückgewähr der Jahresprämien nebst ihren einfachen Zinsen 514

Nr. Seite
255. Beispiele der Rückgewähr von Bruttoprämien 515
1) Erlebensversicherung mit Rückgewähr der kapitalischen Einzahlung 515
2) Erlebensversicherung mit Rückgewähr der Jahresprämien 516
3) Todesfallversicherung, ebenso 516
4) Gemischte Versicherung mit unbedingter Rückgewähr der Jahresprämien 516
5) Todesfallversicherung mit Rückgewähr der einmaligen Prämie nebst einfachen Zinsen 517
6) Todesfallversicherung mit Rückgewähr der einfach verzinsten Jahresprämien 517
256. Beispiele, verbundene Leben betreffend 519
1) Einseitige Überlebensrente mit Rückgewähr der kapitalischen Einzahlung 519
2) Einseitige Überlebensversicherung mit Rückgewähr der einmaligen Bruttoprämie 519
3) Einseitige Überlebensversicherung mit Rückgewähr der Jahresprämien 520

III. Abschnitt. Prämienreserven.

§ 1. Theorie der Prämienreserve.

257. Begriffsentwicklung 521
258. Prämienreserve bei einmaliger Prämienzahlung 524
259. Prämienreserve bei jährlicher Prämienzahlung 525
260. Prämienreserve bei unterjähriger Prämienzahlung 527
261. Bestimmung der Reserve nach einer nichtganzen Anzahl von Jahren. 529
262. Einfluß der Sterbetafel und des Zinsfußes auf die Prämienreserve . . 530
263. Prämienüberträge und Schadenreserve. Totalreserve 532
264. Risikoprämie und Sparprämie 534

§ 2. Prämienreserven verschiedener Versicherungskombinationen.

265. Prämienreserve der lebenslänglichen Todesfallversicherung 536
266. Prämienreserve der lebenslänglichen Todesfallversicherung bei abgekürzter Prämienzahlung 538
267. Prämienreserve der gemischten Versicherung 538
268. Prämienreserve der Erlebensversicherung mit Prämienrückgewähr . . 539
269. Prämienreserve der gemischten Versicherung mit Prämienrückgewähr 540

§ 3. Rückkauf, Reduktion und Abänderung von Versicherungen.

270. Rückkaufswert einer Police 541
271. Reduktion. Beitragsfreie Police 542
272. Abänderung einer Versicherung 546

IV. Abschnitt. Das Risiko in der Lebensversicherung.

273. Begriffsentwicklung 548
274. Das durchschnittliche Risiko einer einzelnen Versicherung bei deren Beginn. 1) Rente; 2) Todesfallversicherung gegen einmalige, 3) dieselbe gegen Jahresprämie. 551
275. Das durchschnittliche Risiko einer einzelnen Versicherung nach längerem Bestande 555

Nr. Seite
276. Das mittlere Risiko einer einzelnen Versicherung bei deren Beginn . 556
277. Das mittlere Risiko einer einzelnen Versicherung nach längerem Bestande 560
278. Das Risiko eines Versicherungsbestandes 563

Tafeln.

I. Werte der Funktion $\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt$ . . . . 569—571
II. Deutsche Sterbetafel . . . . 572—575
III. Sterbetafel H^M der 20 britischen Gesellschaften. — $3\frac{1}{2}\,\%$ . . 576—579
IV. Sterbetafel M und WI der 23 deutschen Gesellschaften. — $3\frac{1}{2}\,\%$ 580—581
V. Tafel der kurzen Renten und der gemischten Versicherungen nach den Grundlagen der Tafel IV 582
VI. Aktivitäts- und Invaliditätstafel . . . . 583—584
VII. Invaliden- und Invaliditätsrenten. . . . . 585—586

Sachregister 587
Namenregister. 593

Erster Teil.

Wahrscheinlichkeitstheorie.

I. Abschnitt. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§ 1. Entwicklung der Grundbegriffe.

1. Das hypothetische Urteil. Das Wesen des hypothetischen Urteils besteht darin, daß es eine *Voraussetzung* und eine *Folge* in das Verhältnis der *Notwendigkeit* zu einander setzt. Es behauptet also, daß an die Verwirklichung der Voraussetzung jedesmal die Folge notwendig, mit Sicherheit oder mit *Gewißheit* geknüpft ist. Der so geartete Zusammenhang zwischen den beiden Teilen des Urteils wird entweder durch logische Schlüsse erwiesen oder aus einer ausnahmslos gemachten Wahrnehmung geschlossen.

„Wenn eine dekadische Zahl, die an der letzten Stelle 0 oder 5 hat, durch 5 dividiert wird, so geht die Division ohne Rest auf." — „Wenn man durch eine Ecke eines Dreiecks eine Gerade derart legt, daß sie den an dieser Ecke liegenden Winkel durchsetzt, so schneidet die Gerade die der Ecke gegenüberliegende Seite des Dreiecks" — sind hypothetische Urteile, deren Wahrheit die Arithmetik, beziehungsweise die Geometrie aus ihren Grundlagen durch logische Schlüsse begründet. Dagegen beruht das Urteil: „Wenn ein Gefäß eine Flüssigkeit enthält, und ich bringe in dem von ihr berührten Teil der Seitenwand eine Öffnung an, so tritt durch diese die Flüssigkeit aus" — auf einer ausnahmlos gemachten Wahrnehmung.

2. Das hypothetisch-disjunktive Urteil. Wenn aus der Verwirklichung einer Voraussetzung eine von mehreren einander ausschließenden Folgen hervorgehen muß, so heißt das Urteil, welches diesen Sachverhalt behauptet, ein hypothetisch-disjunktives. Die Unterscheidung und Aufzählung der Folgen bildet die Disjunktion, die einzelnen Folgen heißen ihre Glieder. Zwischen der Voraussetzung und der Gesamtheit der Glieder der Disjunktion besteht wie bei dem hypothetischen Urteil das Verhältnis der Notwendigkeit; dagegen steht

das einzelne Glied der Disjunktion oder eine Gruppe von Gliedern zu der Voraussetzung im Verhältnisse der *Möglichkeit:* Die Verwirklichung der Voraussetzung *kann* das bezeichnete Glied oder eines der gewählten Gruppe zur Folge haben, es kann sich aber auch ein anderes Glied einstellen.

„Wenn eine dekadische Zahl durch 5 dividiert wird, so geht die Division auf oder es es bleibt ein Rest übrig“; — „Wenn man durch eine Ecke eines Dreiecks eine Gerade legt, so schneidet sie die gegenüberliegende Seite oder geht an ihr vorüber“; — „Wenn man in der Seitenwand eines Flüssigkeit enthaltenden Gefäßes eine Öffnung anbringt, so tritt durch diese Flüssigkeit aus oder es geschieht dies nicht“ — sind Beispiele disjunktiver Urteile mit zweigliedriger Disjunktion. In dem ersten kann die Disjunktion weiter geführt werden durch Auseinanderhaltung der Reste, welche auftreten können.

Die vorgeführten Beispiele zeigen eine bestimmte Struktur, die sich folgendermaßen beschreiben läßt. Man kann von einem *Bereich* der Voraussetzungen oder Bedingungen sprechen und diesen in Teile zerlegen derart, daß an den einen die eine der Folgen, an den andern die andere Folge mit Notwendigkeit gebunden ist; mit andern Worten: man kann die obigen hypothetisch-disjunktiven Urteile in hypothetische auflösen. In dem ersten Beispiel ist der Bereich der allgemeinen Bedingungen durch die Gesamtheit der dekadischen Zahlen vertreten und scheidet sich in solche, die 0 oder 5, und in solche, die eine andere Ziffer an der niedrigsten Stelle haben: mit der ersten Teilgesamtheit ist das Aufgehen der Division, mit der zweiten ein Rest notwendig verbunden. In dem zweiten Beispiel stellt die Gesamtheit der durch die betreffende Ecke gehenden Geraden den Bereich der Bedingungen dar und zerfällt in jene Geraden, die den Winkel an der Ecke durchsetzen, und in solche, die außerhalb desselben bleiben: die ersteren schneiden notwendig, die letzteren gehen notwendig vorbei. In dem dritten Beispiel vertritt die ganze Seitenwand den Bereich, innerhalb dessen die allgemeine Voraussetzung realisiert werden kann, und scheidet sich in einen von der Flüssigkeit berührten und einen freien Teil: erfolgt die Realisierung in dem ersten Teil, so ist der Austritt der Flüssigkeit die notwendige Folge; dem andern Teil entspricht ebenso das Ausbleiben dieser Erscheinung.

In allen drei Fällen ist man auch in der Lage, das *quantitative Verhältnis* der Umfänge der Teilbereiche zum Bereich der allgemeinen Bedingungen anzugeben. So ist das Verhältnis der Gesamtheit der mit 0 oder 5 schliefsenden Zahlen zur Gesamtheit aller Zahlen mit 1 : 5 zu bemessen, weil von je zehn Zahlen, die sich nur in der Endziffer unterscheiden, zwei zur ersteren Gesamtheit gehören. Hat ferner in einem konkreten Dreieck der Winkel jener Ecke, durch welche die Gerade gelegt werden soll, die Größe α, so ist $\alpha : \pi$ das Verhältnis

der Gesamtheit der die Gegenseite schneidenden Geraden zur Gesamtheit aller Geraden, welche durch die Ecke gelegt werden können. In dem Beispiel mit dem Gefäße bezeichnet das Verhältnis der von der Flüssigkeit berührten zur ganzen Seitenwand das Verhältnis des den Austritt der Flüssigkeit bewirkenden Teilbereichs zum ganzen Bereich der allgemeinen Bedingungen.

Aber nicht alle Urteilsmaterien, welche zur Aufstellung disjunktiver Urteile Anlaß bieten, sind von der hier dargelegten Beschaffenheit. Wir wollen zwei Beispiele anderer Art vorführen und analysieren.

„Wenn ich in eine Urne mit undurchsichtigen Wänden, die eine weiße, zwei schwarze und drei rote, im übrigen gleiche Kugeln enthält, greife und eine Kugel hervor hole, so ist dieselbe weiß oder schwarz oder rot.“ Auch hier kann von einem Bereich der allgemeinen Bedingungen und von einer Scheidung desselben in Teilbereiche gesprochen werden, die den Disjunktionsgliedern zugeordnet sind, und zwar in folgendem Sinne. Bei einer bestimmten Anordnung der Kugeln in der Urne führt jede der unendlich vielen Bewegungen, welche die vollziehende Hand in Ausführung der allgemeinen Voraussetzung machen kann, mit Notwendigkeit zu einer Kugel von bestimmter Farbe; das Gleiche gilt für jede der unendlich vielen denkbaren Lagerungen der Kugeln in der Urne. Mit Rücksichtnahme auf alle diese Lagerungen läßt sich also eine Gesamtheit von Handbewegungen denken, die zu einer der Kugeln überhaupt hinführen, und in dieser lassen sich Teilgesamtheiten unterscheiden, von welchen die eine mit Notwendigkeit die weiße, eine andere eine schwarze, die dritte eine rote Kugel zur Folge hat. Aber die Bewegungen, die zu dem einen oder andern Erfolge hinleiten, zu charakterisieren, dafür giebt es keinen Anhalt; daher ist es auch unthunlich, das disjunktive Urteil in hypothetische aufzulösen, d. h. die allgemeine Voraussetzung so zu spezialisieren, daß sich ein bestimmter Erfolg mit Notwendigkeit daran knüpfe. Dagegen gestattet die dargelegte allgemeine Erkenntnis die quantitative Vergleichung der verschiedenen Bereiche von Bewegungen. Denkt man sich nämlich innerhalb einer jeden *räumlichen* Lagerung der sechs Kugeln alle möglichen Anordnungen der Farben ausgeführt, so wird ein bestimmter Platz zweimal so oft durch eine schwarze und dreimal so oft durch eine rote besetzt sein als durch eine weiße: daher verhalten sich die Gesamtheiten der Bewegungen, welche zu einer weißen, einer schwarzen, einer roten Kugel führen, quantitativ wie $1:2:3$.

Ein von den bisherigen wesentlich verschiedenes Beispiel eines disjunktiven Urteils ist das folgende: „Wenn ein Mensch das Alter von x Jahren erreicht hat, so erlebt er das Alter von $x+1$ Jahren oder er erlebt es nicht.“ Unter einer Verwirklichung der allgemeinen Voraussetzung ist hier die Beobachtung eines Individuums zu ver-

stehen, welches x Jahre alt geworden und nun mit der ihm eigentümlichen Konstitution den kaum dem Namen nach anführbaren Einflüssen ausgesetzt ist, von welchen Leben und Sterben abhängt und die in einer bestimmten Kombination auf dasselbe einwirken. Man kann sich nun ganz wohl vorstellen, daſs sich in Ansehung einer bestimmten Konstitution die Kombinationen der maßgebenden Einflüsse in zwei Gebiete scheiden, die einen mit Notwendigkeit zum Durchleben des gedachten Zeitraumes, die andern zum vorzeitigen Tode führend. Über diese allgemeine Vorstellung ist aber mit dem zu Gebote stehenden Wissen über den Sachverhalt nicht hinauszukommen. Zu quantitativen Vergleichen und zur Bildung hypothetischer Urteile ist hier kein Anhalt gegeben.

3. Gegenstand der Wahrscheinlichkeitstheorie. Das disjunktive Urteil steht mit dem Gegenstande der Wahrscheinlichkeitstheorie in engem Zusammenhange, es kann als ihre logische Grundlage bezeichnet werden[1]). Das praktische Leben stellt uns oft vor Materien, welche die Bildung hypothetischer Urteile ausschließen, weil die allgemeinen Bedingungen mehrere einander ausschließende Erfolge *möglich* erscheinen lassen, ohne daß aus dem Gange der Verwirklichung jener Bedingungen jemals ein bestimmter Erfolg mit Sicherheit zu erschließen wäre.

Die vorgeführten Beispiele haben nun gezeigt, daß derlei Urteilsmaterien bei Vorhandensein eines bestimmten *Wissens* die Ausführung *quantitativer* Bestimmungen zulassen; dadurch aber können sie der mathematischen Behandlung zugänglich gemacht werden. Jene Bestimmungen beziehen sich auf den Gesamtumfang der Ausführungsmöglichkeiten der allgemeinen Bedingungen und auf jenen Teil des Gesamtumfangs, welcher mit Notwendigkeit zu einem bestimmten Erfolge hinführt; ist es gelungen, diese Umfänge durch Zahlen zu charakterisieren, so kann der *Quotient* aus der zweiten Zahl zur ersten dazu dienen, die Stellung dieses Erfolges in der Gesamtheit der möglichen Erfolge zu kennzeichnen. Er soll, ohne daß zunächst auf seine etwaige innere Bedeutung eingegangen würde, als die *Wahrscheinlichkeit* des betreffenden Erfolges definiert werden.

Durch die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit erfährt das ursprüngliche disjunktive Urteil eine wesentliche Ergänzung. Während sich dasselbe beschränkt, die möglichen Folgen einer Voraussetzung auseinander zu halten und aufzuzählen, wird nun jeder dieser Folgen eine Zahl koordiniert, wodurch die ganze Urteilsmaterie eine bestimmte Charakterisierung empfängt.

Der Sachverhalt läßt auch die folgende Auffassung zu[2]). Man

1) Ch. Sigwart, Logik, II. Bd., 1893, p. 305 und 310, Fußnote.

2) A. Fick, Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeiten, 1883.

kann aus einem hypothetisch-disjunktiven Urteil neue Urteile bilden, indem man die allgemeine Voraussetzung mit jedem einzelnen Gliede der Disjunktion verbindet. Ein solches Urteil[1]) hat wohl die *Form*, nicht aber das *Wesen* eines hypothetischen Urteils: während diesem das Prädikat der *Notwendigkeit* oder der *Gewißheit* (für den Fall der Realisierung der Voraussetzung) zukommt, kann bei jenem nur von *Möglichkeit* oder unter Umständen von *Wahrscheinlichkeit* gesprochen werden.

Es wird sich empfehlen, hier über einige üblichen Ausdrücke und Ausdrucksweisen sowie über einige den Wahrscheinlichkeitsbegriff in seiner bisherigen Fassung betreffenden Fragen ins klare zu kommen.

Wir haben bisher von den Gliedern der Disjunktion als von Folgen der Voraussetzung oder von möglichen Erfolgen gesprochen. Die Wahrscheinlichkeitstheorie bedient sich dafür fast allgemein des Ausdrucks *Ereignisse*, wiewohl derselbe nicht immer zutreffend ist; häufig würde sich die Bezeichnung *Tatbestände* besser empfehlen[2]). Denn daß eine Division ohne Rest aufgeht oder daß eine Gerade eine andere schneidet, ist nicht so sehr Ereignis als vielmehr ein Sachverhalt, ein Tatbestand. Indessen kann aus der Beibehaltung des in alle Litteraturen übergegangenen Ausdrucks „Ereignis" kein Mißverständnis entspringen.

Man schreibt allgemein die Wahrscheinlichkeit dem *Ereignis* oder Erfolg zu, wiewohl sich dagegen einwenden läßt, daß einem Ereignis an sich eine Wahrscheinlichkeit nicht zukommt, sondern nur im Hinblick auf die Bedingungen, dafs also nur von der Wahrscheinlichkeit eines *Urteils* gesprochen werden könne. Dieser Standpunkt ist von Fick[3]) ausdrücklich vertreten worden, der nur die Wahrscheinlichkeit eines unvollständig ausgedrückten hypothetischen Urteils gelten lassen will; denn „jedes individuelle Ereignis ist entweder im Kausalnexus notwendig und wirklich oder unmöglich". Gegen die letztere Bemerkung ist sicherlich nichts einzuwenden, aber ein „individuelles" Ereignis kann niemals den Gegenstand der Wahrscheinlichkeitstheorie bilden, sondern immer nur *das* Ereignis in abstracto. Um den Unterschied der beiden Ausdrucksweisen deutlich zu machen, möge ein Beispiel angeführt werden. Nach Fick kommt dem unvollständig ausgedrückten hypothetischen Urteil: „Wenn man eine dekadische Zahl durch 5 dividiert, so geht die Division auf" — die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$ zu; der allgemeine und nach unserem Dafürhalten richtige Sprachgebrauch schreibt sie dem Aufgehen der Division zu; dem steht

1) Von Fick als „unvollständig ausgedrücktes hypothetisches Urteil" bezeichnet l. c. I, p. 12.

2) K. Stumpf, Über den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Ber. d. bayr. Akad. (phil. Kl.), 1892, p. 46. 3) l. c. p. 12 u. 14.

keineswegs entgegen, dafs eine individuelle Ausführung der Voraussetzung entweder sicher ohne Rest oder mit einem solchen abläuft.

Wenn wir zu dem Beispiel der Urne mit der weißen, den schwarzen und roten Kugeln zurückkehren, so gewahren wir ein *positives Wissen*, welches bei der quantitativen Vergleichung der Gesamtheiten von Bewegungen, die zu bestimmten Erfolgen hinführen, maßgebend war: es ist dies die Kenntnis der Anzahl der Kugeln jeder Farbe. Im Falle der Realisierung treten uns Umstände entgegen, die sich unserer Kenntnis entziehen und von einer Realisierung zur andern in einer der Erkenntnis unzugänglichen Weise ändern: die Lagerung der Kugeln in der Urne und die Bewegung der ziehenden Hand. Jenes positive Wissen ist das *Bleibende*, das *Konstante* an der Urteilsmaterie und verleiht der aus ihr abgeleiteten Wahrscheinlichkeit *objektive*, weil vom urteilenden Subjekt unabhängige *Bedeutung*. Gegenüber einer Urteilsmaterie, bei der ein so geartetes positives Wissen fehlt, kann ein Subjekt auf Grund des ihm zu Gebote stehenden allgemeinen Wissens an eine Schätzung der Umfänge der Realisierungsmöglichkeiten der einzelnen Disjunktionsglieder gehen und aus den Resultaten dieser Schätzung Wahrscheinlichkeiten bilden; diese haben jedoch nur *subjektive Bedeutung*, können sich von Subjekt zu Subjekt und selbst bei demselben Urteilenden ändern, wenn sein Wissen von der Materie einen andern Umfang annimmt.

Ist aus dem Gange der Erwägungen, welche uns zu dem Wahrscheinlichkeitsbegriff geführt haben, die Erkenntnis erwachsen, daß die Wahrscheinlichkeit eine der Urteilsmaterie als solcher anhaftende Eigenschaft, eine Funktion dieser Materie sei, so folgt daraus von selbst, daß sie an jedem Ort und zu jeder Zeit dieselbe bleibt, dafs also insbesondere die Zeit der Verwirklichung eines Erfolges ohne Einfluß ist auf seine Wahrscheinlichkeit. Man ist wohl gewohnt, mit dem Begriff Wahrscheinlichkeit die Vorstellung eines *zukünftigen* Erfolges zu verknüpfen, und Lotze[1]) war der Meinung, daß nur diese Verbindung einen Sinn habe; mit derselben Berechtigung kann aber von der Wahrscheinlichkeit eines bereits realisierten, aber unbekannt gebliebenen Erfolges gesprochen werden, wiewohl er schon wirklich vorhanden ist oder war. Die beiden Fragen: „Aus der oben gedachten Urne wird eine Kugel gezogen werden; mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die gezogene Kugel weiß sein?“ und: „Aus der Urne ist (zu welcher Zeit immer) eine Kugel gezogen worden; welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie weiß war?“ haben logisch ganz gleiche Bedeutung und sind auch in gleicher Weise zu beantworten.

Der vorstehenden Erörterung lag die Annahme zu Grunde, daß das Substrat des positiven Wissens, welches uns bezüglich der Materie

1) R. H. Lotze, Logik, 1893.

zu Gebote steht und das bei der Wahrscheinlichkeitsbestimmung maßgebend ist, im Laufe der Zeit unverändert, konstant bleibe. Es giebt aber auch Urteilsmaterien, bei welchen jenes Substrat einer zeitlichen Änderung unterworfen ist; wenn solche Materien eine Wahrscheinlichkeitsbestimmung zulassen, so wird die *Wahrscheinlichkeit eine Funktion der Zeit* sein. Besteht z. B. das Substrat in physischen Körpern, welche ihren Zustand zeitlich ändern, und ist die Wahrscheinlichkeitsbestimmung von dem Zustand abhängig, so wird auch sie einer zeitlichen Änderung unterworfen sein. In einem früheren Beispiel ist von den beiden Möglichkeiten die Rede gewesen, welchen eine Person, die das Alter x erreicht hat, während eines Jahres ausgesetzt ist; angenommen, es wäre möglich, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß sie dieses Jahr durchlebe, so ist anzunehmen, daß diese Wahrscheinlichkeit für die gleiche Altersstufe zu einer andern Zeit eine andere sein werde; denn die Umstände, welche auf das Leben und Sterben zweifellos Einfluß üben (wie z. B. das Klima), sind zeitlicher Änderung unterworfen. Die im vorigen Absatz aufgestellte Behauptung, daß der Wahrscheinlichkeitsbegriff mit zukünftigen wie mit vergangenen Realisierungen in Verbindung gebracht werden könne, bleibt von diesen Erwägungen unberührt.

4. Der Zufall. Bei der Analyse des Urnenbeispiels haben wir neben einem positiven Wissen Umstände erkannt, die bei der Realisierung der allgemeinen Bedingungen, d. i. bei Ausführung eines Zuges, auftretend sich einzeln und im Zusammenwirken unserer Kenntnis entziehen und uns verhindern, die Notwendigkeit für das Eintreten oder für das Ausbleiben eines bestimmten Erfolges zu erkennen. Wenn wir den Erfolg oder das Ereignis, auf welches unser Interesse sich richtet, mit Rücksicht auf diese Umstände als ein *zufälliges* bezeichnen, so negieren wir damit *die Notwendigkeit* seines Eintreffens; und wenn wir sagen, sein Eintreffen hänge vom *Zufall* ab, so meinen wir hierunter das Zustandekommen einer solchen Verbindung der von einander unabhängigen Umstände, welche das Ereignis wirklich herbeiführt. Ist beispielsweise unser Interesse dem Erscheinen der weißen Kugel zugewandt, so bezeichnen wir es als zufällig, daß bei der uns unbekannten Lagerung der Kugeln und der davon unabhängigen Bewegung der Hand diese gerade die weiße Kugel erfassen sollte, und wenn wir ein solches Geschehen als durch den Zufall hervorgebracht erklären, so fassen wir den *Zufall* als ein *gesetzlos Wirkendes* im Gegensatze zu einem *gesetzmäßig Wirkenden*, einer *Ursache*, auf; aus der gesetzlosen Wirksamkeit des Zufalls erklären wir auch die *Unregelmäßigkeit* in einer Reihe von Erfolgen.

In dieser Weise, meinen wir, läßt sich der Sinn des Wortes Zufall kennzeichnen, in welchem es in der Wahrscheinlichkeitstheorie gebraucht wird. Diese selbst wird häufig auch als *Theorie des Zufalls*

bezeichnet; man kann diese Benennung gelten lassen, wenn nicht etwa die Vorstellung daran geknüpft wird, als ob die Wahrscheinlichkeitstheorie sich mit der Erforschung des Unregelmäſsigen, des Gesetzlosen im Verlauf der Erscheinungen befassen würde.

Es ist üblich, die in das Gebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie fallenden Ereignisse, Erscheinungen, Tatbestände dadurch allgemein zu charakterisieren, daß ihr Eintreffen oder ihre Existenz einerseits von bekannten und bleibenden und andererseits von unbekannten und wechselnden Umständen abhänge. Die Umstände der ersten Art bezeichnet man als *Ursachen*, die der zweiten Art als *Zufall.*

Außer in der oben entwickelten Bedeutung wird das Wort Zufall Erscheinungen oder Ereignissen gegenüber noch in anderem Sinne angewendet. Man bezeichnet ein Ereignis in Bezug auf ein anderes gleichzeitig mit ihm stattfindendes als zufällig, wenn man einen ursächlichen Zusammenhang zwischen beiden zu erkennen nicht vermag. Das Auftreten einer Epidemie ist zufällig in Bezug auf die Sichtbarkeit eines Kometen.

Wenn *bereits eingetretene* Ereignisse mit dem Zufall in Verbindung gebracht werden, so kann dies, da sie wirklich vorhanden sind, nicht mehr die obige Bedeutung haben; vielmehr will man damit einen Gegensatz zu dem Geplanten, dem Beabsichtigten zum Ausdruck bringen. Die wirklich erfolgte Begegnung zweier Personen an einem bestimmten Orte wird als zufällig bezeichnet, wenn eine Absicht, ein planmäßiges Handeln der Personen, die Begegnung zu erzielen, ausgeschlossen werden soll.

5. Gleichmögliche Fälle. Die Materien, auf welche sich die ersten Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung bezogen, hatten ihren Ursprung in *Glücksspielen:* in Würfel- und Kartenspielen, in Ziehungen von Nummern oder Kugeln verschiedener Farben aus Urnen u. dgl. Solche Materien sind für die Bildung von Wahrscheinlichkeiten typisch geworden, und zwar aus dem Grunde, weil hier das positive Wissen eine bestimmte leicht zu überblickende Struktur besitzt. Es läßt sich nämlich die Disjunktion bis zu sogenannten *möglichen Fällen* hinführen, die zunächst nur in dem Sinne gleichartig sind, als sie eine weitere Disjunktion nicht zulassen und daher die einfachsten Glieder des disjunktiven Urteils darstellen. Nehmen wir das Beispiel mit der Urne wieder auf, welche eine weiße, zwei schwarze und drei rote Kugeln enthält, so läßt sich zunächst eine Disjunktion nach den Farben bilden, deren Glieder aber insofern nicht gleichartig sind, als sich zwei davon weiter auflösen lassen, wenn man die Kugeln einer Farbe individualisiert; nach dieser Auflösung entstehen sechs mögliche Fälle, dargestellt durch die einzelnen Kugeln. Der Würfel, der auf den Tisch hingeworfen wird, bietet sechs mögliche Fälle dar, vertreten durch die mit verschiedenen Punktzahlen bezeichneten Seitenflächen.

In einem Kartenspiel bilden die einzelnen Blätter die möglichen Fälle.

Soll nun auf diese Disjunktion möglicher Fälle eine Wahrscheinlichkeitsbestimmung gegründet werden, so muß bekannt sein, welcher Teil des Gesamtbereichs der Ausführungsmodalitäten jedem einzelnen Falle zugeordnet ist in dem Sinne, daß die spezielle Ausführung der allgemeinen Bedingungen, wenn sie in einen solchen Teil fällt, den betreffenden Fall notwendig herbeiführt. Die einfachste Teilung des Gesamtbereiches ist nun die, daß den einzelnen Fällen gleiche Teile desselben zukommen. Die einzelnen Fälle heißen dann *gleichmögliche Fälle;* in jüngster Zeit sind dafür auch die Bezeichnungen „gleichberechtigte"[1]) und „gleichwertige"[2]) Fälle, Annahmen u. dgl. gebraucht worden.

Eine für die Wahrscheinlichkeitstheorie fundamentale Frage geht nun dahin, auf welcher Grundlage über die Gleichmöglichkeit der Fälle entschieden werden soll. Um zur Beurteilung dieser Frage Stellung nehmen zu können, gehen wir zunächst auf die Erklärungen zurück, welche zwei Klassiker unseres Gegenstandes, Jacob Bernoulli und Laplace, für die gleichmöglichen Fälle gegeben haben. Bernoulli[3]) erklärt die sechs Fälle, welche ein Würfel darbieten kann, für gleichmöglich, da „wegen der gleichen Gestalt aller Flächen und wegen des gleichmäßig verteilten Gewichtes des Würfels *kein Grund* dafür vorhanden ist, daß eine Würfelseite leichter als eine andere fallen sollte". Laplace[4]) umschreibt den Terminus „gleichmögliche Fälle" das eine Mal mit den Worten, es seien Fälle, „über deren Dasein wir in *gleicher Unwissenheit* sind" und erklärt sie ein zweites Mal damit, man „habe *keinen Grund* zu glauben, einer der Fälle werde eher eintreten als die andern".

Beide Erklärungen berufen sich auf das logische *Prinzip des mangelnden Grundes,* das hier zu folgendem Schlusse benützt wird: Weil kein Grund erkennbar ist, der für eine ungleiche Realisierungsmöglichkeit der Fälle sprechen würde, so werden diese als gleichmöglich erachtet. Indessen ist nicht zu übersehen, daß Bernoulli in dem angeführten Beispiel wie auch an andern Stellen des zitierten Werkes nicht dieses Prinzip allein anwendet, sondern auch *für* die Gleichheit der Fälle Gründe anführt.

Ein Prinzip, welches dem vorigen gegenüber den entgegengesetzten Standpunkt einnimmt, ist das des *zwingenden Grundes,* welches die Gleichmöglichkeit der Fälle nur dann auszusprechen gestattet, wenn dafür entscheidende, zwingende Gründe vorhanden sind.

---

1) J. v. Kries, Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1886.

2) Ch. Sigwart, Logik, II, p. 305.

3) Ars conjectandi, 1713, p. 224 (Ostwalds Klassiker, Nr. 108, p. 88).

4) Théorie analytique des probabilités (1812) p. 178—179.

Diese beiden Prinzipe bezeichnen gewissermaßen die beiden extremen Standpunkte, auf welche man sich bei der Beantwortung der oben formulierten Frage stellen kann; von der Wahl zwischen beiden hängt die Ausdehnung des Anwendungsgebietes der Wahrscheinlichkeitsrechnung ab.

Zur Erläuterung mögen einige Beispiele dienen.

Weiß man von einer Urne bloß, daß sie nur weiße und schwarze Kugeln enthält, so kennt man wohl die Disjunktion „weiß oder schwarz", über ihre Glieder herrscht aber im übrigen absolutes Nichtwissen, was im Sinne der Laplaceschen Umschreibung als gleiches Nichtwissen ausgelegt werden kann, es besteht also auch kein Grund anzunehmen, daß der weißen Kugeln mehr oder weniger vorhanden seien als der schwarzen; folglich ist, wenn man den ersten Standpunkt einnimmt, die Wahrscheinlichkeit eines jeden Disjunktionsgliedes mit $\frac{1}{2}$ anzusetzen. Der zweite Standpunkt gestattet diesen Ansatz nur dann, wenn das positive Wissen vorhanden ist, daß von jeder Farbe gleich viel Kugeln in der Urne sich befinden.

Wird ein von sechs Flächen, welche durch aufgeschriebene Nummern von einander unterschieden sind, begrenzter Körper hingeworfen, so besteht über die möglichen Fälle absolutes Nichtwissen, und es ist nach dem Grundsatz des mangelnden Grundes jedem die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ zuzuschreiben. Das Prinzip des zwingenden Grundes verlangt aber ein ganz bestimmtes positives Wissen über die physische Konstitution des „Körpers", wenn dieser Ansatz zulässig sein soll: es setzt die Würfelform und eine derartige Verteilung der Masse voraus, daß der Schwerpunkt mit dem geometrischen Mittelpunkt zusammenfällt.

Der Frage gegenüber, welche Wahrscheinlichkeit es hat, daß ein Himmelskörper, z. B. der Sirius, Eisen enthalte, antwortet das erste Prinzip, auf das völlige Nichtwissen über das „ja" und „nein" gestützt, mit $\frac{1}{2}$. Das andere Prinzip wird es, eben mangels jeglichen positiven Wissens, ablehnen, eine Antwort zu geben. Ganz allgemein: Aus dem bloßen Urteile: „Wenn A, so ist B oder nicht" wird auf der einen Seite für die Aussage: „Wenn A, so ist B" immer auf die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ geschlossen, während die andere Seite ein solches Urteil nicht als Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsrechnung zuläßt.

Diese Ausführungen sind wohl geeignet, dem zweiten Standpunkt den Vorzug zu geben, soll anders den Wahrscheinlichkeiten nicht bloß eine formale, sondern eine objektive Bedeutung zukommen, sollen

sie der Ausdruck eines bestimmten Wissens und nicht ein bloßes Symbol für das Nichtwissen über eine Urteilsmaterie sein.

Indessen soll nicht verschwiegen werden, daß es nicht immer gelingen wird, die Gleichmöglichkeit in jener Strenge zu erweisen, wie es das Prinzip des zwingenden Grundes fordert. Man wird bezüglich einer Münze, eines Würfels, wenn sie noch so genau den an sie zu stellenden physischen Anforderungen entsprechen, wohl nie mit apodiktischer Gewißheit sagen können, daß für die einzelnen Seiten gleiche Realisierungsmöglichkeit bestehe. Wenn man trotzdem von gleichmöglichen Fällen spricht, so stützt man sich dabei doch wieder auf das Prinzip des mangelnden Grundes: weil man keinen Grund hat, anzunehmen, daß die etwa vorhandene Abweichung gerade diese oder jene Seite begünstige, schreibt man den Seiten gleiche Realisierbarkeit zu. Daß dies aber ein ganz anderer Schluß ist als der bei dem „sechsflächigen Körper“ gemachte, ist leicht zu erkennen; bei dem Spielwürfel, wenn er nicht auffällig von dem Typus des Würfels abweicht, *wird* die (wohl sicher vorhandene) Ungleichheit bezüglich der einzelnen Seiten keine erhebliche sein; bei jenem Körper von unbekannter Form und Massenverteilung *kann* sie aber sehr beträchtlich sein. Man kann im allgemeinen sagen, daß die über konkrete Urteilsmaterien aufgestellten Wahrscheinlichkeiten mit den Ergebnissen einer materiellen Messung das gemein haben, innerhalb gewisser Grenzen unsicher zu sein; die jeweilige Weite dieser Grenzen (sofern es denkbar wäre, sie zu ermitteln) wäre ein Maß für die Sicherheit, Genauigkeit oder für den *Erkenntniswert*[1]) der betreffenden Wahrscheinlichkeit.

Für die Beurteilung des Möglichkeitsgrades der einzelnen Fälle ist jedoch das feste positive Wissen, welches man über dieselben hat, nicht allein maßgebend; es kommt vielmehr auch auf den Vorgang bei der Verwirklichung der allgemeinen Bedingungen an. Dieser muß so geartet sein, daß er jede Bethätigung einer Absicht desjenigen, der die Ausführung vornimmt, auf die Begünstigung eines oder einer Gruppe von Fällen vollkommen ausschließt. Bei wiederholten Realisierungen muß, wenn dies so ausgedrückt werden darf, alles vorgekehrt werden, was geeignet ist, allen einzelnen Fällen gleiche Gelegenheit zu ihrer Realisierung zu gewähren. Wenn jemand mit einem „vollkommenen“ Würfel einen „Wurf“ derart ausführt, daß er dem Würfel erst eine bestimmte Lage gibt und ihn dann aus geringer Höhe auf den Tisch frei fallen läßt, so schließt dieser Vorgang die Begünstigung des Erscheinens einer bestimmten Seite nicht aus, und man kann einer solchen Verwirklichung des „Werfens“ gegenüber

---

1) Man vergleiche hierzu K. Stumpf, l. c., und die Kritik A. Meinongs über v. Kries' Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Gött. gel. Anz. 1890.

trotz der (vorausgesetzten) Vollkommenheit des Würfels den einzelnen Seiten nicht mehr gleichen Möglichkeitsgrad zusprechen. Hiernach ist wohl zu erkennen, warum man bei dem Spiel „Wappen—Schrift" die Münze hoch empor schleudert, bei dem Würfelspiel den Würfel erst in einem Becher schüttelt und dann hinwirft, die Blätter eines Kartenspiels auf der Rückseite so gleichartig als möglich gestaltet und sie mischt, die Nummern oder Kugeln in einer Urne zwischen aufeinander folgenden Ziehungen durch einander mengt u. s. w.

Die möglichen Fälle einer Urteilsmaterie scheiden sich in Bezug auf einen bestimmten Erfolg oder auf ein Ereignis in solche, mit deren Verwirklichung der Eintritt des Erfolges verbunden ist — die *günstigen* Fälle — und in die übrigen, welche als die dem betreffenden Ereignis *ungünstigen* bezeichnet werden. Bei dem Urnenbeispiel (eine weiße, zwei schwarze, drei rote Kugeln) sind dem Erscheinen einer schwarzen Kugel zwei Fälle günstig und vier Fälle ungünstig.

Mitunter gebraucht man für die günstigen Fälle auch die Bezeichnung *Chancen* des Ereignisses. Indessen wird dies Wort in der Wahrscheinlichkeitstheorie mit wechselnder Bedeutung angewandt; so werden zuweilen die bleibenden bekannten Umstände, für welche im vorigen Artikel der Name *Ursachen* (der möglichen Erfolge) angeführt worden ist, auch Chancen genannt; nicht selten wird das Wort *Chance* als Synonym für Wahrscheinlichkeit gebraucht.

6. Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Wenn das positive Wissen über eine Urteilsmaterie die Auflösung der Möglichkeiten in eine zählbare Menge einzelner gleichmöglicher Fälle gestattet, *so drückt sich die Wahrscheinlichkeit eines* auf der Urteilsmaterie beruhenden *Ereignisses als Quotient aus der Anzahl der ihm günstigen durch die Anzahl der gleichmöglichen Fälle aus.*

Ist also g die Anzahl der einem Ereignis E günstigen und m die Anzahl aller möglichen Fälle, so ist

$$p = \frac{g}{m} \tag{1}$$

die Wahrscheinlichkeit von E.

Eine solche zahlenmäßig bestimmte Wahrscheinlichkeit nennt man zum Unterschiede zu dem allgemeinen Begriff der Wahrscheinlichkeit als Gegensatz der Notwendigkeit wohl auch eine *mathematische Wahrscheinlichkeit.*

Die Methode, welche in der obigen Definition ihren Ausdruck findet, bezeichnet man als eine *Wahrscheinlichkeitsbestimmung a priori.* Mitunter wird diese Bezeichnung[1]) auch auf die Wahrscheinlichkeit

1) Dieselbe ist in diesem Zusammenhange zuerst von Jacob Bernoulli, Ars conjectandi, p. 224 (Ostwalds Klassiker Nr. 108, p. 89), gebraucht worden. Über die zweite Methode, von ihm „Wahrscheinlichkeitsbestimmung a posteriori" genannt, handelt der III. Abschnitt.

selbst übertragen und dann von einer „Wahrscheinlichkeit a priori“ oder von einer „apriorischen Wahrscheinlichkeit“ gesprochen.

Das Zahlengebiet, auf welchem sich in solcher Weise bestimmte Wahrscheinlichkeiten bewegen, ist das der (positiven) echten Brüche, also der *rationalen* Zahlen aus dem Intervall (0, 1) mit Ausschluß der Grenzen; denn diese Grenzen charakterisieren eine *Notwendigkeit* oder *Gewißheit;* die untere, aus $g = 0$ entspringend, drückt die Notwendigkeit des Nichteintreffens, die obere, aus $g = m$ hervorgehend, die Notwendigkeit des Eintreffens von E aus. Eine zutreffende geometrische Darstellung der Wahrscheinlichkeiten und der Notwendigkeit böte eine Kreislinie vom Umfange 1 dar: ein Punkt derselben wäre das Bild der Notwendigkeit, zur einen Seite (0) des Nichteintreffens, zur andern Seite (1) des Eintreffens.

Die $g' = m - g$ Fälle, welche nach Ausscheidung der günstigen verbleiben, nennt man in Bezug auf das Ereignis E (*ungünstige* Fälle) und die Verwirklichung eines derselben ein dem E entgegengesetztes (Ereignis F) (gleichbedeutend mit dem Nichteintreffen von E). Seine Wahrscheinlichkeit q ist durch den Bruch $\frac{g'}{m}$ gegeben, also

$$q = \frac{g'}{m} = \frac{m - g}{m} = 1 - p,$$

woraus

$$p + q = 1 \tag{2}$$

folgt, so daß zwei entgegengesetzte Ereignisse Wahrscheinlichkeiten besitzen, die sich zur Einheit ergänzen. Von dieser Beziehung wird zuweilen vorteilhafter Gebrauch gemacht, wenn die Berechnung von q sich leichter gestaltet als die des fraglichen p.

Sind $E_1, E_2, \cdots E_n$ die Ereignisse, welche im Bereiche der Möglichkeit liegen und einander ausschließen; entsprechen unter den m möglichen Fällen diesen Ereignissen beziehungsweise $g_1, g_2, \cdots g_n$ günstige Fälle, so folgt aus $g_1 + g_2 + \cdots + g_n = m$, daß

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1. \tag{3}$$

Diese Gleichung ist eine Erweiterung der Gleichung (2) und besagt, daß die Wahrscheinlichkeiten einer Reihe einander ausschließender Ereignisse die Summe 1 ergeben.

7. Bedeutung der Wahrscheinlichkeit. Wenn sie es auch nicht deutlich ausgesprochen, so haben doch schon die ersten Schriftsteller auf unserem Gebiete unter der Wahrscheinlichkeit ein *Maß für die Berechtigung einer Erwartung* oder *Vermutung* verstanden. Jacob Bernoulli hat diese Auffassung schon durch den Titel zum Ausdruck gebracht, den er seinem berühmten Werke gab: Ars conjectandi, d. i. Vermutungskunst. Die neuere philosophische Forschung hat sich

dieser Deutung angeschlossen. v. Kries[1]) erkennt es als charakteristische Eigentümlichkeit einer Wahrscheinlichkeitsaussage, daß sie die mehr oder minder große Berechtigung einer Erwartung angebe, wenn auch jedesmal die Nichterfüllung derselben als möglich erscheint. Stumpf[2]) weicht hiervon nur insofern ab, als er von einer *vernünftigen* Erwartung gesprochen wissen will, womit gesagt sein soll, daß bei der Bildung der numerischen Wahrscheinlichkeit nur Vernunftgründe und nicht auch seelische Affekte zu Worte kommen sollen; wie man erkennt, kann diese Bemerkung sich nur auf *subjektive* Wahrscheinlichkeitsschätzungen beziehen. Das Wort *Erwartung* ersetzt er durch *Vermutung*, um der Vorstellung vorzubeugen, als ob es sich immer nur um Zukünftiges handelte.

Einen materiellen Ausdruck hat die Auffassung der Wahrscheinlichkeit als eines Erwartungsmaßes in der seit jeher üblichen Darstellung des Wahrscheinlichkeitsverhältnisses in Form einer *Wette*. Von dem Grundsatze ausgehend, daß die Einsätze in einer Wette proportional sein müssen der Stärke der Erwartung, daß das von dem einzelnen an der Wette Beteiligten bezeichnete Ereignis eintreffen werde oder eingetroffen sei, hat man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, dem g Fälle günstig und g' Fälle zuwider sind, mit den Worten gekennzeichnet: es sei g gegen g' auf das Eintreffen des Ereignisses zu wetten.

Nicht immer richtig ist das Verhältnis zwischen der verschiedener Grade fähigen Wahrscheinlichkeit und der absoluten Notwendigkeit oder Gewißheit beurteilt worden. Jacob Bernoulli[3]) bezeichnet die Wahrscheinlichkeit als einen Grad der Gewißheit und schreibt einem Ereignis von der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{5}$ den entsprechenden Bruchteil der Gewißheit zu; den gleichen Standpunkt hat auch noch der erste deutsche Philosoph, der sich mit der Kritik der Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung befaßte, J. J. Fries[4]), eingenommen. Auch bei Laplace[5]) findet sich eine Stelle, die hieran anklingt; an die Bemerkung, daß die Wahrscheinlichkeit sich in Gewißheit verwandle und ihr Ausdruck die Einheit werde, wenn alle Fälle dem Ereignis günstig sind, knüpft er die Worte an, daß unter diesem Gesichtspunkte Gewißheit und Wahrscheinlichkeit vergleichbar seien; durch den weiteren Zusatz aber, daß ein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Zuständen des Geistes bestehe, wenn ihm eine Wahrheit streng bewiesen ist, oder wenn er noch eine kleine Quelle des Irrtums

1) l. c., p. 21 und 285. 2) l. c.
3) Ars conjectandi, p. 211 (Ostwalds Klassiker, Nr. 108, p. 72).
4) Versuch einer Kritik der Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1842, p. 15.
5) Théorie analyt. d. probab. (1812) p. 179.

wahrnimmt, läßt er schon den richtigen Standpunkt durchblicken, auf den vor ihm schon Condorcet[1]) sich gestellt hat und den die neuere Philosophie behauptet: *Wahrscheinlichkeit und Gewißheit* (oder Notwendigkeit) *sind Dinge wesentlich verschiedener Natur*, und es gibt keine Brücke, die von der einen zur andern geschlagen werden könnte. Damit sind auch die mannigfachen Versuche ihrem logischen Werte nach gekennzeichnet, welche unternommen worden sind, um Zwischenglieder oder Übergänge zwischen Wahrscheinlichkeit und Gewißheit einerseits und Unmöglichkeit andererseits herzustellen. So unterscheidet schon Jacob Bernoulli[2]) zwischen *absoluter* und *moralischer* Gewißheit und Unmöglichkeit, unter letzteren sehr hohe, beziehungsweise sehr niedrige Grade von Wahrscheinlichkeit verstehend. Ähnliche Begriffsbildungen, welche gegen die *fundamentale* Erkenntnis verstoßen, daß ein Ereignis von einer der Einheit noch so nahen Wahrscheinlichkeit nicht eintreffen *muß* und ein Ereignis von noch kleiner Wahrscheinlichkeit eintreffen *kann*, finden sich später bei D'Alembert[3]), Buffon[4]), De Morgan[5]) unter den Namen praktische Gewißheit, physische Unmöglichkeit u. dgl.

8. Litteratur. Die ersten Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrafen Glücksspiele und bezogen sich auf die mathematische Seite des Gegenstandes. Auf seine philosophische Seite ist Jacob Bernoulli im vierten Teile seiner „Ars conjectandi“ 1713 (Ostwalds Klassiker Nr. 107 u. 108) zunächst des näheren eingegangen und hat zugleich zu zeigen sich bestrebt, daß die Anwendbarkeit und Bedeutung der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht bei den Glücksspielen aufhöre, sondern tief eingreife in viele Gebiete des praktischen Lebens. Laplace, dessen „Théorie analytique des probabilités“ (1812, 1814, 1820; ges. Werke VII, 1886) ein Hauptwerk über unseren Gegenstand bildet, hat sich in erster Linie der Ausbildung der mathematischen Seite und den Anwendungen zugewendet und ist weder hier noch in der ausdrücklich als „Essai philosophique des probabilités“ bezeichneten Schrift, welche dem vorhin genannten Werke von der zweiten Auflage an als „Introduction“ vorangestellt ist (deutsch von Tönnies 1819 und von N. Schwaiger 1886), auf die prinzipiellen Fragen ausführlich eingegangen. Unter den Franzosen war es vornehmlich Cournot, welcher in seiner „Exposition de la théorie des chances et des probabilités“ 1843 (deutsch von H. Schnuse, 1849) sich diesen Fragen zuwandte und zur tieferen Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie beitrug. Fast zur selben Zeit (1842) ließ der deutsche Philosoph

1) Essai sur l'application de l'analyse à la prob. etc. 1785.
2) Ars conjectandi, p. 211 (Ostwalds Klassiker Nr. 108, p. 73).
3) Reflexions sur le calcul des probab. Opusc. mathém. II, 1761.
4) Essai d'Arithmétique morale. Suppl. Hist. Natur. IV, 1787.
5) Encycl. Metropol. II, Artikel „Theory of probability“, 1845, p. 396.

J. F. Fries seinen „Versuch einer Kritik der Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ erscheinen, worin er sich gleich Cournot gegen die bis dahin geübte rein formale oder logische Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung wendet. Das Verhältnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu dem hypothetisch-disjunktiven Urteil hat Ch. Sigwart in seiner „Logik“ (II. Bd., 1878, 1893) klargelegt und dadurch die Stellung derselben im System der Logik gekennzeichnet.

Aus der jüngsten Zeit stammen drei bemerkenswerte Arbeiten, die sich mit der philosophischen Kritik der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausschließlich befassen, die mathematische Seite völlig bei Seite lassend oder jedenfalls in zweite Linie stellend. Die Brochure A. Ficks, betitelt „Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeiten“ 1883, geht auf das Wesen der Bildung von Wahrscheinlichkeiten ein, ist aber zu allgemein gehalten, um eine für die praktische Ausführung geeignete Richtschnur zu geben. Am tiefsten geht auf alle hierher gehörigen Fragen J. v. Kries in seiner ausführlichen Schrift über „Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Eine logische Untersuchung“ 1886 ein; ihm handelt es sich vor allem um Feststellung der Bedingungen für eine begründete Wahrscheinlichkeitsaufstellung, ferner um eine Prüfung der bisher von der Wahrscheinlichkeitsrechnung gemachten Anwendungen darauf hin, wie weit hier jene Bedingungen vorhanden sind, und um die Betonung der objektiven Bedeutung auf richtiger Grundlage berechneter Wahrscheinlichkeiten; auf das X. Kapitel dieses Buches muß an dieser Stelle besonders hingewiesen werden, weil es die geschichtliche Darstellung der philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie und eine Kritik der hierher gehörigen Versuche unternimmt. In teilweisem Gegensatze zu der Auffassung von Kries, welche vermöge ihrer strengen Forderungen geeignet ist, den Anwendungsbereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung einzuschränken, steht C. Stumpf in seiner 1892 in den Sitzungsberichten der philosophischen Klasse der bayrischen Akademie veröffentlichten Abhandlung „Über den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit“, indem er sich auf das Prinzip des mangelnden Grundes stützt und die Zulässigkeit einer Wahrscheinlichkeitsaufstellung an viel weiter gefaßte Bedingungen knüpft. Goldschmidts Schrift: „Die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Versuch einer Kritik“ 1897, die sich zum Teil als eine Kritik der beiden vorgenannten Arbeiten darstellt, reicht an diese, was Schärfe der Auffassung und Bestimmtheit des Ausdrucks anlangt, nicht heran.

§ 2. Direkte Wahrscheinlichkeitsbestimmung.

9. Bildung und Zählung der möglichen und günstigen Fälle. Die Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit auf Grund der in Nr. 6 aufgestellten Definition setzt voraus, daß sich aus den Bedingungen des

Problems eine Gesamtheit gleichberechtigter und innerhalb dieser die Gesamtheit der dem betreffenden Ereignis günstigen Fälle konstruieren lasse; mit der Zählung dieser Gesamtheiten ist das Problem gelöst. Die Bildung der Fälle ist ein kombinatorischer Prozeß, dessen richtige Durchführung eine scharfe Zergliederung der Bedingungen der Aufgabe erfordert. Hiermit hängt die Tatsache zusammen, daß die *Kombinatorik*, welche später zu einem selbständigen Zweige der reinen Mathematik sich entwickelt hat, mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung zugleich ihren Anfang genommen und von ihr die ersten Aufgaben empfangen hat[1]). Die Kombinatorik lehrt einerseits die systematische Bildung von Komplexionen gegebener Elemente, die bestimmten Bedingungen zu entsprechen haben, und sie befaßt sich andererseits mit der Zählung dieser Komplexionen.

10. Formeln der Kombinatorik. Die kombinatorischen Grundoperationen sind die Bildung von Permutationen, Kombinationen und Variationen.

Eine Reihe von n *verschiedenen* Elementen *permutieren* heißt, dieser Reihe alle möglichen Anordnungen geben; die Anzahl der Permutationen ist durch

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n, \text{ symbolisch } n!,$$

gegeben. Sie vermindert sich, wenn sich unter den Elementen *a gleiche* Elemente befinden, auf

$$\frac{n!}{a!},$$

und sie vermindert sich weiter auf

$$\frac{n!}{a!\,b!},$$

wenn außer den a gleichen Elementen einer Art noch b gleiche Elemente einer andern Art sich vorfinden u. s. w.

Eine Reihe von n Elementen zur r-ten Klasse *ohne Wiederholung kombinieren* heißt, sie auf alle möglichen Arten in Gruppen von

1) Pascal, der sich mit Fermat in den Ruhm der Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung teilt, hat in seinem „Traité du triangle arithmétique" (1665) die erste bedeutendere Arbeit über Kombinatorik geliefert. Fast um dieselbe Zeit schrieb Leibniz seine „Dissertatio de arte Combinatoria" (1666) und handelte Wallis in seinem „Treatise of algebra" (1685) in einem besonderen Kapitel über den Gegenstand. Das erste umfassende Werk über Wahrscheinlichkeitsrechnung, Jacob Bernoullis posthume „Ars conjectandi" (1713), bringt in seinem zweiten Teile auch die erste systematische Darstellung der „Permutations- und Kombinationslehre"; von J. Bernoulli stammen auch einzelne der heute in der Kombinatorik üblichen Benennungen.

je r Elementen zusammenstellen derart, daß ein Element in einer Gruppe nur einmal vorkommt; auf die Anordnung der Elemente innerhalb einer Komplexion kommt es dabei nicht an. Die Anzahl der Kombinationen ist

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots r}, \quad \text{symbolisch } \binom{n}{r},$$

und kann durch Fakultäten ausgedrückt werden, indem auch

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

ist; die Klassenzahl ist durch die Elementenzahl beschränkt.

Eine Reihe von n Elementen zur r-ten Klasse *mit Wiederholung kombinieren* heißt, auf alle möglichen Arten Gruppen von r Elementen bilden mit der Maßgabe, daß ein und dasselbe Element in einer Komplexion mehrmal und selbst r-mal sich wiederholen kann; auf die Anordnung der Elemente innerhalb einer Komplexion kommt es nicht an. Die Anzahl solcher Kombinationen ist

$$\frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{1\cdot 2\cdots r},$$

und durch Fakultäten ausgedrückt:

$$\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}.$$

Die Klassenzahl ist hier unbeschränkt.

Aus einer Reihe von n Elementen Variationen *ohne Wiederholung* zur r-ten Klasse bilden heißt, auf alle Arten und in allen möglichen Anordnungen Gruppen von je r verschiedenen Elementen bilden. Die Anzahl derartiger Komplexionen ist

$$n(n-1)\cdots(n-r+1) = r!\binom{n}{r},$$

durch Fakultäten ausgedrückt:

$$\frac{n!}{(n-r)!}.$$

Die Klassenbildung ist durch die Elementenanzahl beschränkt. Die Variationen der obersten, n-ten, Klasse fallen mit den Permutationen der Elemente zusammen.

Aus einer Reihe von n Elementen *Variationen mit Wiederholung* der r-ten Klasse bilden heißt, auf alle möglichen Arten und in allen Anordnungen Gruppen von je r Elementen bilden, worunter sich gleiche Elemente selbst bis zur Anzahl r befinden können. Die Anzahl dieser Komplexionen ist

$$n^r,$$

und die Klassenbildung ist unbeschränkt.

Mit einer von Kramp[1]) stammenden Bezeichnung für Produkte aufeinander folgender natürlicher Zahlen, wonach für das Produkt $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ das Symbol $n^{r/-1}$ oder auch das Symbol $(n-r+1)^{r/1}$ gebraucht wird, läßt sich

$$n! \text{ auch in der Form } 1^{n/1}$$

$$\frac{n!}{a!\,b!} \quad \text{in der Form } \frac{1^{n/1}}{1^{a/1}1^{b/1}}$$

$$\binom{n}{r} \quad \text{in der Form } \frac{n^{r/-1}}{1^{r/1}}$$

u. s. w. schreiben.

Bemerkenswert und wichtig ist der Umstand, daß sich die Anzahlen der verschiedenen Arten von Komplexionen, bis auf die Variationen mit Wiederholung, durch Fakultäten darstellen lassen. Demnach würde man für praktische Zwecke mit einer Tafel der Fakultäten das Auskommen finden[2]). Indessen wachsen die Fakultäten mit der Zahl n sehr rasch an und werden bei sehr großem n physisch unberechenbar; um so weniger wären Rechnungen mit mehreren Fakultäten großer Zahlen direkt zu bewerkstelligen. Während die Fakultäten der zehn ersten Zahlen noch innerhalb mäßiger Grenzen sich bewegen — es ist

$$1!=1, \quad 2!=2, \quad 3!=6, \quad 4!=24, \quad 5!=120,$$
$$6!=720, \quad 7!=5040, \quad 8!=40320, \quad 9!=362880, \quad 10!=3{,}628800$$

—, ist die Faktorielle von 20 eine neunzehnziffrige Zahl:

$$20! = 2_{\prime\prime\prime}432902_{\prime\prime}008176{,}640000$$

und die Fakultät von 30 schon dreiunddreißigziffrig:

$$30! = 265_{\prime\prime\prime\prime\prime}252859_{\prime\prime\prime\prime}810729_{\prime\prime\prime}458636_{\prime\prime}308480{,}000000.$$

11. Die Formel von Stirling. Für die mathematische Ausbildung der Wahrscheinlichkeitstheorie bedeutete es einen großen Fortschritt, als es gelang, eine Funktion zu finden, welche den Wert der Fakultät einer großen Zahl angenähert gibt und rechnerisch leicht zu handhaben ist. De Moivre[3]) hat den Weg hierzu angegeben und war zu einem Resultate gelangt, in welchem ihm nur noch die Natur einer in Form einer unendlichen Reihe dargestellten Konstanten unbekannt blieb;

---

1) Chr. Kramp, Élements d'Arithm. 1808.

2) Unter dem Titel „Tabularum ad faciliorem probabilitatis computationem utilem Enneas" hat (1824) C. F. Degen die zwölfstelligen Logarithmen aller $n!$ von $n=1$ bis $n=1200$ herausgegeben. Eine sechsstellige Tafel gleichen Umfanges ist A. de Morgans Artikel „Theory of Probabilities" in der Encycl. Metropol. vol. II (1845) beigefügt.

3) A. de Moivre, The Doctrine of Chances (1718, 1738, 1756). — Miscellanea Analytica (1730).

dieser vollendende Schritt gelang **Stirling**[1]), nach welchem später die betreffende Näherungsformel benannt worden ist.

Zum Zwecke ihrer Ableitung gehen wir von der Tatsache aus, daß sich $n!$ durch ein **Eulersches** Integral zweiter Gattung, durch eine Gammafunktion darstellen läßt. Es ist nämlich

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx. \tag{1}$$

Gelingt es, für das Integral einen angenäherten Wert zu finden, so ist dadurch das angestrebte Ziel erreicht. Dazu ist vor allem notwendig, die Natur der Funktion

$$f(x) = x^n e^{-x},$$

welche unter dem Integralzeichen steht, näher kennen zu lernen. Diese innerhalb der Integrationsgrenzen beständig positive Funktion hat für $x = 0$ den Wert 0, nähert sich mit beständig wachsendem x der Grenze Null und erlangt an der Stelle, welche sich aus der Gleichung:

$$f'(x) = x^{n-1} e^{-x}(n - x) = 0$$

ergibt, das ist für $x = n$, ihr Maximum:

$$f(n) = n^n e^{-n}. \tag{2}$$

Von diesem Maximum fällt sie sehr rasch ab und erlangt z. B. an der Stelle $x = 2n$ den Wert

$$f(2n) = (2n)^n e^{-2n},$$

der ein um so kleinerer Bruchteil ihres größten Wertes ist, je beträchtlicher n. So ist:

für $n =$	10	$f(n) = 453999{,}3$		$f(2n)$	$= 0{,}046\,489 \cdots f(n)$
„ „	20	„ = einer 18-ziffr. Zahl	$216127_{,,} \cdots$	„	$= 0{,}002\,161 \cdots f(n)$
„ „	30	„ = einer 32-ziffr. Zahl	$19_{,,,,,}2665 \cdots$	„	$= 0{,}000\,10 \cdots f(n)$
„ „	100	„ = einer 157-ziffr. Zahl	$3_{(26)}\,72007 \cdots$	„	$= 0{,}000\,000\,000\,000\,047 \cdots f(n)$

---

1) J. Stirling, Methodus differentialis (1730).

Der typische Verlauf der Funktion ist aus der Fig. 1 ersichtlich, in welcher jedoch die Ordinaten gegenüber den Abscissen in 10000-facher Verkürzung dargestellt sind; sie entspricht dem Fall $n = 10$.

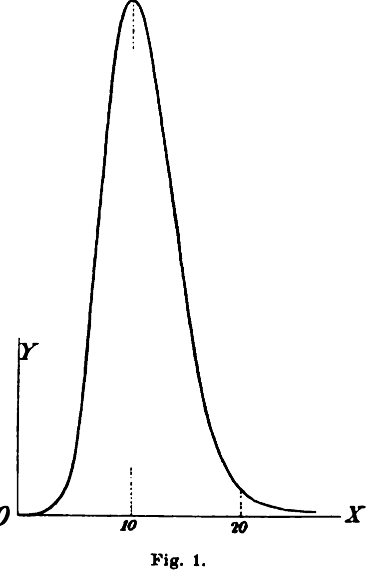


Fig. 1.

Dies vorausgeschickt, führen wir in dem Integral (1) eine neue Variable t mit Hilfe der Substitution

$$x^n e^{-x} = f(n) e^{-t^2} \qquad (3)$$

ein; x wird das Intervall $(0, \infty)$ durchlaufen, während t beständig wachsend von $-\infty$ bis ∞ fortschreitet, so daß zunächst gelten wird:

$$n! = f(n) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \frac{dx}{dt} dt. \qquad (4)$$

Um den Differentialquotienten $\frac{dx}{dt}$ zu finden, werde eine neue Hilfsvariable ξ mittels der Gleichung

$$x = n + \xi$$

eingeführt, welche beständig wachsend das Intervall $(-n, \infty)$ durchläuft, während x auf seinem Gebiete $(0, \infty)$ stetig sich ändert; zugleich ist

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt}. \qquad (5)$$

Aus der Gleichung (3) wird dadurch mit Rücksicht auf (2)

$$(n + \xi)^n e^{-n-\xi} = n^n e^{-n} e^{-t^2},$$

woraus

$$e^{-t^2} = \left(1 + \frac{\xi}{n}\right)^n e^{-\xi}$$

und weiter

$$t^2 = \xi - n\, \mathrm{l.}\left(1 + \frac{\xi}{n}\right)$$

folgt. Entwickelt man den Logarithmus in eine Reihe, so ergibt sich für t^2 die Entwicklung

$$t^2 = \frac{\xi^2}{2n} - \frac{\xi^3}{3n^2} + \frac{\xi^4}{4n^3} - \cdots. \qquad (6)$$

Wählt man umgekehrt ξ in der Form

$$\xi = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$$

— wobei ein von t freies Glied fortgelassen wurde, weil ξ mit t zugleich verschwindet —, so ergeben sich durch Einsetzung dieses Ausdrucks bei Anwendung des Satzes der unbestimmten Koeffizienten zur Bestimmung von a_1, a_2, $\cdots$ die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_1^2}{2n} &= 1 \\ \frac{a_1 a_2}{n} - \frac{a_1^3}{3n^2} &= 0 \\ \frac{2a_1 a_3 + a_2^2}{2n} - \frac{a_1^2 a_2}{n^2} + \frac{a_1^4}{4n^3} &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad \text{woraus} \quad \left\{\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2n} \\ a_2 &= \frac{2}{3} \\ a_3 &= \frac{\sqrt{2n}}{18n} \\ \cdots &; \end{aligned}\right.$$

daß für a_1 die positive Wurzel zu nehmen ist, folgt aus der Bemerkung, daß $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_{t=0} = a_1$ positiv sein muß, da ξ mit t beständig wächst.

Die Gleichung (4) geht nun über in

$$n! = f(n) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} (a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \cdots) dt,$$

und da

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt &= \sqrt{\pi} \\ \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} dt &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\ \cdots\cdots &, \end{aligned}$$

so erhält man nach Einsetzung dieser und der Werte von a_1, a_3, $\cdots$

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \cdots\right). \tag{7}$$

Dies ist die auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{n}$ abgekürzte *Stirlingsche Formel.* Auf einen Punkt in ihrer Ableitung muß hingewiesen werden. Die Entwicklung (6) ist nur so lange konvergent, als $\left|\frac{\xi}{n}\right| < 1$, also ξ in dem Intervall $(-n, n)$, x in dem Intervall $(0, 2n)$ und t in dem zugeordneten Intervall $(-\infty, t_{2n})$ verbleibt; die später

vollzogene Integration erstreckt sich aber auf das ganze Gebiet $(0, \infty)$ von x, respektive $(-\infty, \infty)$ von t; dies hat zur Folge, daß die Reihe in (7) divergent wird. Nichtsdestoweniger ist sie zur näherungsweisen Berechnung von $n!$ geeignet; der Grund liegt in der eingangs hervorgehobenen Tatsache, daß die Funktion $f(x)$ in dem Intervall $(0, 2n)$ Werte annimmt, welche alle übrigen in um so höherem Maße überschreiten, je größer n ist.

Für die Zwecke der Wahrscheinlichkeitsrechnung genügt fast durchwegs, die Stirlingsche Formel in der weitergehenden Abkürzung

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \tag{8}$$

zu verwenden, in welcher die rechte Seite immer einen zu kleinen Wert für die links stehende Fakultät liefert.

Um die Natur dieser merkwürdigen Näherungsformel erkennen zu lassen und zu zeigen, daß sie schon bei mäßigen Werten von n gut verwendbar ist, führen wir die folgenden Beispiele an: Es ist

$$\begin{aligned} 10! &= 3\,628\,800 \\ 10^{10} e^{-10} \sqrt{20\pi} &= 3\,598\,699 \\ \hline \text{Differenz} = \quad & 30\,101 = 0{,}008 \cdots \text{ des richtigen Wertes;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20! &= 2_{\prime\prime\prime}432902_{\prime\prime}008176{,}640000 \\ 20^{20} e^{-20} \sqrt{40\pi} &= 2_{\prime\prime\prime}422786_{\prime\prime}385510{,}400000 \\ \hline \text{die Differenz} = \quad & 10115_{\prime\prime}622666240000 \end{aligned}$$

macht $0{,}004 \cdots$ des richtigen Wertes aus;

$$\begin{aligned} 30! &= 265_{\prime\prime\prime\prime\prime}252859_{\prime\prime\prime\prime} \cdots \\ 30^{30} e^{-30} \sqrt{60\pi} &= 264_{\prime\prime\prime\prime\prime}517093_{\prime\prime\prime\prime} \cdots \\ \hline \text{Differenz} = \quad & 735766_{\prime\prime\prime\prime} \cdots = 0{,}0028 \cdots \text{ des richtigen Wertes.} \end{aligned}$$

Der absolute Fehler, den man bei Anwendung der Formel (8) begeht, wächst also mit n ins Ungeheure, der relative Fehler aber nimmt mit wachsendem n ab und ist selbst bei $n = 10$ so klein, daß er für praktische Zwecke fast ausnahmslos außer Betracht bleiben kann.

12. Beispiel I. *Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß bei zweimaligem Aufwerfen einer Münze Wappen erscheint.*

Bezeichnet man die Wappenseite mit W, die Schriftseite mit S, so kann das Ergebnis zweier Würfe einer der Fälle sein:

$$WW; \quad WS; \quad SW; \quad SS;$$

da drei dieser Fälle dem erwarteten Ereignis günstig sind, so ist dessen Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{3}{4}.$$

In anderer — unrichtiger — Weise faßte D'Alembert[1]) die Aufgabe auf; mit dem Hinweise, daß, sofern Wappen im ersten Wurf fällt, das Spiel beendet und der zweite Wurf unnöthig sei, setzt er die Fälle

$$W; \quad SW; \quad SS$$

und rechnet die Wahrscheinlichkeit mit $\frac{2}{3}$; daß der erste Fall nicht gleichwertig den beiden andern ist, gab D'Alembert nicht zu.

13. Beispiel II. *Es ist die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, daß man mit zwei Würfeln eine bestimmte Summe treffen werde.*

Die möglichen Fälle werden durch die $6^2 = 36$ Variationen mit Wiederholung gebildet, welches die sechs Elemente 1, 2, $\cdots$ 6 zulassen.

Von diesen führt je eine (1, 1; 6, 6) die Summen 2 und 12 herbei; je zwei (1, 2; 2, 1; — 5, 6; 6, 5) ergeben die Summen 3 und 11; je drei (1, 3; 2, 2; 3, 1; — 4, 6; 5, 5; 6, 4) die Summen 4 und 10; je vier die Summen 5 und 9; je fünf die Summen 6 und 8 und sechs (1, 6; 2, 5; 3, 4; 4, 3; 5, 2; 6, 1) liefern die Summe 7. Wird also mit p_s die Wahrscheinlichkeit der Summe s bezeichnet, so ist

$$p_2 = p_{12} = \frac{1}{36}; \quad p_3 = p_{11} = \frac{1}{18}; \quad p_4 = p_{10} = \frac{1}{12}; \quad p_5 = p_9 = \frac{1}{9};$$

$$p_6 = p_8 = \frac{5}{36}; \quad p_7 = \frac{1}{6}.$$

Wenn Leibniz[2]) der Summe 11 nur einen und der Summe 7 drei Fälle zuschrieb, so schwebten ihm die Kombinationen mit Wiederholung als Vertreter der gleichmöglichen Fälle vor, und diese Auffassung ist irrig; denn während z. B. der Fall 6, 6 nur auf eine Art zustande kommen kann, sind für 5, 6 zwei Entstehungsweisen möglich, indem sich die beiden Würfel in die Nummern 5, 6 auf zwei Arten verteilen können.

14. Beispiel III. *Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß mit drei Würfeln die Summe 9, beziehungsweise 10, 11, 12 fallen werde.*

Wie im vorigen Beispiel sind die möglichen Fälle durch die Variationen mit Wiederholung der Elemente 1, 2, $\cdots$, 6 dargestellt, deren Anzahl, da es sich nun um drei Würfel handelt, $6^3 = 216$ ist.

1) Artikel „Croix ou Pile" in der „Encyclopédie" (1754).

2) Dissertatio de Arte Combinatoria (1666).

Die Entstehungsarten der bezeichneten Summen sind die folgenden:

Summe 9:	Fälle:	Summe 10:	Fälle:	Summe 11:	Fälle:	Summe 12:	Fälle:
126	6	136	6	146	6	156	6
135	6	145	6	155	3	246	6
144	3	226	3	236	6	255	3
225	3	235	6	245	6	336	3
234	6	244	3	335	3	345	6
333	1	334	3	344	3	444	1
	25		27		27		25

Wiewohl sich für jede dieser Summen sechs Entstehungsarten ergeben, so repräsentieren diese doch nicht auch gleichmögliche Einzelfälle; so kann die Verbindung 333 aus der ersten Kolonne nur auf eine Art, die Verbindung 225 auf drei Arten, die Verbindung 234 aber auf sechs Arten entstehen, indem sich die Nummern 2, 2, 5, respektive 2, 3, 4 auf drei, beziehungsweise sechs Arten auf die drei Würfel verteilen können. Mithin ist

$$p_9 = p_{12} = \frac{25}{216}, \quad p_{10} = p_{11} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}.$$

An diese Aufgabe knüpft sich die erste Untersuchung über eine wahrscheinlichkeitstheoretische Frage, die die Litteratur nachweist. Diese Frage bezog sich auf das sogenannte Knöchelspiel (passe-dix), bei welchem es sich darum handelt, mit drei Würfeln eine Summe über zehn zu werfen. Ein fleißiger Beobachter dieses Spieles hatte die Wahrnehmung gemacht, daß die Summe 11 häufiger erscheint als 12 und 10 öfter als 9; da nach seiner Auffassung alle vier Summen auf gleich viele Arten entstehen konnten, verlangte er von Galilei[1]) Aufklärung über diesen Widerspruch zwischen Beobachtung und Rechnung. Galilei gab sie ihm in der oben dargelegten Weise.

15. Beispiel IV. *Es liegen drei äußerlich gleiche Kästchen A, B, C mit je zwei Lädchen vor; im Kästchen A enthält jedes Lädchen eine Goldmünze, in B jedes eine Silbermünze, in C das eine eine Gold-, das andere eine Silbermünze. Man greift ein Kästchen beliebig heraus; welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß es C sei? — Man öffnet ein Lädchen und besichtigt den Inhalt; wie groß ist nach dieser Kenntnisnahme die Wahrscheinlichkeit, daß man das Kästchen C erwählt habe?*

Die Antwort auf die erste Frage ist leicht gegeben; von drei gleichmöglichen Fällen ist einer dem bezeichneten Ereignis günstig, die Wahrscheinlichkeit ist $p = \frac{1}{3}$.

1) G. Galilei, Considerazione sopra il giuoco dei dadi (unbekannten Datums, jedenfalls vor 1642).

Bezüglich der zweiten Frage liegt ein Fehlschluß nahe. Was auch das geöffnete Lädchen enthalten möge, es kommen immer nur noch zwei Kästchen in Frage, weil das eine durch das erlangte Wissen ausgeschlossen ist, und diese Überlegung könnte dazu führen, die Wahrscheinlichkeit, daß man das Kästchen C herausgegriffen habe, mit $\frac{1}{2}$ anzusetzen.

Indessen muß hier anders geschlossen werden. Enthält das geöffnete Lädchen eine Goldmünze, so kann man es nur mit dem Kästchen A oder mit C zu thun haben; diese beiden Kästchen enthalten drei Lädchen mit Goldmünzen, A deren zwei, C nur eines; die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, daß man das Kästchen C vor sich habe, ist gleichbedeutend mit der Frage, daſs man von den drei Lädchen mit Goldmünzen dasjenige geöffnet habe, welches sich in C befindet, und diese Wahrscheinlichkeit ist, weil unter drei Fällen ein günstiger vorkommt, $\frac{1}{3}$, dieselbe wie im ersten Falle[1]). Zu dem gleichen Resultat wird man geführt, wenn das geöffnete Lädchen eine Silbermünze enthält.

Es liegt nur in der eigentümlichen Konstruktion des Beispiels, daß das durch das Öffnen eines Lädchens erworbene, gegenüber der ersten Fragestellung vermehrte Wissen an der Wahrscheinlichkeit des erwarteten Ereignisses nichts ändert. Enthielten die Kästchen je drei Lädchen, diese drei Lädchen in A Gold-, in B Silbermünzen, während in C zwei Gold- und eine Silbermünze auf die Lädchen verteilt wären, so verhielte es sich anders. Wieder wäre $\frac{1}{3}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man bei vollzogener Wahl das Kästchen C ergreift; findet man aber in einem geöffneten Lädchen eine Goldmünze, so gehört das Lädchen mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$ dem Kästchen C an, und mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$, wenn die geöffnete Lade eine Silbermünze enthielt.

16. Beispiel V. *Zwei Personen, A und B, gleich geschickt, werfen Kugeln nach einem Ziel; derjenige gewinnt, welcher dem Ziel am nächsten kommt. A hat zwei, B eine Kugel zu werfen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß A gewinnen werde?*

Bezeichnet man die Kugeln des A mit a_1, a_2, die Kugel des B

---

1) Vgl. hiermit die Schlußweise bei J. Bertrand, Calcul des Probabilités (1889) p. 2, und bei H. Poincaré, Calcul des Probabilités (1896) p. 3. — Wir benützen diese Gelegenheit, um unsern eigenen Fehlschluß in unserm Bericht über „Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen" (1899), Jahresber. d. Deutschen Mathem.-Verein. VII, zu berichtigen.

mit b, so können folgende Permutationen der Kugeln mit Rücksicht auf ihre Entfernung vom Ziel eintreten:

$$a_1 a_2 b, \quad a_1 b a_2, \quad a_2 a_1 b, \quad a_2 b a_1, \quad b a_1 a_2, \quad b a_2 a_1;$$

ist jedesmal die letzte Kugel die nächste am Ziel, so sind unter diesen sechs gleichmöglichen Fällen vier der Person A günstig; für sie beträgt daher die Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen, $\frac{2}{3}$.

Man kann auch folgenden Weg zur Lösung einschlagen. Jede der Kugeln a_1, a_2 kann näher oder weiter fallen als die Kugel b; dies gibt folgende Verbindungen:

1) a_1 weiter als b, a_2 weiter als b;
2) a_1 „ „ b, a_2 näher als b;
3) a_1 näher „ b, a_2 weiter als b;
4) a_1 „ „ b, a_2 näher als b.

Die Verbindungen 2), 3), 4) sind dem A günstig; aber der Schluß, daß seine Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ betrage, wäre falsch. Denn diese Verbindungen stellen nicht gleichmögliche Fälle dar; vielmehr zerfallen 1) und 4) in je zwei Fälle, da im Falle 1) die Reihenfolge der Kugeln $a_1 a_2 b$ oder $a_2 a_1 b$, im Falle 4) $b a_1 a_2$ oder $b a_2 a_1$ sein kann. Wird dies beachtet, so ergibt sich wieder $p = \frac{2}{3}$.

17. Beispiel VI. *Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß eine Münze in n Würfen abwechselnd Wappen und Schrift zeigt.*

Die möglichen Fälle sind die 2^n Variationen mit Wiederholung der Elemente W, S.

Unter diesen Variationen gibt es nur zwei, nämlich $WSWS\cdots$ und $SWSW\cdots$, welche dem erwarteten Ereignis günstig sind; seine Wahrscheinlichkeit ist daher $p = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Wäre festgesetzt worden, daß Wappen an erster Stelle erscheinen solle, so gäbe es nur eine günstige Verbindung, die Wahrscheinlichkeit wäre die Hälfte der vorigen.

Überhaupt ist $\frac{1}{2^n}$ die Wahrscheinlichkeit für *irgend* eine *bestimmte* Anordnung von Wappen und Schrift. Es hat also die durch ihre Gesetzmäßigkeit auffallende Anordnung $WSWS\cdots$ keine geringere Wahrscheinlichkeit als irgend eine andere unregelmäßige, aber im voraus festgesetzte Reihenfolge der Münzseiten. Wenn hiernach das Eintreffen $WSWS\cdots$ als ein *außergewöhnliches* Ereignis bezeichnet wird, so ist diese Bezeichnung insofern unzutreffend, als sie mit dem gleichen Rechte *jeder* andern Anordnung gebührte, wenn diese im

voraus bezeichnet worden wäre. Anders verhält es sich, wenn man das angeführte regelmäßige Ereignis gegenüberhält der übergroßen Anzahl derjenigen, welche keine in die Augen springende Regelmäßigkeit aufweisen. Wenn jemand aus einer Urne, die auf neun gleichen Kärtchen die Buchstaben *b, e, i, l, l, n, o, r, u* enthält, diese Kärtchen successive herausziehend sie in der Ordnung *bernoulli* erhielte, so würde er dies mit Rücksicht darauf, daß die Buchstaben in dieser Aufeinanderfolge einen ihm geläufigen Namen darstellen, als ein ungewöhnliches Ereignis bezeichnen; einem andern, dem dieser Name völlig fremd ist, wird nur mehr die Lesbarbeit der Permutation auffallen, und sie wird ihm von diesem Gesichtspunkte nicht ungewöhnlicher erscheinen als etwa *rubellion* oder *bulinerol*; an sich aber stehen diese Anordnungen auf ganz gleicher Stufe mit jeder andern, wie etwa *lnirolbeu*: jede ist unter den 181 440 verschiedenen Permutationen einzig in ihrer Art und hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{181\,440}$.

18. Beispiel VII. *Eine Urne enthält a weiße und b schwarze Kugeln; man nimmt r* ($\leq a$) *Kugeln auf einmal oder nach einander, ohne die gezogenen zurückzulegen, heraus; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie weiß seien?*

Die möglichen Fälle werden durch die Kombinationen ohne Wiederholung der $a+b$ Kugeln zur r-ten Klasse gebildet, ihre Anzahl ist also $\binom{a+b}{r} = \frac{(a+b)!}{r!\,(a+b-r)!}$.

Günstige Fälle stellen die gleichartigen Kombinationen der a weißen Kugeln vor, deren Anzahl $\binom{a}{r} = \frac{a!}{r!\,(a-r)!}$ ist.

Die verlangte Wahrscheinlichkeit ist demnach gleich

$$\frac{a^{r|-1}}{(a+b)^{r|-1}}.$$

In dem gewöhnlichen Zahlenlotto sind 9 einziffrige und 81 zweiziffrige Nummern; fünf Nummern werden gezogen; die Wahrscheinlichkeit, daß das Ergebnis einer Ziehung aus lauter einziffrigen Nummern bestehe, ist hiernach

$$\frac{9^{5|-1}}{90^{5|-1}} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86} = 0{,}0000029,$$

und die Wahrscheinlichkeit einer Ziehung aus durchwegs zweiziffrigen Nummern:

$$\frac{81^{5|-1}}{90^{5|-1}} = \frac{81\cdot 80\cdot 79\cdot 78\cdot 77}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86} = 0{,}582981.$$

19. Beispiel VIII. *Eine Urne enthält a weiße, b schwarze und c rote Kugeln. Man macht $\alpha + \beta + \gamma$ Ziehungen, legt die gezogene Kugel jedesmal in die Urne zurück und vermengt die Kugeln. Es wird die Wahrscheinlichkeit verlangt,* 1) *daß zuerst α-mal weiß, dann β-mal schwarz und endlich γ-mal rot gezogen werde;* 2) *daß die Farben in denselben Anzahlen und geschlossen, jedoch in was immer für einer Reihenfolge erscheinen;* 3) *daß weiße, schwarze und rote Kugeln in der bezeichneten Anzahl überhaupt erscheinen.*

1) Die möglichen Fälle sind durch die $(a+b+c)^{\alpha+\beta+\gamma}$ Variationen mit Wiederholung sämtlicher Kugeln zur Klasse $\alpha + \beta + \gamma$ dargestellt.

Aus den a^α Variationen der weißen, b^β Variationen der schwarzen und c^γ Variationen der roten Kugeln in der durch die Anzahl bezeichneten Klasse entstehen $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ dem erstgedachten Ereignis günstige Verbindungen; seine Wahrscheinlichkeit ist daher

$$p_1 = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{(a+b+c)^{\alpha+\beta+\gamma}}.$$

2) Unter der gleichen Anzahl möglicher Fälle gibt es

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma + a^\alpha c^\gamma b^\beta + b^\beta a^\alpha c^\gamma + b^\beta c^\gamma a^\alpha + c^\gamma a^\alpha b^\beta + c^\gamma b^\beta a^\alpha = 6 a^\alpha b^\beta c^\gamma$$

günstige Fälle; die sechs Produkte entsprechen den sechs möglichen Anordnungen der drei Farben; mithin ist

$$p_2 = \frac{6 a^\alpha b^\beta c^\gamma}{(a+b+c)^{\alpha+\beta+\gamma}} = 6 p_1.$$

3) Aus jeder der $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ Verbindungen von α weißen, β schwarzen und γ roten Kugeln lassen sich $\frac{(\alpha+\beta+\gamma)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$ verschiedene Permutationen bilden; folglich ist

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} a^\alpha b^\beta c^\gamma$$

die Anzahl aller Anordnungen, in welchen α weiße, β schwarze und γ rote Kugeln in irgend welcher Reihenfolge erscheinen können, und somit, da die Anzahl der möglichen Fälle dieselbe ist wie in den vorhergehenden Aufgaben, ist

$$p_3 = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} \cdot \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{(a+b+c)^{\alpha+\beta+\gamma}}.$$

Beispielsweise ist für $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ und $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$

$$p_1 = 0{,}00217, \quad p_2 = 0{,}01300, \quad p_3 = 0{,}1302.$$

20. Beispiel IX. *Aus einer Urne, welche n gleiche Kugeln enthält, wird ein Teil oder werden alle gezogen. Es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß eine gerade Anzahl von Kugeln herauskommt.*

Da *eine* Kugel auf so viele Arten gezogen werden kann, als es Kugeln gibt, *zwei* Kugeln auf so viele Arten, als die n Kugeln Kombinationen zur zweiten Klasse ohne Wiederholung bilden u. s. w., so ist die Anzahl der möglichen Fälle

$$m = n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n};$$

günstig sind darunter die Kombinationen zu einer geraden Anzahl, deshalb ist

$$g = \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots$$

die Anzahl der günstigen Fälle. Nun ist aber

$$(1+1)^n = 1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n}$$

$$(1-1)^n = 1 - n + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n};$$

aus der ersten Gleichung ergibt sich

$$m = 2^n - 1 \tag{1}$$

und durch Addition beider

$$g = 2^{n-1} - 1. \tag{2}$$

Mithin ist die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Anzahl von Kugeln zu ziehen,

$$p = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}; \tag{3}$$

für eine ungerade Anzahl:

$$q = 1 - p = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}. \tag{4}$$

Es ist also, bei jedem n, $p < q$. Dieses auf den ersten Blick befremdliche Resultat, daß die ungeraden Anzahlen den geraden gegenüber bevorzugt sind, wird sofort klar, wenn man zur unteren Grenze herabgeht; enthält die Urne nur eine Kugel, so kann nur eine ungerade Anzahl gezogen werden, es ist $p = 0$, $q = 1$; bei zwei Kugeln bestehen zwei Möglichkeiten für das Ziehen einer ungeraden Anzahl (einer Kugel) und nur eine für das Ziehen einer geraden Anzahl, es wird $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$. Dieses Überwiegen des q über das p besteht fort, und erst für $n = \infty$ wird $p = q = \frac{1}{2}$.

Oben wurde vorausgesetzt, daß die Anzahl n der Kugeln bekannt sei; wüßte man bloß, daß sie n nicht übertreffen und jeden Wert von

1 bis n (mit Einschluß dieser Grenze) gleich leicht haben könne, so hätte man mit Rücksicht auf (1) und (2)

$$m = \sum_1^n (2^x - 1) = \sum_1^n 2^x - n = 2^{n+1} - n - 2$$

$$g = \sum_1^n (2^{x-1} - 1) = 2^n - n - 1;$$

demzufolge wäre dann

$$p = \frac{2^n - n - 1}{2^{n+1} - n - 2} \tag{5}$$

$$q = \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - n - 2}, \tag{6}$$

also wieder $p < q$.

21. Beispiel X. *Aus einer Urne mit n weißen und n schwarzen Kugeln wird irgend eine gerade Anzahl von Kugeln gezogen; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß gleich viel weiße und schwarze darunter sind?*

Es werden, den Bedingungen der Aufgabe gemäß, entweder 2 oder 4 oder $\cdots$ oder $2n$ Kugeln gezogen; das erste kann auf so viele Arten geschehen, als sich aus den $2n$ Kugeln Kombinationen ohne Wiederholung zur zweiten Klasse bilden lassen; das zweite auf so viele Arten, als es derlei Kombinationen zur vierten Klasse gibt u. s. f.; demnach ist

$$m = \binom{2n}{2} + \binom{2n}{4} + \cdots + \binom{2n}{2n}$$

die Anzahl der möglichen Fälle.

Ein günstiger Fall entsteht, so oft eine der weißen mit einer der schwarzen Kugeln sich verbindet, was auf n^2 Arten geschehen kann; ebenso, so oft eine Verbindung von zwei weißen Kugeln mit einer Verbindung von zwei schwarzen Kugeln sich vereinigt, was auf $\binom{n}{2}^2$ Arten eintreten kann u. s. f.; die Anzahl der günstigen Fälle ist also

$$g = n^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{3}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2.$$

Der Ausdruck für m entsteht aus dem Ausdruck für g im vorigen Beispiel, wenn man hier n durch $2n$ ersetzt; demzufolge ist

$$m = 2^{2n-1} - 1.$$

Um für g einen einfacheren Ausdruck zu gewinnen, beachte man, daß bei der Multiplikation der Entwicklungen von $(1 + t)^n$ und

$\left(1+\frac{1}{t}\right)^n$ die von t freien Glieder $1+n^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2$, also $g+1$ ergeben; diese Glieder entstehen auch dadurch, daß man $(1+t)^n\left(1+\frac{1}{t}\right)^n$ auf die Gestalt

$$\frac{(1+t)^{2n}}{t^n}$$

bringt, den Zähler entwickelt und dasjenige Glied desselben, welches mit t^n behaftet ist, durch t^n dividiert; das Resultat dieser Division ist aber der Koeffizient $\binom{2n}{n}$; folglich ist

$$g+1=\binom{2n}{n}, \quad \text{woraus } g=\frac{(2n)!}{(n!)^2}-1.$$

Die verlangte Wahrscheinlichkeit ist also

$$p=\frac{\frac{(2n)!}{(n!)^2}-1}{2^{2n-1}-1}. \tag{1}$$

Für kleine Werte von n bereitet die Ausrechnung von p keine Schwierigkeit; so ist

$$\begin{array}{llll} \text{für } n=1 & p=1 & & \\ \text{,, } \text{,, } =2 & \text{,, } =\frac{5}{7} & =0{,}7142\cdots & \\ \text{,, } \text{,, } =3 & \text{,, } =\frac{19}{31} & =0{,}6129\cdots & \\ \text{,, } \text{,, } =4 & \text{,, } =\frac{69}{127} & =0{,}5433\cdots; & \end{array}$$

für große Werte von n scheitert aber die Ausführung der Formel an den darin vorkommenden Fakultäten. Hier nun kommt die Stirlingsche Formel zur Geltung; nimmt man für $(2n)!$ den Näherungswert $(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4n\pi}$, für $n!$ entsprechend $n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi}$ und läßt im Zähler und Nenner die subtraktive Einheit neben der andern großen Zahl weg, so ergibt sich für p der Näherungswert

$$\frac{2}{\sqrt{\pi n}}; \tag{2}$$

selbst für $n=4$ gibt dieser $0{,}5641\cdots$ in naher Übereinstimmung mit dem strengen Werte.

Mit wachsendem n nähert sich p der Grenze 0.

22. Beispiel XI. *Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, mit einem Würfel in n Würfen mindestens einmal die Seite 6 zu werfen.*

Das bezeichnete Ereignis ist der Gegensatz davon, in n Würfen immer nur eine der Seiten 1, 2, $\cdots$, 5 zu treffen; wird die Wahrscheinlichkeit dieses letzteren Ereignisses mit q bezeichnet, so ist die des erstgenannten $p = 1 - q$.

Nun können die sechs Würfelseiten in n Würfen sich auf 6^n Arten mit einander verbinden — dies die möglichen Fälle —, während die Seiten 1 bis 5 sich auf 5^n Arten vereinigen können — dies die günstigen Fälle des zweiten Ereignisses —; folglich ist $q = \frac{5^n}{6^n}$ und

$$p = 1 - \frac{5^n}{6^n}. \tag{1}$$

Ist p gegeben, so läßt sich aus dieser Gleichung die Anzahl der Würfe berechnen, innerhalb deren mit eben dieser Wahrscheinlichkeit das zum mindesten einmalige Eintreffen von 6 zu erwarten ist; man findet

$$n = \frac{\log(1-p)}{\log 5 - \log 6}, \tag{2}$$

die Logarithmen aus einem beliebigen System genommen; insbesondere ist für $p = \frac{1}{2}$:

$$n = \frac{\log 2}{\log 6 - \log 5} = 3{,}8\cdots,$$

so daß man *mit Vorteil* Eins gegen Eins wetten darf, daß in vier Würfen die Seite 6 wenigstens einmal fallen werde.

23. Beispiel XII. *Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, mit zwei Würfeln in n Würfen mindestens einmal den Pasch von 6 zu werfen.*

Unter den 36 möglichen Verbindungen der Würfelseiten, welche in *einem* Wurf eintreten können, gibt es deren 35, welche das erwartete Ereignis *nicht* herbeiführen; demnach gibt es in n Würfen 36^n mögliche und 35^n ungünstige Fälle, so daß die Wahrscheinlichkeit, es werde Pasch 6 nicht erscheinen, $\frac{35^n}{36^n}$ ausmacht. Die Wahrscheinlichkeit, es werde dieses Ereignis überhaupt, also mindestens einmal sich zutragen, ist daher

$$p = 1 - \frac{35^n}{36^n}. \tag{1}$$

In

$$n = \frac{\log(1-p)}{\log 35 - \log 36} \tag{2}$$

Würfen darf man also mit der Wahrscheinlichkeit p erwarten, daß wenigstens einmal beide Würfel 6 zeigen; da für $p = \frac{1}{2}$

$$n = \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35} = 24{,}6\cdots,$$

so darf erst bei 25 Würfen mit Vorteil Eins gegen Eins darauf gewettet werden; bei 24 Würfen wäre eine solche Wette unvorteilhaft.

Die beiden letzten Aufgaben dürfen ein historisches Interesse beanspruchen, weil sie zu den ältesten gehören, die zu mathematischen Untersuchungen über Fragen der Wahrscheinlichkeit Anlaß gaben. Ein Freund der Glücksspiele, namens Chevalier de Meré, der, obwohl kein Mathematiker von Fach, es doch verstand, anregende Fragen auf diesem Gebiete aufzuwerfen, sprach (1654) Pascal gegenüber sein Erstaunen darüber aus, daß man bei einem Würfel auf 6 in vier Würfen mit Vorteil, bei zwei Würfeln aber auf Pasch 6 in 24 Würfen nicht mit Vorteil wetten könne, vermeinend, die Zahl der nötigen Würfe sollte der Anzahl der bei einem Wurfe möglichen Fälle proportional sein; da nun bei einem Würfel 6, bei zwei Würfeln 36 Fälle stattfinden, so ist es die Zahl 24, welche sich in die Proportion $4:6 = 24:36$ einfügt. Die obige Rechnung zeigt die Unstichhaltigkeit dieser Schlußfolge.

24. Beispiel XIII. *Zwischen zwei Personen A, B soll durch die Wahl entschieden werden; für A seien a, für B seien b Stimmzettel abgegeben und in einer Urne vereinigt worden. Angenommen, es sei $a > b$, so daß A schließlich als der Gewählte erscheinen wird; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er während des Skrutiniums ständig in der Majorität bleibe?*

Die möglichen Fälle werden durch die verschiedenen Permutationen gezählt, in welchen die Zettel aus der Urne hervorgehen können; ihre Anzahl ist also

$$m = \frac{(a+b)!}{a!\,b!}.$$

Ungünstig sind alle Permutationen, in welchen es einmal zur Stimmengleichheit kommt.

Dahin gehören zunächst alle Permutationen, welche mit einem auf B lautenden Zettel beginnen; ihre Anzahl ergibt sich, wenn man nach Wegnahme eines Zettels mit dem Namen B alle übrigen permutiert, ist also

$$\frac{(a+b-1)!}{a!\,(b-1)!}.$$

Aus jeder Permutation, welche mit A beginnt und einmal zur Stimmengleichheit führt, läßt sich auf eindeutige Weise eine mit B anhebende Permutation, aber auch umgekehrt aus jeder Permutation der letzteren Art eine solche gewinnen, die mit A anfängt und zur Stimmengleichheit führt.

Es sei z. B. $a = 5$, $b = 3$; die Permutation

$$AABBAABA$$

beginnt mit A und erreicht nach vier Zetteln Stimmengleichheit; löst

man diese vier Stimmen $AABB$, die notwendig mit B aufhören, ab, setzt sie mit Weglassung dieses letzten B an das Ende, während man das ausgeschiedene B an den Anfang stellt, so erhält man in

$$BAABAAAB$$

eine mit B beginnende Permutation. Geht man hingegen von einer mit B beginnenden Permutation, wie etwa

$$BABAAAAB$$

aus, zählt von rückwärts so weit, bis A eine Stimme mehr als B hat, was notwendig einmal eintreten und mit einer auf A lautenden Stimme schließen muß, löst die Gruppe — hier AAB — ab und setzt sie an den Anfang, so ergibt sich eine mit A anfangende Permutation, in der einmal Stimmengleichheit eintritt, hier die Permutation

$$AABBABAA.$$

Mithin bestehen die ungünstigen Fälle aus zwei Gruppen von dem Umfange

$$\frac{(a+b-1)!}{a!\,(b-1)!};$$

die der gesuchten entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit ist daher

$$q = 2\,\frac{(a+b-1)!}{a!\,(b-1)!} : \frac{(a+b)!}{a!\,b!} = \frac{2b}{a+b},$$

mithin die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$p = 1 - q = \frac{a-b}{a+b};$$

je kleiner also die Majorität im Vergleich zur gesamten Stimmenzahl, desto geringer die Wahrscheinlichkeit, daß sie während des Skrutiniums anhalte[1]).

25. Beispiel XIV. *Eine Urne enthält n mit den Nummern $1, 2, \cdots n$ bezeichnete Kugeln. Man zieht diese nach und nach einzeln aus der Urne, ohne sie zurückzulegen, und verlangt die Wahrscheinlichkeit, daß keine von r ($\leq n$) ins Auge gefaßten Kugeln in der ihrer Nummer entsprechenden Ziehung erscheine.*

Die Anzahl der möglichen Fälle ist

$$m = n!$$

1) Vgl. hiermit die Darstellung bei D. André, Compt. rend. 105 (1887) p. 436, und bei J. Bertrand, l. c., p. 18.

entsprechend den Permutationen, in welchen die Kugeln aus der Urne hervorgehen können.

Unter den Permutationen von n Elementen gibt es aber $(n-1)!$ solche, in welchen das erste bezeichnete Element i an seiner richtigen Stelle steht; verbleiben daher

$$\varphi_n(1) = n! - (n-1)!$$

Permutationen, wo i nicht an seinem Platze erscheint.

Aus diesen sind diejenigen auszuscheiden, in welchen das zweite bezeichnete Element k an seinem Platze steht; hält man es dort fest, so bilden die $n-1$ übrigen Elemente

$$\varphi_{n-1}(1) = (n-1)! - (n-2)!$$

Permutationen, in welchen i nicht an seinem Platze ist; es verbleiben also

$$\varphi_n(2) = \varphi_n(1) - \varphi_{n-1}(1) = n! - 2(n-1)! + (n-2)!$$

Permutationen, in welchen weder i noch k an seinem Platze ist.

Aus diesen müssen diejenigen Permutationen ausgeschieden werden, in welchen das dritte bezeichnete Element l an der seinem Range entsprechenden Stelle steht; hält man es dort fest, so bilden die $n-1$ übrigen Elemente

$$\varphi_{n-1}(2) = (n-1)! - 2(n-2)! + (n-3)!$$

Permutationen, in welchen weder i noch k seinen Platz einnimmt; es verbleiben also

$$\varphi_n(3) = \varphi_n(2) - \varphi_{n-1}(2) = n! - 3(n-1)! + 3(n-2)! - (n-3)!$$

Permutationen, in welchen keines der drei Elemente i, k, l an seinem Platze steht.

Diese Induktion zeigt, daß es

$$\varphi_n(r) = n! - \binom{r}{1}(n-1)! + \binom{r}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^r \binom{r}{r}(n-r)! \quad (1)$$

Permutationen gibt, in welchen keines von den r bezeichneten Elementen den ihm gebührenden Platz einnimmt.

Mithin ist die verlangte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{\varphi_n(r)}{m} = 1 - \binom{r}{1}\frac{1}{n} + \binom{r}{2}\frac{1}{n(n-1)} - \cdots + (-1)^r \binom{r}{r}\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-r+1)}. \quad (2)$$

Von besonderem Interesse ist die Wahrscheinlichkeit p, daß *überhaupt keine* der Kugeln ihrem Range entsprechend erscheint; sie ergibt sich aus (2), wenn $r = n$ gesetzt wird, und ist daher

$$p = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n}. \tag{3}$$

Daraus folgt als Wahrscheinlichkeit, daß *mindestens eine* Kugel ihrer Nummer entsprechend gezogen wird:

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n}. \tag{4}$$

Diese Aufgabe liegt einem Glücksspiel zu Grunde, welches unter dem Namen „Jeu du Treize" zum ersten Mal von Montmort[1]) der mathematischen Behandlung zugeführt wurde, an der sich Nicolaus Bernoulli[2]) hervorragend beteiligt hat. Das Spiel besteht in Folgendem: 13 mit den Nummern 1 bis 13 beschriebene Karten werden aus einer Urne, in der sie vorher durcheinander geworfen worden sind, successive herausgezogen; das Spiel gilt als gewonnen, wenn mindestens eine Karte ihrer Nummer entsprechend gezogen wurde; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit hierfür? Dem Wesen nach gleichbedeutend hiermit ist das *Rencontrespiel*: Von zwei Spielern hat jeder ein vollständiges Spiel von 32 Blättern in der Hand; beide legen immer je ein Blatt auf; treffen gleiche Blätter zusammen, so hat sich ein Rencontre ergeben; der eine Spieler wettet auf den Eintritt, der andere auf das Ausbleiben eines Recontres; welches sind ihre Chancen, zu gewinnen?

Dem Problem blieb fortan das mathematische Interesse zugewendet. Euler[3]) bemerkte zuerst die Beziehung, in welcher die Lösung zur Zahl e steht; die Summe (3), welche p darstellt, geht nämlich für $n = \infty$ in die Reihe über, welche e^{-1} definiert, so daß dann

$$\begin{aligned} p &= e^{-1} &&= 0{,}36787944 \cdots \\ q &= 1 - e^{-1} &&= 0{,}63212055 \cdots \end{aligned} \tag{4}$$

ist; wegen der raschen Konvergenz der betreffenden Reihe kommen die Lösungen schon für mäßig große n diesen Werten sehr nahe; so ergibt sich für $n = 13$, also für das „Jeu du Treize"[4]), in strenger Rechnung

$$p = 0{,}367879441 \cdots$$

auf acht Dezimalen übereinstimmend mit e^{-1}. Um so mehr können die Werte (4) für das Rencontre beibehalten werden.

1) P. de Montmort, Essai d'Analyse sur les Jeux de Hasards (1708, 1714) p. 130 ff. 2) Ibid., p. 301—302.

3) Calcul de la probabilité dans le Jeu de Rencontre. Hist. Acad. Berlin pour 1751.

4) In der englischen Litteratur „game of Treize".

Unabhängig von andern scheint Lambert[1]) auf ein ähnliches Problem gekommen zu sein, das so lautet: Jemand hat n Briefe und die zugehörigen Couverts geschrieben; er steckt die Briefe ohne Wahl in die Couverts; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß alle Briefe oder eine bezeichnete Anzahl derselben in die richtigen Couverts kommen?

Lampe[2]) hat eine von Dirichlet und Kummer stammende Fassung der Aufgabe und eine Ableitung der oben mit $\varphi_n(n)$ bezeichneten Zahl mitgeteilt. Die Aufgabe ist so gestellt: Gegeben sind n Elemente auf n Plätzen; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer neuen willkürlichen Verteilung der n Elemente auf dieselben n Plätze kein Element seinen früheren Platz wieder erhalte?

Catalan[3]) hat das Problem in folgender Modifikation behandelt: Eine Urne enthält n mit den Buchstaben $a, b, c, \cdots$ markierte Kugeln; man zieht die Kugeln successive einzeln heraus und legt sie dann wieder in die leere Urne zurück. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in zwei aufeinander folgenden Ziehungen m Kugeln an gleicher Stelle erscheinen?

Da die erste wie die zweite Folge der Buchstaben $n!$ verschiedene Anordnungen haben kann, so gibt es für zwei Ziehungen $n!^2$ mögliche Fälle.

Jede der $n!$ Anordnungen der ersten Ziehung kann mit der zweiten Ziehung auf $\binom{n}{m}$ verschiedene Arten Rencontres von m Buchstaben ergeben, und da jedesmal die $n - m$ übrigen Buchstaben kein Rencontre aufweisen dürfen, was wieder auf $\varphi_{n-m}(n - m)$ Arten geschehen kann, so gibt es der günstigen Fälle

$$n!\binom{n}{m}\varphi_{m-n}(m-n) = \frac{n!^2}{m!\,(n-m)!}\left((n-m)! - \binom{n-m}{1}(n-m-1)! + \binom{n-m}{2}(n-m-2)! - \cdots + (-1)^{n-m}\right);$$

folglich ist die verlangte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdots m}\left(1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-m}}{1\cdot 2\cdots(n-m)}\right).$$

Laplace[4]) hat das dem Rencontrespiel zu Grunde liegende Problem in verallgemeinerter Form behandelt.

1) Examen d'une espèce de superstition ramenée au calcul des probabilités. Nouv. Mém. Berlin 1798.

2) Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Grunert, Arch. 70 (1884).

3) Solution d'un problème de probabilité, relatif au Jeu de Rencontre. Journ. Liouv. 2 (1837). 4) Théorie anal. d. prob., Art. 9.

26. Beispiel XV. *Eine Lotterie besteht aus n Nummern; in jeder Ziehung werden r Nummern gezogen. Jemand hat auf s* ($\leq r$) *Nummern gesetzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, a) daß die Nummern an beliebiger Stelle und in beliebiger Ordnung; b) an beliebiger Stelle, aber in gegebener Ordnung; c) an erster Stelle in beliebiger Ordnung; d) an erster Stelle in gegebener Ordnung erscheinen?*

a) Die möglichen Fälle sind durch die Kombinationen o. W. der n Nummern zu je r dargestellt, ihre Anzahl ist also:

$$m_1 = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

Scheidet man die s besetzten Nummern aus, bildet aus den $n-s$ übrigen Kombinationen zu je $r-s$ Nummern, fügt zu jeder die besetzten Nummern hinzu, so ergeben sich die günstigen Fälle, deren Anzahl somit

$$g_1 = \binom{n-s}{r-s} = \frac{(n-s)!}{(r-s)!\,(n-r)!}$$

ist.

Die Wahrscheinlichkeit ist hiernach

$$p_1 = \frac{(n-s)!\,r!}{n!\,(r-s)!} = \frac{r\,(r-1)\cdots(r-s+1)}{n\,(n-1)\cdots(n-s+1)}. \tag{1}$$

Bei $n = 90$ und $r = 5$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\text{für } s &= 1 & p_1 &= \frac{1}{18} \\
\text{„ „} &= 2 & \text{„} &= \frac{1}{400{,}5} \\
\text{„ „} &= 3 & \text{„} &= \frac{1}{11748} \\
\text{„ „} &= 4 & \text{„} &= \frac{1}{511038} \\
\text{„ „} &= 5 & \text{„} &= \frac{1}{43949268}.
\end{aligned}$$

b) Permutiert man in jeder der $\binom{n}{r}$ Kombinationen, welche die möglichen Fälle des vorigen Ereignisses gebildet haben, s Nummern, und zwar so, daß in jenen Kombinationen, in welchen die s *besetzten* Nummern vorkommen, gerade diese der Permutation unterworfen werden, so erhält man die möglichen Fälle für die zweite Fragestellung; ihre Anzahl ist sonach

$$m_2 = \binom{n}{r} s!.$$

Die Anzahl der günstigen Fälle ist dieselbe wie vorhin, indem zur Gewinnung dieser Fälle jeder der $\binom{n-s}{r-s}$ Kombinationen der nicht

besetzten Nummern die s besetzten Nummern in der gegebenen Ordnung anzufügen sind. Folglich ist die entsprechende Wahrscheinlichkeit:

$$p_2 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots s} \frac{r(r-1)\cdots(r-s+1)}{n(n-1)\cdots(n-s+1)}; \tag{2}$$

sie ist $s!$ mal kleiner als vorige.

c) Die Wahrscheinlichkeit, daß die s Nummern an erster Stelle in beliebiger Ordnung erscheinen, ist dieselbe, welche sich ergeben würde, wenn die Ziehungen nur aus s Nummern bestünden und s bezeichnete Nummern in beliebiger Ordnung erscheinen sollten; sie geht also aus p_1 durch die Substitution $r = s$ hervor und ist

$$p_3 = \frac{s(s-1)\cdots 1}{n(n-1)\cdots(n-s+1)}. \tag{3}$$

d) Ist auch noch die Ordnung bezeichnet, so stellt sich dasselbe Verhältnis wie zwischen p_2 und p_1 ein, so daß also in dem vierten Falle die Wahrscheinlichkeit

$$p_4 = \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-s+1)} \tag{4}$$

gilt.

Für $n = 90$ und

$s = 1$ ist $p_4 = \frac{1}{90}$

„ $= 2$ „ „ $= \frac{1}{8010}$

„ $= 3$ „ „ $= \frac{1}{704880}$

„ $= 4$ „ „ $= \frac{1}{61324560}$

„ $= 5$ „ „ $= \frac{1}{5273912160}$.

§ 3. Indirekte Methoden der Wahrscheinlichkeitsbestimmung.

27. Vorbemerkung. Im Laufe der Zeit sind mannigfache Methoden zur Lösung von Wahrscheinlichkeitsproblemen ausgebildet worden, welche die Zählung der möglichen und günstigen Fälle, bei komplizierteren Aufgaben ein beschwerliches und umständliches Geschäft, zu umgehen gestatten. Es sind einige wenige, aus der Wahrscheinlichkeitsdefinition hervorgehende Sätze, die bei diesen indirekten Methoden beständig zur Anwendung kommen; so einfach diese Sätze sind, so erfordert doch ihre richtige Anwendung scharfes Urteilen. Die Voraussetzungen, unter welchen die Ableitung der Sätze erfolgt, müssen dabei beständig im Auge behalten werden.

28. Vollständige Wahrscheinlichkeit. Die einem Ereignis E günstigen Fälle, g an Zahl, mögen sich von irgend einem Gesichtspunkte aus in Gruppen von $g_1, g_2, \cdots g_r$ Fällen sondern lassen derart, daß jeder der g Fälle einer und nur einer dieser Gruppen angehört; dann ist

$$g = g_1 + g_2 + \cdots + g_r.$$

Die Verwirklichung eines Falles aus der ersten Gruppe werde als Ereignis E_1, die Verwirklichung eines Falles aus der zweiten Gruppe als Ereignis E_2 bezeichnet u. s. w. Dann sind $E_1, E_2, \cdots E_r$ Spezialfälle, Arten oder Modalitäten des Ereignisses E. Dieses Ereignis gilt als eingetroffen, entweder wenn E_1 *oder* $E_2 \cdots$ *oder* E_r eingetroffen ist, wobei wohl darauf zu achten ist, daß es jedesmal nur auf *eine* dieser Arten in Erscheinung treten kann.

Ist m die Anzahl der möglichen Fälle, so ist die Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses E bestimmt durch:

$$p = \frac{g}{m} = \frac{g_1}{m} + \frac{g_2}{m} + \cdots + \frac{g_r}{m};$$

$\frac{g_1}{m} = p_1$ ist aber die Wahrscheinlichkeit von E_1, $\frac{g_2}{m} = p_2$ die Wahrscheinlichkeit von E_2 u. s. f.; demnach ist

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_r. \tag{1}$$

Dies gibt den Satz: *Wenn ein Ereignis auf mehrere einander ausschließende Arten eintreffen kann, so ist seine Wahrscheinlichkeit gleich der Summe der den einzelnen Arten des Eintreffens zukommenden Wahrscheinlichkeiten.*

Die Wahrscheinlichkeit p wird im Gegensatze zu den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \cdots p_r$ die *vollständige Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses E genannt.

Seine einfachste Verdeutlichung findet der Satz in dem folgenden Beispiel. Eine Urne enthalte neben a weißen Kugeln b rote, c blaue und d gelbe Kugeln. Besteht das erwartete Ereignis in dem Erscheinen einer *farbigen* Kugel bei Ausführung eines Zuges, so kann es auf drei verschiedene einander ausschließende Arten zustande kommen, entweder indem eine rote oder eine blaue oder eine gelbe Kugel gezogen wird; diese Arten haben der Reihe nach die Wahrscheinlichkeit $\frac{b}{m}, \frac{c}{m}, \frac{d}{m}$, wenn $m = a + b + c + d$ gesetzt wird; das Erscheinen einer farbigen Kugel überhaupt besitzt aber die Wahrscheinlichkeit $\frac{b+c+d}{m}$, und diese ist die Summe jener Einzel- oder Partialwahrscheinlichkeiten.

29. Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit. Ein Ereignis E gelte dann als eingetroffen, wenn sowohl das Ereignis E_1 als auch

das Ereignis $E_2 \cdots$, als auch das Ereignis E_r eingetreten ist, mit andern Worten: es bestehe in dem Zusammentreffen der Ereignisse $E_1, E_2, \cdots E_r$.

Von den $m_1, m_2, \cdots m_r$ möglichen Fällen, welche diesen Ereignissen zu Grunde liegen, muß je einer eintreten, und da sich jeder Fall der ersten Gruppe mit jedem der zweiten Gruppe verbinden, jede dieser Verbindungen mit jedem Falle der dritten Gruppe sich vereinigen kann u. s. w., so gibt es

$$m = m_1 m_2 \cdots m_r$$

Verbindungen, die in Bezug auf das Ereignis E als mögliche, insbesondere auch als gleichmögliche Fälle aufzufassen sind, wenn die m_1 und die $m_2 \cdots$ und m_r Fälle unter einander gleichberechtigt waren.

Ein dem Ereignis E günstiger Fall ergibt sich nur dann, wenn je ein günstiger Fall jedes der Ereignisse $E_1, E_2, \cdots E_r$ eintrifft, und das kann auf

$$g = g_1 g_2 \cdots g_r$$

Arten geschehen, wenn dem E_1 g_1 günstige Fälle, dem E_2 g_2 günstige Fälle u. s. w. zukommen. Hiernach ist die Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses E bestimmt durch:

$$p = \frac{g}{m} = \frac{g_1}{m_1}\frac{g_2}{m_2} \cdots \frac{g_r}{m_r};$$

nun ist aber $\frac{g_1}{m_1} = p_1$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_1 an sich, $\frac{g_2}{m_2} = p_2$ die Wahrscheinlichkeit von E_2 u. s. w., demnach

$$p = p_1 p_2 \cdots p_r. \tag{2}$$

Bei der vorstehenden Betrachtung wurde *Unabhängigkeit* der Ereignisse $E_1, E_2, \cdots E_r$ in dem Sinne vorausgesetzt, daß die Wahrscheinlichkeit eines derselben nicht abhängt davon, ob die andern eingetroffen sind oder nicht. Die Gleichung (2) gibt hiernach den Satz: *Die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen mehrerer von einander unabhängiger Ereignisse ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse.*

Die Wahrscheinlichkeit p wird im Gegensatze zu den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \cdots p_r$ eine *zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit* genannt. Auch das Ereignis E wird als ein aus den *einfachen* Ereignissen $E_1, E_2, \cdots E_r$ zusammengesetztes Ereignis bezeichnet.

Ob das Zusammentreffen ein gleichzeitiges oder ein successives ist, bleibt für die Erwartungsbildung und daher auch für die Wahrscheinlichkeitsbestimmung gleichgiltig; im Falle des folgeweisen Eintreffens der einfachen Ereignisse ist auch ihre Ordnung ohne Belang; hierin

liegt das wahrscheinlichkeitstheoretische Äquivalent für das kommutative Multiplikationsgesetz.

Wenn die Ereignisse $E_2, E_3, \cdots E_r$ mit dem ersten, E_1, übereinstimmen, so besteht das Ereignis E entweder in dem Zusammentreffen von r gleichwahrscheinlichen oder in der r-maligen Wiederholung eines und desselben Ereignisses, und seine Wahrscheinlichkeit ist zufolge (2):

$$p = p_1^r. \tag{3}$$

Es ist also die Wahrscheinlichkeit der r-maligen Wiederholung eines und desselben Ereignisses gleich der r-ten Potenz seiner Wahrscheinlichkeit.

Es gibt aber noch einen andern Modus des Zusammentreffens mehrerer Ereignisse, der zwar zu derselben mathematischen Formel (2) führt, jedoch mit der Maßgabe, daß den einfachen Wahrscheinlichkeiten eine veränderte Deutung gegeben werden muß. Das Ereignis E bestehe wieder in dem Zusammentreffen der Ereignisse $E_1, E_2, \cdots E_r$, das wir uns zunächst als ein successives in der durch die Buchstaben bezeichneten Ordnung denken wollen; das Eintreffen des ersten Ereignisses E_1 beeinflusse aber das nächste Ereignis in der Weise, daß es die Anzahl der möglichen oder der günstigen Fälle oder beider zugleich gegenüber dem ursprünglichen Bestand verändert, also auch der Wahrscheinlichkeit desselben einen von dem ursprünglichen verschiedenen Wert verleiht. Die früher gemachten Schlüsse über die Kombinierung der möglichen und günstigen Fälle bleiben aufrecht, nur sind die Fälle bei dem zweiten Ereignis so zu zählen, wie sie sich nach dem Eintreffen des ersten stellen. In gleicher Weise möge das Eintreffen der zwei ersten Ereignisse auf das dritte Einfluß nehmen u. s. f. Man bezeichnet dann die Ereignisse $E_1, E_2, \cdots E_r$ als von einander *abhängig* und kann bezüglich ihres Zusammentreffens den Satz aussprechen: *Die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen mehrerer von einander abhängiger Ereignisse ist gleich dem Produkt ihrer Wahrscheinlichkeiten, die Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen Ereignisses unter der Voraussetzung gerechnet, daß die ihm in der Succession vorangehenden eingetroffen seien.*

Zur Erläuterung der beiden Modalitäten zusammengesetzter Ereignisse mögen die folgenden einfachen Bespiele dienen.

Aus jedem von zwei Kartenspielen zu 32 Blättern wird eine Karte gezogen; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man zwei Könige zieht? Die Unabhängigkeit der beiden Ereignisse, die zusammentreffen sollen, ist hier offenkundig: was der Zug aus dem einen Spiele bringen möge, die Wahrscheinlichkeit, aus dem andern einen König zu ziehen, bleibt $\frac{1}{8}$. Die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses ist $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$.

Nun sollen beide Karten aus demselben Spiele nach einander gezogen werden; welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß es zwei Könige seien? Ist das erstgezogene Blatt ein König — und nur unter dieser Voraussetzung kann das bezeichnete Ereignis eintreten —, so gibt es für das zweite Ereignis nur mehr 31 mögliche und darunter nur noch 3 günstige Fälle. Demnach ist jetzt die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses $\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{31} = \frac{3}{248}$.

Dieser Wert gilt indessen auch dann, wenn die Karten statt nach einander auf einmal gezogen werden. Faßt man das Ereignis dann als ein einfaches auf, so hat man, entsprechend den zweiblättrigen Kombinationen, $\frac{32 \cdot 31}{1 \cdot 2}$ mögliche und, entsprechend den zweiblättrigen Kombinationen der Könige, $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}$ günstige Fälle; folglich ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{4 \cdot 3}{32 \cdot 31} = \frac{3}{248}$ wie oben.

30. Beispiel XVI. *Es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, mit zwei Würfeln eine ungerade Summe zu werfen.*

Nach Nr. 13 haben die ungeraden Summen 3, 5, 7, 9, 11, welche als Arten des Eintreffens des bezeichneten Ereignisses aufzufassen sind, die Wahrscheinlichkeiten

$$p_3 = p_{11} = \frac{1}{18}, \quad p_5 = p_9 = \frac{1}{9}, \quad p_7 = \frac{1}{6};$$

daraus ergibt sich die vollständige Wahrscheinlichkeit einer ungeraden Summe

$$p = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

31. Beispiel XVII. *Eine Urne enthält a weiße und b schwarze, eine zweite ihr äußerlich gleiche Urne a' weiße und b' schwarze Kugeln; man zieht aus einer von beiden eine Kugel heraus; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie weiß sei?*

Angenommen, es sei $a = 3$, $b = 4$; $a' = 4$, $b' = 3$. Es könnte hier die Meinung entstehen, daß es sich um zwei einander ausschließende Arten eines Ereignisses und daher um die Berechnung einer vollständigen Wahrscheinlichkeit handle; der Ansatz

$$\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1$$

würde aber diese Meinung sofort als falsch erkennen lassen, da es gewiß nicht notwendig ist, eine weiße Kugel zu ziehen. Es muß vielmehr beachtet werden, daß jede Entstehungsart selbst als zufällig ihre Wahrscheinlichkeit, und zwar $\frac{1}{2}$, hat, weil es ebenso leicht mög-

lich ist, in die erste wie in die zweite Urne zu greifen; richtig ist also die Bestimmung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1}{2}.$$

Allgemein ist $\frac{1}{2}$ die Wahrscheinlichkeit, in die erste Urne zu greifen, und $\frac{a}{a+b}$ die Wahrscheinlichkeit, aus ihr eine weiße Kugel zu ziehen, $\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{a+b}$ die Wahrscheinlichkeit für beides zusammen; ebenso ist $\frac{1}{2} \cdot \frac{a'}{a'+b'}$ die Wahrscheinlichkeit, in die zweite Urne zu greifen und eine weiße Kugel zu ziehen; die vollständige Wahrscheinlichkeit des erwarteten Ereignisses ist also

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{a'}{a'+b'}\right). \tag{1}$$

Man könnte auch auf den Gedanken kommen, den Inhalt beider Urnen in einer zu vereinigen und aus dieser zu ziehen. Dieser Vorgang führt aber nur bedingt zu dem richtigen Resultate; während nämlich die Kugeln, so lange sie in zwei Urnen getrennt waren, gleichmögliche Fälle vorstellten, braucht dies nach der Vereinigung nicht mehr zuzutreffen; sind nämlich die Gesamtzahlen $a + b$ und $a' + b'$ ungleich, so ist es nicht mehr gleich leicht, eine aus der ersten Urne stammende oder eine solche aus der zweiten Urne zu ergreifen. Ist aber $a + b = a' + b'$, dann hat der Ausdruck (1) gleichen Wert mit dem Ausdruck

$$\frac{a+b'}{a+b+a'+b'}, \tag{2}$$

welcher die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel aus der dritten Urne angibt; beide gehen in

$$\frac{a+a'}{2(a+b)}$$

über.

Aber auch dann werden (1) und (2) einander gleich und der Vorgang zulässig, wenn $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ ist, wenn also das *Mischungsverhältnis* in beiden Urnen dasselbe ist; der gemeinsame Wert von (1) und (2) ist dann

$$\frac{a}{a+b}.$$

Den ersten dieser beiden Fälle kann man, wenn er nicht vorhanden ist, immer herbeiführen. Angenommen, es sei $a + b \neq a' + b'$ und N ein gemeinsames Vielfaches beider Zahlen, so daß

$$N = \lambda(a+b) = \lambda'(a'+b');$$

man substituire den Urnen zwei andere, die eine mit λa weißen und λb schwarzen, die andere mit $\lambda' a'$ weißen und $\lambda' b'$ schwarzen Kugeln; da diese Urnen gleiche Kugelmengen enthalten, so kann man sie zu einer vereinigen, welche somit $\lambda a + \lambda' a'$ weiße und $2N$ Kugeln überhaupt enthält; die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, ist

$$\frac{\lambda a + \lambda' a'}{2N} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{a'}{a'+b'}\right),$$

in Übereinstimmung mit (1).

32. Beispiel XVIII. *In einer Urne liegen drei mit den Nummern 1, 2, 3 markierte Kugeln; man zieht zweimal nach einander eine Kugel heraus, legt jedoch die erstgezogene vor der zweiten Ziehung zurück. Wie groß die Wahrscheinlichkeit, daß die höchste erschienene Nummer 2 sei?*

Zur Lösung dieser Aufgabe bieten sich verschiedene Auffassungen dar.

Man kann sagen: Es darf 3 nicht erscheinen und 1 nicht zweimal. Daß 3 in keinem Zuge erscheint, hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$; daß 1 nicht zweimal erscheint, hat als Gegensatz dazu, daß es zweimal erscheint, die Wahrscheinlichkeit $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$. Es wäre aber unrichtig, zu schließen, das erwartete Ereignis habe die Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{9} \cdot \frac{8}{9} = \frac{32}{81}$, weil die Ereignisse nicht unabhängig von einander sind; denn unter der Voraussetzung, daß 3 nicht erscheint, ist die Wahrscheinlichkeit, daß 1 nicht zweimal erscheint, $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$, weil es sich nur mehr um die Nummern 1 und 2 handeln kann; folglich ist die richtig bestimmte Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$.

Auch die folgende Analyse könnte vorgenommen werden: Daß 2 im ersten Zuge erscheint und 3 im zweiten Zuge nicht erscheint, hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$; daß 3 im ersten Zuge nicht erscheint und 2 im zweiten Zuge herauskommt, hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$. Es wäre aber wieder falsch, die Wahrscheinlichkeit des erwarteten Ereignisses durch die Summe $\frac{2}{9} + \frac{2}{9}$ darzustellen; denn das zweimalige Eintreffen von 2, für welches die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{9}$ besteht, ist bei dieser Schlußweise zweimal in Rechnung gebracht, muß also einmal subtrahiert werden, wodurch sich $\frac{2}{9} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$ wie oben ergibt.

Am durchsichtigsten ist die folgende vollständige Analyse des

Ereignisses; dasselbe kann nämlich auf folgende drei einander ausschließende Arten zustande kommen:

Im ersten Wurfe 2, im zweiten 1; Wahrsch. $= \frac{1}{9}$

" " " 2, " " 2; " $= \frac{1}{9}$

" " " 1, " " 2; " $= \frac{1}{9}$;

daher ist die vollständige Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$.

33. Beispiel XIX. *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine bezeichnete Nummer in einer Ziehung der gewöhnlichen Lotterie zu treffen?*

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Nummer im ersten Zuge erscheint, ist $\frac{1}{90}$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß sie, wenn sie im ersten Zuge nicht erschien, im zweiten kommt, ist $\frac{1}{89}$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß sie im dritten Zuge erscheint, wenn sie in den zwei ersten nicht kam, ist $\frac{1}{88}$.

Für den vierten und fünften Zug ergeben sich unter den analogen Voraussetzungen die Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{87}$ und $\frac{1}{86}$.

Dies sind die fünf verschiedenen und einander ausschließenden Arten des Erscheinens der bezeichneten Nummer; es wäre aber falsch, zu schließen, die Wahrscheinlichkeit für ihr Erscheinen überhaupt sei

$$\frac{1}{90} + \frac{1}{89} + \frac{1}{88} + \frac{1}{87} + \frac{1}{86} = 0{,}05683 \cdots.$$

Denn im zweiten Zuge hat die Nummer die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{89}$ nur dann, *wenn man weiß*, daß sie im ersten Zuge nicht erschienen ist; *vor* der Ziehung ist dies aber blos eine Voraussetzung, deren Wahrscheinlichkeit $\frac{89}{90}$ beträgt. Ebenso hat die Nummer die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{88}$, im dritten Zuge zu erscheinen, nur dann, wenn man weiß, daß sie in den zwei ersten Zügen nicht erschienen ist; vor Beginn der Ziehung ist dies aber nur eine Voraussetzung, der die Wahrscheinlichkeit $\frac{89}{90} \cdot \frac{88}{89}$ zukommt u. s. w. Der richtige Ansatz für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher

$$p = \frac{1}{90} + \frac{89}{90} \cdot \frac{1}{89} + \frac{89}{90} \cdot \frac{88}{89} \cdot \frac{1}{88} + \frac{89}{90} \cdot \frac{88}{89} \cdot \frac{87}{88} \cdot \frac{1}{87} + \frac{89}{90} \cdot \frac{88}{89} \cdot \frac{87}{88} \cdot \frac{86}{87} \cdot \frac{1}{86}$$
$$= \frac{1}{90} + \frac{1}{90} + \frac{1}{90} + \frac{1}{90} + \frac{1}{90} = \frac{1}{18}.$$

Man vergl. hierzu Nr. 26.

34. Beispiel XX. *Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß ein Ereignis von gegebener Wahrscheinlichkeit p sich in n Realisierungen der allgemeinen Bedingungen wenigstens einmal, also überhaupt zutrage.*

Das erwartete Ereignis ist der Gegensatz dessen, daß das betreffende Ereignis sich in den n Versuchs- oder Beobachtungsfällen niemals einstellt, wofür $(1-p)^n$ die Wahrscheinlichkeit ist; demnach ist seine Wahrscheinlichkeit:

$$P = 1 - (1-p)^n. \tag{1}$$

Sie wird mit wachsendem n immer größer und nähert sich der Einheit, wie klein auch p, d. h. wie unwahrscheinlich das betreffende Ereignis im einzelnen Falle auch sein mag.

Zu gegebenem P läßt sich die Zahl n der Realisierungen bestimmen, welche nötig sind, damit das Eintreffen des Ereignisses mit der Wahrscheinlichkeit P erwartet werden dürfe; es ist

$$n = \frac{\log(1-P)}{\log(1-p)}. \tag{2}$$

Es liegt in der Natur der Sache, daß $P > p$ sein muß. (Man vergl. hierzu Nr. 22 und 23.)

35. Beispiel XXI. *Eine Lotterie besteht aus n Nummern; r davon werden in jeder Ziehung gezogen. Es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß in i Ziehungen alle Nummern erscheinen.*

Die Zahl i ist von vornherein an die Bedingung $ir \geqq n$ gebunden; je höher sie über ihrer untern Grenze $\frac{n}{r}$ angenommen wird, um so wahrscheinlicher ist das Ereignis, von dem oben die Rede ist. So können in der gewöhnlichen Lotterie die Nummern nicht früher als nach 18 Ziehungen erschöpft sein[1].

[1] Die Wahrscheinlichkeit, daß in 18 Ziehungen alle Nummern daran kommen, oder, was dasselbe ist, daß keine Nummer sich wiederholt, ergibt sich wie folgt. Die Zahl der möglichen Fälle in *einer* Ziehung ist $\binom{90}{5}$, die Zahl der möglichen Fälle in 18 Ziehungen ist daher $\binom{90}{5}^{18}$. Welche von den $\binom{90}{5}$ Kombinationen in der ersten Ziehung auch erscheint, für die zweite Ziehung sind nur mehr 85 Nummern zulässig, aus welchen sich $\binom{85}{5}$ Kombinationen bilden lassen; für die dritte Ziehung bleiben noch 80 Nummern, und es kann eine beliebige der $\binom{80}{5}$ aus ihnen zu bildenden Kombinationen erscheinen. Setzt man diese Berechnung fort, so kommt man zu der Zahl günstiger Fälle:

$$\binom{90}{5}\binom{85}{5}\binom{80}{5}\cdots\binom{5}{5} = \frac{90!}{5!\,85!}\cdot\frac{85!}{5!\,80!}\cdot\frac{80!}{5!\,75!}\cdots\frac{5!}{5!\,0!} = \frac{90!}{5!^{18}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine bestimmte Nummer in einer Ziehung erscheint, ist $\frac{r}{n}$; die Wahrscheinlichkeit, daß sie in i Ziehungen mindestens einmal erscheint, beträgt also nach Nr. 34

$$1 - \left(1 - \frac{r}{n}\right)^i.$$

Dieser Ausdruck gilt für jede Nummer, die man herausgreift. Die Wahrscheinlichkeit, daß jede der n Nummern in den i Ziehungen mindestens einmal erschienen sein werde, beträgt sonach

$$P = \left[1 - \left(\frac{n-r}{n}\right)^i\right]^n. \tag{1}$$

Diese Wahrscheinlichkeit deckt sich aber nicht mit der Wahrscheinlichkeit dafür, daß mit der i-ten Ziehung gerade die letzte der noch fehlenden Nummern erschienen und dadurch das Ereignis, das in Rede steht, vollendet worden ist. Für diese hat Laplace[1]) eine strenge Analyse entwickelt, welche jedoch zeigt, daß zwischen den beiden Wahrscheinlichkeiten, sofern nur $\frac{r}{n}$ ein kleiner Bruch, in jeder Ziehung also nur ein kleiner Teil der Nummern gezogen wird, ein sehr geringer Unterschied besteht.

Rechnet man für $n = 90$, $r = 5$ und $P = \frac{1}{2}$ die Zahl i der Ziehungen aus der Gleichung (1), wofür sich

$$\frac{\log \dfrac{\sqrt[90]{2}}{\sqrt[90]{2} - 1}}{\log 90 - \log 85}$$

ergibt, so erhält man $i = 85{,}20\cdots$; die strenge Rechnung im Sinne der Laplaceschen Auffassung liefert $i = 85{,}53\cdots$. Die numerisch sehr wenig von einander abweichenden Resultate sind praktisch gleichbedeutend; beide besagen, daß es vorteilhaft ist, Eins gegen Eins zu wetten, daß in 86 aufeinander folgenden Ziehungen alle 90 Nummern erschienen sein werden, während die gleiche Wette auf 85 Ziehungen nicht vorteilhaft wäre.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher

$$\frac{90!}{\left[5!\binom{90}{5}\right]^{18}} = \frac{85!^{18}}{90!^{17}};$$

mit Benützung der Stirlingschen Formel findet man als Wert dieses Ausdrucks einen Dezimalbruch, der an der 37. Stelle die erste bedeutsame Ziffer hat, nämlich $0,\overset{36}{0}14897\cdots$

1) Théorie anal. des prob., Art. 4.

36. Beispiel XXII. *Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß eine Lotterieziehung aus lauter einziffrigen, aus vier einziffrigen und einer zweiziffrigen, ··· schließlich aus lauter zweiziffrigen Nummern bestehe.*

Daß im ersten Zuge eine einziffrige Nummer erscheint, hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{90}$; ist dies eingetreten, so hat eine einziffrige Nummer im zweiten Zuge die Wahrscheinlichkeit $\frac{8}{89}$ u. s. w.; die Wahrscheinlichkeit einer aus lauter einziffrigen Nummern zusammengesetzten Ziehung ist daher

$$\frac{9}{90}\cdot\frac{8}{89}\cdot\frac{7}{88}\cdot\frac{6}{87}\cdot\frac{5}{86}, \quad \text{symbolisch } \frac{9^{5/-1}}{90^{5/-1}}.$$

Bei einer Ziehung der zweiten Gattung nehmen wir zuerst an, daß die einziffrigen Nummern vorangehen; ihre Wahrscheinlichkeit hat dann den Ausdruck:

$$\frac{9}{90}\cdot\frac{8}{89}\cdot\frac{7}{88}\cdot\frac{6}{87}\cdot\frac{81}{86};$$

für jede andere Anordnung der ein- und zweiziffrigen Nummern erhält man denselben Wert, so z. B., wenn die zweiziffrige Nummer an erster Stelle erscheinen soll:

$$\frac{81}{90}\cdot\frac{9}{89}\cdot\frac{8}{88}\cdot\frac{7}{87}\cdot\frac{6}{86},$$

was nur der Form nach von dem früheren Ausdruck verschieden ist; da es nun $\frac{5!}{4!} = 5$ verschiedene Anordnungen gibt, so ist die vollständige Wahrscheinlichkeit einer Ziehung mit blos einer zweiziffrigen Nummer:

$$5\,\frac{9^{4/-1}\,81}{90^{5/-1}}.$$

Durch analoge Schlüsse ergeben sich für die vier noch übrigen Gattungen von Ziehungen die Wahrscheinlichkeiten:

$$10\,\frac{9^{3/-1}\,81^{2/-1}}{90^{5/-1}}, \quad 10\,\frac{9^{2/-1}\,81^{3/-1}}{90^{5/-1}}, \quad 5\,\frac{9\cdot 81^{4/-1}}{90^{5/-1}}, \quad \frac{81^{5/-1}}{90^{5/-1}}.$$

Die Ausrechnung liefert für die sechs bezeichneten Gattungen die folgenden Wahrscheinlichkeitswerte:

0,000003
0,000232
0,006193
0,069888
0,340703
0,582981

Summe 1.

Bezüglich der ersten und letzten Gattung vgl. Nr. 18.

37. Beispiel XXIII. *Über zwei entgegengesetzte Ereignisse A, B mit den Wahrscheinlichkeiten p, q $(= 1 - p)$ werden s Versuche oder Beobachtungen angestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich das Ereignis A dabei $m\,(\leq s)$-mal und das Ereignis B $n\,(= s - m)$-mal in was immer für einer Reihenfolge zutragen werde?*

Irgend eine Kombination der Ereignisse A, B, welche s Elemente umfaßt und in welcher A m-mal, B n-mal vorkommt, hat zur Wahrscheinlichkeit ein Produkt von s Faktoren, wovon m gleich p und n gleich q sind, so daß $p^m q^n$ der einfachste Ausdruck dieses Produktes ist.

Kombinationen von dieser Art gibt es aber so viele, als s Elemente, worunter m gleiche einer Art und n gleiche einer andern Art vorkommen, Permutationen ergeben, d. i. $\frac{s!}{m!\,n!}$.

Da jeder solchen Anordnung die Wahrscheinlichkeit $p^m q^n$ zukommt, so ist die totale Wahrscheinlichkeit, daß die Ereignisse A, B in den Anzahlen m, n in was immer für einer Ordnung sich wiederholen werden, dargestellt durch

$$\frac{s!}{m!\,n!}\,p^m q^n. \tag{1}$$

Dieser Ausdruck ist das allgemeine Glied der Entwicklung von $(p + q)^s$, welche lautet:

$$(p+q)^s = p^s + \binom{s}{1} p^{s-1} q + \binom{s}{2} p^{s-2} q^2 + \cdots + \binom{s}{n} p^m q^n + \cdots + q^n$$

oder mit anderer Schreibung der Koeffizienten:

$$\begin{aligned}(p + q)^s = p^s &+ \frac{s!}{(s-1)!\,1!} p^{s-1} q + \frac{s!}{(s-2)!\,2!} p^{s-2} q^2 + \cdots \\ &+ \frac{s!}{m!\,n!} p^m q^n + \cdots + q^n.\end{aligned} \tag{2}$$

Jedes Glied dieser Entwicklung hat sonach eine bestimmte wahrscheinlichkeitstheoretische Bedeutung. So stellt das erste Glied die Wahrscheinlichkeit dar, daß in allen s Versuchen das Ereignis A auftreten werde; das zweite Glied die Wahrscheinlichkeit, daß A sich $\overline{s-1}$-mal wiederholen und B einmal zutragen werde, gleichgiltig ob B an erster, zweiter $\cdots$ oder letzter Stelle erscheint u. s. w.; das letzte Glied gibt die Wahrscheinlichkeit einer beständigen Wiederholung von B.

Weil $p + q = 1$, so ist die Summe sämtlicher Glieder der Entwicklung gleich 1, wodurch die Tatsache ausgedrückt ist, daß von den den Gliedern entsprechenden Ereignisverbindungen nur eine eintreten kann und eine notwendig eintreten muß.

38. Beispiel XXIV. *Zwei Spieler, A und B, brechen ein Spiel in dem Augenblicke ab, wo dem ersten noch m, dem zweiten noch n Partien zum Gewinnen des Spieles fehlen. Wie haben sie sich in den Einsatz*

zu teilen, wenn p, q die bezüglichen Wahrscheinlichkeiten für das Gewinnen einer Partie sind?

Die Teilung hat billigerweise im Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten zu erfolgen, welche die Spieler besitzen, das Spiel zu gewinnen; es kommt daher auf die Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeiten an, die wir mit P, Q bezeichnen wollen.

Die Lösung kann nach verschiedenen Methoden erfolgen.

Man kann von dem Gedanken ausgehen, daß das Spiel sicher zur Entscheidung kommen müßte, wenn es um $m + n - 1$ Partien fortgesetzt würde; denn einer der Spieler gewänne dann sicher die ihm noch fehlenden Partien. Die Entscheidung fiele zu Gunsten des A aus, wenn er alle diese Partien, oder eine weniger oder zwei weniger u. s. w., mindestens aber die ihm fehlenden m Partien gewänne. Setzt man zur Abkürzung $m + n - 1 = r$ und entwickelt $(p + q)^r$, so geben jene Glieder, in welchen der Exponent von p gleich r, $r - 1$, $r - 2$, $\cdots$ m ist, die den angeführten Modalitäten entsprechenden Wahrscheinlichkeiten, und die Summe dieser Glieder ist die vollständige Wahrscheinlichkeit P, daß A gewinnen würde; also ist

$$P = p^r + \binom{r}{1} p^{r-1} q + \binom{r}{2} p^{r-2} q^2 + \cdots + \binom{r}{n-1} p^m q^{n-1}. \qquad (1)$$

Die Summe der übrigen Glieder gibt Q; da jedoch, wie wir voraussetzen, $p + q = 1$ ist, so ist auch $P + Q = 1$, daher $Q = 1 - P$.

Gegen diese Lösung könnte die Bemerkung gemacht werden, daß die Entscheidung des Spieles unter Umständen schon nach einer kleineren Anzahl von Partien fallen könnte als $m + n - 1$.

Die geringste Zahl von Partien, um welche das Spiel fortgesetzt werden müßte, damit A gewinnen könne, ist m, und zwar müßte A alle diese Partien gewinnen, wofür die Wahrscheinlichkeit

$$p^m$$

ist.

Tritt dies nicht ein, so kann A in $m + 1$ Partien gewinnen, wenn nur eine davon, jedoch nicht die letzte, an B fällt; denn sonst hätte A schon mit der m-ten Partie gewonnen gehabt; da somit für B noch m Plätze frei bleiben, so ist die Wahrscheinlichkeit für diesen Modus des Gewinnens

$$m p^m q.$$

Gewinnt A auch in $m + 1$ Partien nicht, so kann er in $m + 2$ Partien gewinnen, wenn dem B nur zwei Partien zufallen, jedoch so, daß er nicht als letzter gewinnt; denn sonst hätte A schon mit $m + 1$ oder gar mit m Partien gewonnen gehabt; da sich nun $m - 1$ Gewinne des A und 2 Gewinne des B auf die $m + 1$ ersten Plätze auf

$\frac{(m+1)!}{(m-1)!\,2!} = \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}$ Arten verteilen können, so hat diese Art des Gewinnens für A die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{m(m+1)}{1\cdot 2} p^m q^2.$$

Durch ähnliche Schlüsse findet man die Wahrscheinlichkeit, daß A in $m+3$ Partien gewinnt, wenn er nicht schon früher gewonnen hat, gleich

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{1\cdot 2\cdot 3} p^m q^3.$$

So fortfahrend kommt man schließlich zu der Anzahl $m+n-1=r$ von Partien; mit diesen *muß* aber A das Spiel gewinnen, wenn es nicht schon früher zu seinen Gunsten beendigt worden ist; da der Fall, daß B die letzte Partie gewinnt, wieder ausgeschlossen ist, und da sich die $m-1$ Partien des A und die $n-1$ Partien des B auf die $r-1$ ersten Plätze in $\frac{(r-1)!}{(m-1)!\,(n-1)!} = \frac{m(m+1)\cdots(r-1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}$ verschiedenen Arten verteilen können, so entspricht diesem Modus des Gewinnens die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{m(m+1)\cdots(r-1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)} p^m q^{n-1}.$$

Die vollständige Wahrscheinlichkeit ist sonach

$$P = p^m\left\{1 + mq + \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}q^2 + \frac{m(m+1)(m+2)}{1\cdot 2\cdot 3}q^3 + \cdots + \frac{m(m+1)\cdots(r-1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}q^{n-1}\right\}. \quad (2)$$

Diser Ausdruck ist aber wegen $p+q=1$ gleichwertig mit dem Ausdruck (1), wie man sich überzeugt, wenn man aus dem letzteren p^m heraushebt, innerhalb der Klammer p durch q ersetzt und nach Potenzen von q ordnet.

Das vorliegende Problem nimmt in der Litteratur unter dem Namen „problème des partis“, „problem of points“ und „Teilungsproblem“ einen hervorragenden Platz ein. Es war eines der ersten, die gestellt und gelöst worden sind. Derselbe Chevalier de Meré, von dem in Nr. 23 die Rede war, hatte es Pascal[1]) vorgelegt, und dieser teilte es Fermat[2]) mit. Beide gaben von verschiedenen Gesichtspunkten ausgehende Lösungen, jedoch der Stellung der Aufgabe entsprechend nur für besondere Werte von m und n und unter der Voraussetzung, daß für beide Spieler das Gewinnen der Partie gleich wahrscheinlich sei. An dieser letzteren Voraussetzung hielten auch

1) Oeuvres de B. Pascal, par Bossut (1779). Der Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat über das Problem fällt in das Jahr 1654.

2) P. Fermat, Varia opera mathematica (1679).

Huygens[1]) und J. Bernoulli fest. Letzterer gab auf dieser Grundlage eine Tafel[2]) der Wahrscheinlichkeiten P für alle Kombinationen, wo dem A 1 bis 9 und dem B 1 bis 7 Partien fehlen; nachstehend ist ein Bruchstück der Tafel mitgeteilt, das sich mechanisch leicht fortsetzen läßt[3]).

		Dem B fehlen Partien			
		1	2	3	4
Dem A fehlen Partien	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$
	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{26}{32}$
	3	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{16}{32}$	$\frac{42}{64}$
	4	$\frac{1}{16}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{22}{64}$	$\frac{64}{128}$
	5	$\frac{1}{32}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{29}{128}$	$\frac{93}{256}$

Erst Moivre[4]) hat die Voraussetzung $p = q = \frac{1}{2}$ aufgegeben. Die allgemeine Lösung ist zuerst von Montmort[5]) in den beiden Formen (1) und (2) veröffentlicht worden. Die erste dieser Formeln beruht auf dem von Fermat angegebenen Gedanken.

Von einem andern Gedanken, der zu einer in späterer Zeit vielfach angewandten Methode der Lösung von Wahrscheinlichkeitsproblemen geführt hat, war Pascal ausgegangen. Man bezeichne die Wahrscheinlichkeit des Gewinnens für A, wenn ihm m Partien und seinem Gegner n Partien fehlen, mit $y_{m,n}$ und denke sich das Spiel noch um eine Partie fortgesetzt; A kann das Spiel gewinnen, wenn er diese Partie und auf der neuen Grundlage das Spiel gewinnt, wofür die Wahrscheinlichkeit $py_{m-1,n}$ ist; er kann es aber auch gewinnen, wenn er diese Partie verliert, das Spiel aber trotzdem auf der neuen

---

1) Ch. Huygens, De Ratiociniis in Ludo Aleae (1657). S. auch J. Bernoulli, Ars conjectandi (1713), pars prima.

2) Ars conjectandi, p. 16 (Ostwalds Klassiker Nr. 107, p. 18).

3) Das Fortschreiten der ersten Kolonne und Zeile ist unmittelbar ersichtlich; jede andere Zahl ist das arithmetische Mittel aus den ihr links und oben benachbarten.

4) Doctrine of chances (1718, 1738, 1756), p. 18.

5) Essai d'Analyse sur les Jeux de Hasards (1714), p. 232—248.

Grundlage gewinnt, wofür die Wahrscheinlichkeit $qx_{m,n-1}$ ist; mithin besteht die Gleichung:

$$y_{mn} = py_{m-1,n} + qy_{m,n-1}. \tag{3}$$

Nun ist

$$y_{11} = p, \quad y_{21} = p^2, \quad y_{31} = p^3, \quad y_{41} = p^4, \cdots$$

weil $y_{0,\alpha} = 1$ und $y_{\beta,0} = 0$ ist, da A sicher gewinnt, wenn ihm keine Partie, und unmöglich gewinnt, wenn dem B keine Partie mehr fehlt; mit Hilfe derselben Bemerkung ergibt sich

$$y_{12} = p + pq, \quad y_{13} = p + pq + pq^2, \quad y_{14} = p + pq + pq^2 + pq^3, \cdots$$

und weiter

$$y_{22} = p^2(1 + 2q), \quad y_{32} = p^3(1 + 3q), \quad y_{42} = p^4(1 + 4q), \cdots$$

$$y_{33} = p^3(1 + 3q + 6q^2), \quad y_{43} = p^4(1 + 4q + 10q^2), \cdots$$

Auf diese Weise kann man zu jedem beliebigen $y_{mn} = P$ fortschreiten.

39. Beispiel XXV. *Über n Paare gleichartiger entgegengesetzter Ereignisse* e_i, f_i, *deren Wahrscheinlichkeiten* p_i, q_i $(p_i + q_i = 1)$ *sind, wird eine Beobachtung oder ein Versuch angestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß genau k von den Ereignissen e, und wie groß die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens k von den Ereignissen e eintreffen?*

Zur Erläuterung des Problems möge das folgende Beispiel dienen, dessen Lösung am Schlusse wird gegeben werden: Es liegen fünf äußerlich gleiche Urnen U_i mit folgendem Inhalte vor:

U_1	enthält	3	weiße,	2	schwarze	Kugeln,
U_2	„	2	„	1	„	Kugel,
U_3	„	4	„	1	„	„
U_4	„	1	„	2	„	Kugeln,
U_5	„	2	„	2	„	„ ;

man zieht aus jeder Urne eine Kugel heraus; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich unter den 5 gezogenen Kugeln genau 3, und daß sich darunter mindestens 3 weiße Kugeln befinden?

Um die erste Wahrscheinlichkeit — sie heiße P_k — zu finden, hätte man auf alle möglichen Arten Produkte von k Faktoren p_i und $n - k$ Faktoren q_i zu bilden und zu summieren; demnach kann P_k symbolisch durch die Formel

$$P_k = \sum p_\alpha p_\beta \cdots p_\varkappa \cdot q_\lambda q_\mu \cdots q_\nu \tag{1}$$

dargestellt werden, wobei sich die Summenbildung auf alle Kombinationen $\alpha, \beta, \cdots \varkappa$ der Elemente $1, 2, \cdots n$ zur k-ten Klasse bezieht; $\lambda, \mu, \cdots \nu$ sind die jeweilen in der Kombination nicht vorhandenen Elemente.

Man kann aber P_k auch durch die p_i allein darstellen, indem man schreibt:

$$P_k = \sum p_\alpha p_\beta \cdots p_k (1 - p_\lambda)(1 - p_\mu) \cdots (1 - p_\nu); \tag{2}$$

entwickelt man das Produkt hinter dem Summenzeichen, so entstehen Produkte der p_i zu je k, je $k + 1$, $\cdots$ bis zu n Faktoren, und bei der darauf folgenden Summierung treten die Summen

$$S_k, \quad S_{k+1}, \cdots S_n$$

derartiger Produkte auf. Die Produkte von k Faktoren kommen nur je einmal vor, ihre Summe S_k erhält daher den Koeffizienten 1; jedes Produkt von mehr als k Faktoren tritt mehrfach auf, weil es auf mehrere Arten entstehen kann; so z. B. entsteht das Produkt $p_1 p_2 \cdots p_k p_{k+1}$ nicht blos bei Entwicklung des Produktes

$$p_1 p_2 \cdots p_k (1 - p_{k+1})(1 - p_{k+2}) \cdots (1 - p_n),$$

sondern auch bei der Entwicklung jedes Produktes, dessen k erste Faktoren eine Kombination der k-ten Klasse aus den Elementen $p_1, p_2, \cdots p_k, p_{k+1}$ bilden; jede der Summen von S_{k+1} aufwärts erhält somit einen von 1 verschiedenen Koeffizienten, so daß in entwickelter Form

$$P_k = S_k + A_1 S_{k+1} + A_2 S_{k+2} + \cdots + A_{n-k} S_n \tag{3}$$

sein wird.

Die Koeffizienten A_1, A_2, $\cdots$ hängen von den p_i nicht ab, bleiben also dieselben, wenn man alle p_i als gleich und gleich p voraussetzt; dann aber verwandelt sich die unentwickelte Summe (2) in

$$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \tag{4}$$

und die entwickelte Summe (3) geht, weil nun

$$S_k = \binom{n}{k} p^k, \quad S_{k+1} = \binom{n}{k+1} p^{k+1}, \cdots S_n = p^n$$

wird, über in

$$\binom{n}{k} p^k + A_1 \binom{n}{k+1} p^{k+1} + A_2 \binom{n}{k+2} p^{k+2} + \cdots + A_{n-k} p^n. \tag{5}$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten gleicher Potenzen von p in (4) und (5) ergeben sich zur Bestimmung der A die Gleichungen:

$$-\binom{n}{k}\binom{n-k}{1} = A_1 \binom{n}{k+1}, \quad \binom{n}{k}\binom{n-k}{2} = A_2 \binom{n}{k-2},$$

$$-\binom{n}{k}\binom{n-k}{3} = A_3 \binom{n}{k+3}, \quad \cdots (-1)^{n-k} \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-k} = A_{n-k};$$

aus diesen berechnet sich

$$A_1 = -\binom{k+1}{1}, \; A_2 = \binom{k+2}{2}, \; A_3 = -\binom{k+3}{3}, \cdots A_{n-k} = (-1)^{n-k} \binom{n}{n-k}.$$

Somit ist schließlich

$$P_k = S_k - \binom{k+1}{1} S_{k+1} + \binom{k+2}{2} S_{k+2} - \cdots + (-1)^{n-k} \binom{n}{n-k} S_n. \quad (6)$$

Entwickelt man den algebraischen Ausdruck

$$\frac{S^k}{(1+S)^{k+1}},$$

in welchem S das Zeichen für eine beliebige Größe vorstellt, so ergibt sich:

$$\frac{S^k}{(1+S)^{k+1}} = S^k (1+S)^{-(k+1)}$$

$$= S^k - \binom{k+1}{1} S^{k+1} + \binom{k+2}{2} S^{k+2} - \cdots + (-1)^{n-k} \binom{n}{n-k} S^n \cdots;$$

daher kann symbolisch

$$P_k = \frac{S^k}{(1+S)^{k+1}} \quad (7)$$

gesetzt werden, wenn man festsetzt, daß die Entwicklung von $(1+S)^{-(k+1)}$ bei dem Gliede mit S^{n-k} abgebrochen und nachher jedes S^ω durch S_ω ersetzt wird.

Die Wahrscheinlichkeit, daß *mindestens* k Ereignisse der Gattung e eintreten, ist die vollständige Wahrscheinlichkeit dafür, daß genau k oder genau $k+1 \cdots$ oder genau n dieser Ereignisse eintreffen; bezeichnet man sie also mit Π_k, so ist

$$\Pi_k = P_k + P_{k+1} + P_{k+2} + \cdots + P_n$$

$$= S_k - \binom{k+1}{1} S_{k+1} + \binom{k+2}{2} S_{k+2} + \cdots + (-1)^{n-k} \binom{n}{n-k} S_n$$

$$+ \binom{k+1}{0} S_{k+1} - \binom{k+2}{1} S_{k+2} + \cdots + (-1)^{n-k-1} \binom{n}{n-k-1} S_n$$

$$+ \binom{k+2}{0} S_{k+2} - \cdots + (-1)^{n-k-2} \binom{n}{n-k-2} S_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \binom{n}{0} S_n;$$

nun hat man aber

$$\binom{k+1}{0} - \binom{k+1}{1} = \binom{k}{0} - \binom{k+1}{1} = \binom{k}{0} - \binom{k}{0} - \binom{k}{1} = -\binom{k}{1}$$

$$\binom{k+2}{0} - \binom{k+2}{1} + \binom{k+2}{2}$$

$$= \binom{k+1}{0} - \binom{k+1}{0} - \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} = \binom{k+1}{2}, \cdots$$

Demzufolge ist endgiltig

$$\Pi_k = S_k - \binom{k}{1} S_{k+1} + \binom{k+1}{2} S_{k+2} - \cdots + (-1)^{n-k} \binom{n-1}{n-k} S_n + \cdots \quad (8)$$

Vergleicht man dies wie oben mit der Entwicklung:

$$\frac{S^k}{(1+S)^k} = S^k(1+S)^{-k}$$
$$= S^k - \binom{k}{1} S^{k+1} + \binom{k+1}{2} S^{k+2} - \cdots + (-1)^{n-k}\binom{n-1}{n-k} S^n + \cdots,$$

so ergibt sich die symbolische Darstellung:

$$\Pi_k = \frac{S^k}{(1+S)^k}. \tag{9}$$

In dem eingangs aufgestellten Urnenbeispiel ist $n = 5$ und $k = 3$,

$$P_3 = \frac{S^3}{(1+S)^4} = S_3 - 4S_4 + 10S_5,$$
$$\Pi_3 = \frac{S^3}{(1+S)^3} = S_3 - 3S_4 + 6S_5;$$

weiter

$$S_3 = p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_2p_5 + p_1p_3p_4 + p_1p_3p_5 + p_1p_4p_5$$
$$+ p_2p_3p_4 + p_2p_3p_5 + p_2p_4p_5 + p_3p_4p_5 = \frac{829}{450},$$
$$S_4 = p_1p_2p_3p_4 + p_1p_2p_3p_5 + p_1p_2p_4p_5 + p_1p_3p_4p_5$$
$$+ p_2p_3p_4p_5 = \frac{226}{450},$$
$$S_5 = p_1p_2p_3p_4p_5 = \frac{24}{450},$$

weil $p_1 = \frac{3}{5}$, $p_2 = \frac{2}{3}$, $p_3 = \frac{4}{5}$, $p_4 = \frac{1}{3}$, $p_5 = \frac{1}{2}$ ist; demnach ist die Wahrscheinlichkeit, daß genau 3 weiße Kugeln gezogen werden:

$$P_3 = \frac{829}{450} - 4\cdot\frac{226}{450} + 10\cdot\frac{24}{450} = \frac{33}{90}$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens 3 weiße Kugeln erscheinen:

$$\Pi_3 = \frac{829}{450} - 3\cdot\frac{226}{450} + 6\cdot\frac{24}{450} = \frac{59}{90}.$$

40. Beispiel XXVI. *Es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, mit n Würfeln eine bestimmte Summe zu werfen.*

In dem Polynom $\frac{1}{6}x^1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{6}x^6$ sind die Fälle, welche sich mit *einem* Würfel zutragen können, und ihre Wahrscheinlichkeiten in eigentümlicher Weise zum Ausdruck gebracht: der Exponent des Hilfsbuchstaben x bedeutet die Anzahl Augen und der Koeffizient die Wahrscheinlichkeit, daß diese Anzahl sich einstelle.

Multipliziert man das Polynom mit sich selbst und ordnet das Produkt nach den Potenzen von x, so werden die Exponenten addiert, die Koeffizienten der mit einander multiplizierten Glieder multipliziert und die Koeffizienten gleicher Potenzen zu einer Summe vereinigt; die Rechnung geht also nach solchen Regeln vor sich, daß der Koeffi-

zient von x^s in dem entwickelten Produkt unmittelbar die Wahrscheinlichkeit angibt, daß mit zwei Würfeln die Summe s getroffen werde. Multipliziert man das Produkt aufs neue mit dem Polynom, so gibt in der nach Potenzen von x geordneten Entwicklung der Koeffizient von x^s aus den gleichen Gründen die Wahrscheinlichkeit an, daß mit drei Würfeln die Summe s erzielt werde.

Allgemein wird demnach der Koeffizient von x^s in der Entwicklung von

$$\left(\frac{1}{6}x^1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{6}x^6\right)^n$$

die Wahrscheinlichkeit vorstellen, daß mit n Würfeln die Summe s falle. Sondert man den Nenner 6^n ab, welcher die möglichen Fälle zählt, die sich bei einem Wurfe mit n Würfeln zutragen können, so bleibt

$$(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n,$$

und nunmehr zählt der Koeffizient von x^s die der Summe s günstigen Fälle.

Dies ist die mathematische Grundlage des mechanischen Verfahrens, welches J. Bernoulli[1]) zur Bestimmung der den verschiedenen Summen günstigen Fälle angegeben hat; das Verfahren ist nichts anderes als die schematische Bildung der Koeffizienten, welche sich bei der successiven Multiplikation des Polynoms $x^1 + x^2 + \cdots + x^6$ mit sich selbst ergeben; es ist aus der folgenden Tabelle, welche bis zu 3 Würfeln oder 3 Würfen mit einem Würfel reicht, zu ersehen. Dem Multiplikationsverfahren entsprechend ist die Koeffizientenreihe jedesmal sechsmal unter einander geschrieben mit gleichzeitiger Vorrückung um eine Stelle; darauf erfolgt kolonnenweise Addition.

Summen:

Würfel	I	1	2	3	4	5	6										
	II	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12					
	III	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Würfe mit einem Würfel	I	1	1	1	1	1	1										
			1	1	1	1	1	1									
				1	1	1	1	1	1								
					1	1	1	1	1	1							
						1	1	1	1	1	1						
							1	1	1	1	1	1					
	II	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1					
			1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1				
				1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1			
					1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1		
						1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	
							1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
	III	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

1) Ars conjectandi, p. 24 (Ostwalds Klassiker Nr. 107, p. 27).

Aus dieser Tabelle entnimmt man z. B., daß die Summe 5 mit einem Würfel auf 1, mit zwei Würfeln auf 5, mit drei Würfeln auf 15 Arten entstehen kann, so daß ihr in den drei Fällen die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}, \frac{5}{36}, \frac{15}{216}$ zukommt. (Vgl. hierzu Nr. 13 und 14.)

41. Beispiel XXVII. *In einer Urne befinden sich $n+1$ mit den Nummern $0, 1, 2, \cdots n$ bezeichnete Kugeln; man führt nacheinander i Ziehungen aus und legt jedesmal die gezogene Kugel, nachdem man ihre Nummer notiert hat, zurück. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Summe der erschienenen Nummern s sei?*

Diese Aufgabe, in der man unschwer eine Verallgemeinerung der vorigen Würfelaufgabe erkennt, wird in der Litteratur als Moivres Problem bezeichnet, weil Moivre ihre allgemeine Lösung zuerst veröffentlicht hat[1]). Der Gedanke, auf welchen er die Lösung gegründet hat, ist der in der vorigen Nummer entwickelte: Die Zahl der Arten, auf welche die Summe s entstehen kann, ist durch den Koeffizienten von x^s in der Entwickelung von

$$(x^0 + x^1 + x^2 + \cdots + x^n)^i \tag{1}$$

bezeichnet; und da $(n+1)^i$ die Anzahl der möglichen Fälle ist, so erhält man die verlangte Wahrscheinlichkeit durch Division jenes Koeffizienten mit $(n+1)^i$.

Nun läßt sich der Ausdruck (1), wenn man die in der Klammer eingeschlossene geometrische Reihe summiert, umformen in:

$$(1 - x^{n+1})^i (1-x)^{-i} = \left[1 - ix^{n+1} + \binom{i}{2} x^{2n+2} - \binom{i}{3} x^{3n+3} + \cdots\right]$$
$$\times \left[1 + ix + \binom{i+1}{2} x^2 + \binom{i+2}{3} x^3 + \cdots\right].$$

Bei der Ausführung dieser Multiplikation entstehen Glieder mit x^s dadurch, daß man

das 1. Glied des ersten Faktors multipliziert mit dem Gliede $\binom{i+s-1}{s} x^s$ des zweiten Faktors,

das 2. Glied des ersten Faktors multipl. m. d. Gliede $\binom{i+s-n-2}{s-n-1} x^{s-n-1}$ des zweiten Faktors,

das 3. Glied des ersten Faktors multipliziert mit dem Gliede $\binom{i+s-2n-3}{s-2n-2} x^{s-2n-2}$ des zweiten Faktors,

. . . .

1) A. de Moivre, De mensura sortis (1711), p. 364, und Miscellanea analytica (1730), p. 191 ff.

mithin ist der Koeffizient von x^s gleich

$$\binom{i+s-1}{s}-\binom{i}{1}\binom{i+s-n-2}{s-n-1}+\binom{i}{2}\binom{i+s-2n-3}{s-2n-2}-\cdots; \qquad (2)$$

darin ist

$$\binom{i+s-1}{s}=\frac{(i+s-1)!}{s!\,(i-1)!}=\frac{(s+1)(s+2)\cdots(s+i-1)}{1\cdot 2\cdots(i-1)}$$

$$\binom{i+s-n-2}{s-n-1}=\frac{(i+s-n-2)!}{(s-n-1)!\,(i-1)!}=\frac{(s-n)(s-n+1)\cdots(s-n+i-2)}{1\cdot 2\cdots(i-1)}$$

$$\binom{i+s-2n-3}{s-2n-2}=\frac{(i+s-2n-3)!}{(s-2n-2)!\,(i-1)!}=\frac{(s-2n-1)(s-2n)\cdots(s-2n+i-3)}{1\cdot 2\cdots(i-1)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

so daß für (2) auch

$$\frac{(s+1)(s+2)\cdots(s+i-1)}{1\cdot 2\cdots(i-1)}-\binom{i}{1}\frac{(s-n)(s-n+1)\cdots(s-n+i-2)}{1\cdot 2\cdots(i-1)}$$
$$+\binom{i}{2}\frac{(s-2n-1)(s-2n)\cdots(s-2n+i-3)}{1\cdot 2\cdots(i-1)}-\cdots$$

geschrieben werden kann; die Reihe bricht ab, sobald im Zähler negative Faktoren auftreten sollten.

Die verlangte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$P_s=\frac{1}{(n+1)^i}\Big\{\frac{(s+1)(s+2)\cdots(s+i-1)}{1\cdot 2\cdots(s-1)}-\binom{i}{1}\frac{(s-n)(s-n+1)\cdots(s-n+i-2)}{1\cdot 2\cdots(i-1)}$$
$$+\binom{i}{2}\frac{(s-2n-1)(s-2n)\cdots(s-2n+i-3)}{1\cdot 2\cdots(i-1)}-\cdots\Big\}. \qquad (3)$$

Wären z. B. in einer Urne 11 mit 0, 1, 2, ⋯ 10 beschriebene Zettel, und würde man dreimal einen Zettel ziehen, so bestünde für die Summe 25 Wahrscheinlichkeit

$$P_{25}=\frac{1}{11^3}\Big\{\frac{26\cdot 27}{1\cdot 2}-\frac{3}{1}\,\frac{15\cdot 16}{1\cdot 2}+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}\,\frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}\Big\}=\frac{21}{1331}.$$ [1]

---

1) Um auf den Fall überzugehen, daß die Bezeichnung der Kugeln oder Zettel statt mit 0 mit 1 beginnt und daher bis $n+1$ fortschreitet, braucht man sich nur auf jeder Kugel die Nummer um 1 erhöht zu denken; dadurch erhöht sich die Summe aus i Ziehungen um i und wird $s+i$ statt s; nennt man sie nunmehr s', so ist $s=s'-i$ zu setzen, und Formel (3), die nun auch die Wahrscheinlichkeit dieser Summe bestimmt, verwandelt sich in:

$$P_{s'}=\frac{1}{(n+1)^i}\Big\{\frac{(s'-i+1)(s'-i+2)\cdots(s'-1)}{1\cdot 2\cdots(i-1)}$$
$$-\binom{i}{1}\frac{(s'-i-n)(s'-i-n+1)\cdots(s'-n-2)}{1\cdot 2\cdots(i-1)}$$
$$+\binom{i}{2}\frac{(s'-i-2n-1)(s'-i-2n)\cdots(s'-2n-3)}{1\cdot 2\cdots(i-1)}-\cdots\Big\}. \qquad (3^*)$$

Das Moivresche Problem läßt eine wichtige Verallgemeinerung in folgender Richtung zu. Während nach seiner bisherigen Fassung jeder Zug oder Versuch nur einen Wert aus der ganzzahligen Reihe von 0 bis n ergeben konnte, möge nun jeder reelle Zahlenwert aus einem bezeichneten Intervall $(0, N)$ zulässig und jeder an sich gleich wahrscheinlich sein; die Summe S der Ergebnisse von i Versuchen kann dann jede reelle Zahl aus dem Intervall $(0, iN)$ sein. Um nun die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Wertes S dieser Summe zu gewinnen, ändern wir zunächst die Bedingungen der Aufgabe dahin ab, daß die Kugeln in der Urne statt mit $0, 1, 2, \cdots n$ mit 0θ, 1θ, 2θ, $\cdots n\theta$ bezeichnet seien; P_s ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß sich in i Ziehungen die Summe $s\theta$ ergiebt, und ihr Ausdruck kann, damit er diese Summe enthalte, umgeformt werden in:

$$P_{s\theta} = \frac{\theta}{1 \cdot 2 \cdots (i-1)(n\theta+\theta)} \left\{ \frac{(s\theta+\theta)(s\theta+2\theta)\cdots(s\theta+i\theta-\theta)}{(n\theta+\theta)^{i-1}} \right.$$
$$- \binom{i}{1} \frac{(s\theta-n\theta)(s\theta-n\theta+\theta)\cdots(s\theta-n\theta+i\theta-2\theta)}{(n\theta+\theta)^{i-1}}$$
$$\left. + \binom{i}{3} \frac{(s\theta-2n\theta-\theta)(s\theta-2n\theta)\cdots(s\theta-2n\theta+i\theta-3\theta)}{(n\theta+\theta)^{i-1}} - \cdots \right\}.$$

Läßt man nun n und s ins Unendliche wachsen, θ gleichzeitig gegen Null abnehmen, jedoch so, daß

$$\lim n\theta = N, \quad \lim s\theta = S$$

wird, so bedeutet N die höchste unter den möglichen Zahlen, S die Summe der aus i Ziehungen stammenden Zahlen und

$$\theta = dS$$

die geringste Änderung, welcher diese Summe fähig ist. Das Resultat dieses Grenzüberganges:

$$P_s = \frac{dS}{1 \cdot 2 \cdots (i-1) N} \left\{ \left(\frac{S}{N}\right)^{i-1} - \binom{i}{1}\left(\frac{S}{N}-1\right)^{i-1} + \binom{i}{2}\left(\frac{S}{N}-2\right)^{i-1} - \cdots \right\}$$

Diese Formel stellt nun auch die allgemeine Lösung des Würfelproblems in Nr. 40 dar. Um beispielsweise die Wahrscheinlichkeit zu finden, mit 3 Würfeln die Summe 8 zu werfen, setze man $n = 5$, $i = 3$, $s' = 8$, und man erhält:

$$P_s = \frac{1}{6^3} \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = \frac{21}{216}$$

in Übereinstimmung mit der dort mitgeteilten Tafel; und um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, mit 6 Würfeln die Summe 15 zu treffen, für welche die Tafel nicht ausreicht, hat man $n = 5$, $i = 6$, $s' = 15$ zu setzen und findet:

$$P_{15} = \frac{1}{6^6} \left\{ \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{6}{1} \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \right\} = \frac{1666}{46656} = \frac{833}{23328}.$$

ist zu deuten als Wahrscheinlichkeit einer zwischen S und $S + \theta = S + dS$ liegenden Summe; das Integral hiervon, genommen zwischen 0 und S, bedeutet dann die totale Wahrscheinlichkeit, daß die Summe in eines der Intervalle $(0, \theta)$ oder $(\theta, 2\theta)$, $\cdots$ oder $(S - \theta, S)$, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß sie zwischen 0 und S falle; diese ist sonach

$$P = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots i}\left\{\left(\frac{S}{N}\right)^i - \binom{i}{1}\left(\frac{S}{N} - 1\right)^i + \binom{i}{2}\left(\frac{S}{N} - 2\right)^i - \cdots\right\}. \tag{4}$$

Die Entwicklung ist so weit zu führen, als die Differenzen positiv bleiben.

Auf diese Formel hat Laplace[1]) die Lösung einer Frage gegründet, die mit einer 1732 und 1734 von der Pariser Akademie gestellten Preisaufgabe zusammenhängt. Die Summe der Neigungen der 10 Planetenbahnen gegen die Ekliptik war zu Beginn des vorigen Jahrhunderts mit 91,4187 Zentesimalgraden bestimmt; diese Summe ist bemerkenswerterweise kleiner als die Neigung einer einzelnen Bahn sein *könnte*. Man kann nun die Frage aufstellen: Wären jene Bahnen ein Werk des Zufalls und bestünde kein Grund, warum ein Wert der Neigung zwischen 0^0 und 100^0 leichter möglich sein sollte als ein anderer, welche Wahrscheinlichkeit bestünde dann, daß die Summe aller 10 Neigungen unter 92^0 liegt? Die Formel (4) gibt hierauf als Antwort:

$$P = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots 10}\left(\frac{92}{100}\right)^{10} = 0{,}00000012.$$

Besteht hingegen ein innerer Grund, der gerade diese Neigungen notwendig macht, dann kommt der beobachteten Summe die Wahrscheinlichkeit 1 zu, die sich zur vorigen verhält etwa wie 25 Millionen zu 3; dies führt zu dem Schlusse, daß bei der Bildung des Sonnensystems eine Ursache thätig gewesen sein mußte, welche gerade die bestehenden Neigungen herbeigeführt hat.

42. Beispiel XXVIII. *Bei dem Bouillottespiel werden aus einem Spiel von 32 Blättern die Siebner, Zehner und Buben ausgeschieden und von den übrigen Blättern je 3 an die vier Spieler verteilt; das 13. Blatt wird umgewendet. Ein Spieler hat einen Brelan, wenn er drei gleichartige Blätter (As, Könige o. dgl.) erhält, und er hat einen Brelan carré, wenn die Blätter auch noch von der Art des umgewendeten sind. Es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, 1) daß i bezeichnete Spieler einen Brelan haben; 2) daß i bezeichnete Spieler und nur diese Brelan haben; 3) daß bei einer bestimmten Reihenfolge der Spieler der i-te einen Brelan hat, ohne daß die vorausgehenden einen solchen besitzen.*

---

1) Théorie analyt., Art. 13.

1) Daß ein erster Spieler — und dies kann jeder von den vier Spielern sein, weil die Art der Verteilung willkürlich ist — einen Brelan erhält, hat die Wahrscheinlichkeit

$$p_1 = \frac{20}{20} \cdot \frac{3}{19} \cdot \frac{2}{18} = 0{,}0175438;$$

denn welches Blatt er als erstes bekommt, die zwei andern Blätter müssen von derselben Art sein; und solcher gibt es nach dem ersten Blatt noch 3 unter 19, nach dem zweiten noch 2 unter 18.

Soll ein zweiter Spieler einen Brelan erhalten, so darf er von den 17 noch übrigen Blättern als erstes dasjenige nicht erhalten, welches zu dem ersten Brelan als viertes gehört; da also ein Blatt ausgeschlossen ist, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß außer dem ersten noch ein zweiter Spieler Brelan erhält,

$$p_2 = p_1 \frac{16}{17} \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{2}{15} = \frac{2}{85} p_1 = 0{,}0004128.$$

Durch ähnliche Schlüsse ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten p_3, p_4 dafür, daß drei und daß alle vier Spieler einen Brelan erhalten, nämlich:

$$p_3 = p_2 \frac{12}{14} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} = \frac{3}{91} p_2 = 0{,}0000136,$$

$$p_4 = p_3 \frac{8}{11} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{8}{165} p_3 = 0{,}0000007.$$

2) Die Wahrscheinlichkeit p_1, daß ein bezeichneter Spieler Brelan hat, besteht aus der Wahrscheinlichkeit w_1, daß er allein ihn hat, ferner aus der Wahrscheinlichkeit $3w_2$,[1]) daß er und ein zweiter und nur diese zwei ihn haben, dann aus der Wahrscheinlichkeit $3w_3$,[1]) daß er und noch zwei andere und nur diese drei ihn haben, endlich aus der Wahrscheinlichkeit $w_4 = p_4$, daß alle vier ihn haben; denn dies sind die von einander unabhängigen Arten, auf welche der bezeichnete Spieler zu einem Brelan kommen kann; mithin ist

$$p_1 = w_1 + 3w_2 + 3w_3 + w_4;$$

ebenso erkennt man, daß

$$p_2 = w_2 + 2w_3 + w_4,$$

$$p_3 = w_3 + w_4;$$

endlich ist, wie schon bemerkt worden,

$$p_4 = w_4.$$

1) Der Koeffizient 3 rührt daher, daß der bezeichnete Spieler mit drei andern, beziehungsweise mit drei Paaren aus den übrigen Spielern sich verbinden kann.

Hieraus ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten, daß ein, zwei, drei Spieler und nur diese einen Brelan erhalten:

$$w_1 = p_1 - 3p_2 + 3p_3 - p_4 = 0{,}0163455,$$
$$w_2 = p_2 - 2p_3 + p_4 = 0{,}0003863,$$
$$w_3 = p_3 - p_4 = 0{,}0000129.$$

3) Die Wahrscheinlichkeit P_4, daß der vierte Spieler einen Brelan erhält, ohne daß die vorangehenden einen solchen haben, fällt zusammen mit der Wahrscheinlichkeit w_1, daß ein Spieler allein einen Brelan macht. Die Wahrscheinlichkeit P_3, daß der dritte Spieler in der Reihe Brelan macht, ohne daß die vorangehenden einen solchen erhalten, setzt sich als Summe zusammen aus der Wahrscheinlichkeit w_1, daß er ihn allein macht, und aus der Wahrscheinlichkeit w_2, daß er ihn mit dem nachfolgenden Spieler zugleich erhält. Bei dem zweiten Spieler ist darauf zu achten, daß er Brelan entweder allein oder zusammen mit einem der beiden folgenden oder mit beiden zugleich haben kann. Der erste Spieler endlich kann entweder allein oder mit einem oder mit einem Paar der drei folgenden oder mit allen zugleich Brelan machen. Hiernach ist

$$P_4 = w_1 = 0{,}0163455$$
$$P_3 = w_1 + w_2 = 0{,}0167318$$
$$P_2 = w_1 + 2w_2 + w_3 = 0{,}0171310$$
$$P_1 = w_1 + 3w_2 + 3w_3 + w_4 = 0{,}0175438.$$

Die Wahrscheinlichkeit Π, daß mindestens ein Brelan zustande kommt, ist die totale Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein oder daß zwei oder drei oder alle vier Spieler Brelan erhalten, was beziehungsweise wieder auf 4, 6, 4 Arten und 1 Art geschehen kann; mithin ist

$$\Pi = 4w_1 + 6w_2 + 4w_3 + w_4 = 0{,}0677521;$$

daraus folgt die Wahrscheinlichkeit, daß kein Brelan gemacht werde, mit 0,9322479.

43. Beispiel XXIX. *Im Trente et quarante genannten Spiele gibt es nur einen Fall, welcher dem Bankhalter günstig ist; er besteht darin, daß zweimal nach einander die Summe 31 zustande kommt. Es ist die Wahrscheinlichkeit dieses Falles zu bestimmen.*

Das Spiel wird mit der Vereinigung mehrerer, durcheinander gemischter vollständiger Spiele von je 52 Karten ausgeführt, etwa mit 8 Spielen oder 416 Karten. Die Figuren gelten 10, die übrigen Blätter entsprechend den auf ihnen verzeichneten Points.

Die Karten werden einzeln aufgeschlagen so lange, bis eine 30 übersteigende, höchstens also die Summe 40 entsteht. Derselbe Vorgang wird ein zweitesmal wiederholt. Der Spieler wettet auf die

erste oder die zweite Summe und gewinnt, wenn sie die größere von beiden ist.

Kommen zwei gleiche Summen heraus, so ist das Spiel ungiltig. Sind es aber zwei 31, so zieht der Bankhalter die Hälfte des Einsatzes ein. Um die Wahrscheinlichkeit dieses Falles handelt es sich.

Die Lösung der Aufgabe würde sich außerordentlich verwickelt gestalten, wollte man auf die Veränderung Rücksicht nehmen, welche die Wahrscheinlichkeit einer Karte bestimmter Art während des Spieles erleiden kann je nach den vor ihr schon gezogenen Karten. Da aber der Einfluß dieser Veränderlichkeit auf das Endresultat vermöge der großen Gesamtzahl der Blätter und auch der großen Zahl der Blätter einer bestimmten Art nur gering sein dürfte, so kann man sich auf den Standpunkt stellen, es bleibe die Wahrscheinlichkeit für eine Karte bestimmter Art, z. B. einen König, durch die ganze Dauer des Spiels dieselbe, $\frac{1}{13}$.

Es bezeichne p_s die Wahrscheinlichkeit, die Summe s zu machen.

Die Summe 1 ergibt sich nur, wenn ein As gezogen wird, also ist

$$p_1 = \frac{1}{13}.$$

Die Summe 2 kann entstehen, entweder indem ein Zweier oder zweimal As gezogen wird, also ist

$$p_2 = \frac{1}{13} + \frac{1}{13^2} = \frac{1}{13}\left(1 + \frac{1}{13}\right).$$

Für die Summe 3 gibt es drei Entstehungsweisen: entweder ein Dreier, oder ein As und ein Zweier, oder nach Erzielung der Summe 2 ein As; daher ist

$$p_3 = \frac{1}{13} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{13}\left(1 + \frac{1}{13}\right) \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{13}\left(1 + \frac{1}{13}\right)^2.$$

Die Summe 4 kann auf vier Arten entstehen: entweder wird ein Vierer gezogen, oder es folgt der Summe 1 ein Dreier, der Summe 2 ein Zweier oder der Summe 3 ein As; folglich ist

$$p_4 = \frac{1}{13} + \frac{1}{13}p_1 + \frac{1}{13}p_2 + \frac{1}{13}p_3 = \frac{1}{13}\left(1 + \frac{1}{13}\right)^3.$$

Dies geht so fort bis zur Summe 9; entsprechend ihren neun Entstehungsarten ist

$$p_9 = \frac{1}{13} + \frac{1}{13}p_1 + \frac{1}{13}p_2 + \cdots + \frac{1}{13}p_8 = \frac{1}{13}\left(1 + \frac{1}{13}\right)^8.$$

Von der Summe 10 ab ändert sich die Sachlage, weil viererlei verschiedene Karten die Summe um 10 erhöhen können: Zehner, Buben, Königinnen und Könige.

Die Summe 10 selbst kann entstehen, indem man einen Zehner zieht oder indem der Summe 1 ein Neuner, der Summe 2 ein Achter, ⋯ endlich der Summe 9 ein As folgt; demnach ist

$$p_{10} = \frac{4}{13} + \frac{1}{13}\left(p_1 + p_2 + \cdots + p_9\right).$$

Für jede 10 übersteigende Summe gibt es folgende Entstehungsarten: entweder verbindet sich die Summe $s - 10$ mit einem Zehner oder es folgt der Summe $s - 9$ ein Neuner, der Summe $s - 8$ ein Achter ⋯ oder endlich der Summe $s - 1$ ein As; hiernach ist

$$p_s = \frac{4}{13} p_{s-10} + \frac{1}{13}\left(p_{s-9} + p_{s-8} + \cdots + p_{s-1}\right), \qquad (s > 10).$$

Durch Benutzung dieser Formeln findet man successive:

$p_1 = 0{,}076923$	$p_{11} = 0{,}119979$	$p_{21} = 0{,}139839$
$p_2 = 0{,}082840$	$p_{12} = 0{,}124657$	$p_{22} = 0{,}142447$
$p_3 = 0{,}089212$	$p_{13} = 0{,}129344$	$p_{23} = 0{,}144896$
$p_4 = 0{,}096075$	$p_{14} = 0{,}134015$	$p_{24} = 0{,}147170$
$p_5 = 0{,}103465$	$p_{15} = 0{,}138639$	$p_{25} = 0{,}149249$
$p_6 = 0{,}111424$	$p_{16} = 0{,}143181$	$p_{26} = 0{,}151114$
$p_7 = 0{,}119995$	$p_{17} = 0{,}147602$	$p_{27} = 0{,}152744$
$p_8 = 0{,}129226$	$p_{18} = 0{,}151779$	$p_{28} = 0{,}154104$
$p_9 = 0{,}139166$	$p_{19} = 0{,}155885$	$p_{29} = 0{,}155231$
$p_{10} = 0{,}380640$	$p_{20} = 0{,}212896$	$p_{30} = 0{,}168336$
	$p_{31} = 0{,}148049.$	

Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, zweimal nach einander 31 zu machen:

$$p_{31}{}^2 = 0{,}0219184.$$

Poisson[1]) führte die Rechnung mit Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Wahrscheinlichkeiten durch und fand als angenäherten Wert 0,021967; dabei war vorausgesetzt, daß acht Kartenspiele zusammengelegt seien. Man erkennt hieraus, wie gering der Einfluß der Variationen in der Anzahl der möglichen und günstigen Fälle während des Spieles ist.

44. Beispiel XXIX. *Es liegen 5 äußerlich gleiche Urnen vor; drei davon (A) enthalten je 3 weiße (w) und 2 schwarze (s) Kugeln, die zwei andern (B) je eine weiße und 3 schwarze Kugeln. Man zieht aus einer der Urnen eine Kugel heraus, legt sie, ohne sie besehen zu haben, in eine andere Urne und zieht aus dieser, nachdem man ihren*

1) Sur le jeu de trente et quarante. Annal. de Gergonne, XVI.

Inhalt durcheinander gemengt, eine Kugel. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie weiß sei?

Das erwartete Ereignis kann auf 8 einander ausschließende Arten eintreffen, welche schematisch durch folgende Symbole dargestellt sind:

$$AwA, \quad AsA, \quad AwB, \quad AsB,$$
$$BwA, \quad BsA, \quad BwB, \quad BsB;$$

AwA bedeutet, daß die erste Kugel aus einer der Urnen A genommen wird, daß sie weiß sei und wieder in eine der Urnen A gelegt wird, aus der dann die zweite Ziehung gemacht wird; ähnlich die anderen Kombinationen.

Jede der acht Entstehungsarten ist wieder als ein zusammengesetztes Ereignis aufzufassen, bestehend aus vier einfachen Ereignissen; so erfordert die erste Entstehungsart, daß man in eine Urne der Gattung A greife $\left(\text{Wahrscheinlichkeit } \frac{3}{5}\right)$, daß man aus ihr eine weiße Kugel nehme $\left(\text{W. } \frac{3}{5}\right)$, daß man diese in eine andere der Urnen A lege $\left(\text{W. } \frac{1}{2}\right)$ und daß man aus dieser, die dann 4 weiße und 2 schwarze Kugeln enthält, eine weiße Kugel ziehe $\left(\text{W. } \frac{2}{3}\right)$.

Demnach ist die vollständige Wahrscheinlichkeit des erwarteten Ereignisses

$$\frac{3}{5}\,\frac{3}{5}\,\frac{1}{2}\,\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\,\frac{2}{5}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\,\frac{3}{5}\,\frac{1}{2}\,\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\,\frac{2}{5}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{5}$$
$$+ \frac{2}{5}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{5} = \frac{927}{2000}.$$

§ 4. Geometrische Wahrscheinlichkeit.

45. Die bisher behandelten Probleme betrafen Tatbestände, denen eine diskrete und daher *zählbare* Mannigfaltigkeit möglicher und günstiger Fälle zugrunde lag.

Wenn hingegen die Modalitäten eines Tatbestandes von einer oder mehreren stetig veränderlichen Größen abhängen, so kann wohl noch von einem einzelnen „Fall" als einer durch besondere Werte der Variabeln bestimmten Modalität gesprochen werden; aber eine Zählung der möglichen und günstigen Fälle ist ausgeschlossen. An ihre Stelle tritt die Vergleichung einfach oder mehrfach ausgedehnter *stetiger Bereiche.* Die ersten Probleme dieser Art betrafen Fragen geometrischer Natur; es handelte sich darum, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß ein aus einer wohldefinierten stetigen Mannigfaltigkeit geometrischer Gebilde nach Belieben herausgegriffenes Individuum gewisse Eigenschaften besitze oder Bedingungen erfülle, die zu seiner

völligen Bestimmung nicht ausreichen. Andere Probleme, die nicht in geometrischem Gewande gestellt sind, können durch gehörige Deutung der auftretenden Variabeln auf geometrisches Gebiet übertragen werden. Es hat sich daher für Aufgaben, bei welchen stetige Größen überhaupt in Betracht kommen, die Bezeichnung „Probleme der geometrischen Wahrscheinlichkeit"[1]) eingebürgert.

Während bei zählbaren Mengen günstiger und möglicher Fälle sich für die Wahrscheinlichkeit ein rationaler Bruch ergibt, können geometrische Wahrscheinlichkeiten auch durch irrationale Zahlen ausgedrückt sein.

Die grundlegende Frage der geometrischen Wahrscheinlichkeit geht dahin, wie es analytisch zu formulieren sei, daß alle Werte einer stetigen Variabeln aus einem bezeichneten Intervall gleichmöglich sind. Sie fällt zusammen mit der Frage, welchen Sinn es hat zu sagen, alle Punkte einer geraden Strecke seien gegenüber einer vorzunehmenden Wahl gleichberechtigt.

Die Antwort auf diese Frage ist mit dem Grundsatze gegeben, daß gleich große Intervalle des Gebiets der Variabeln gleiche Wertmengen, gleich lange Teile der geraden Strecke gleiche Punktmengen enthalten, so daß die Menge der Werte der Variabeln nur durch die Größe des Intervalls, auf welches sie angewiesen sind, die Menge der Punkte nur durch die Länge der Strecke, auf welcher sie zu liegen haben, bestimmt wird.

Soll hiernach der Wert einer Variabeln x aus dem Intervall (a, b) entnommen werden, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß er dem Teilintervall $(x, x + dx)$ zwischen a und b angehöre, durch $\frac{dx}{b-a}$ ausgedrückt.

Der Übergang zu mehreren Variabeln bietet keine Schwierigkeit. Ist x auf das Intervall (a, b), y auf das Intervall (c, d) angewiesen, so ergibt sich als Wahrscheinlichkeit, daß die Werte von x, y gleichzeitig den Intervallen $(x, x + dx)$, beziehungsweise $(y, y + dy)$ entstammen, der Ausdruck $\frac{dx\,dy}{(b-a)(d-c)}$.

Ist ein geometrisches Gebilde durch die Werte zweier Variabeln x, y bestimmt, so ist die Menge seiner Modalitäten durch das über alle möglichen Wertverbindungen von x, y ausgedehnte Doppelintegral

$$\iint dx\,dy$$

gemessen; ein analoges Integral, ausgedehnt über solche Wertverbindungen von x, y, welche die einer gestellten Frage günstigen Modalitäten des Gebildes ergeben, ist ein Maß für die Menge der günstigen

1) Local probability, geometrical probability.

Modalitäten; der Quotient aus dem zweiten Integral durch das erste gibt die Wahrscheinlichkeit, daß das beliebig herausgegriffene Gebilde die in der Frage gekennzeichnete Eigenschaft besitze.

Soll z. B. die Wahrscheinlichkeit ermittelt werden, daß ein im rechtwinkligen System angenommener Punkt, dessen Wahl so weit frei steht, daß er von keiner Axe einen den Betrag a übersteigenden Abstand haben darf, vom Ursprung höchstens den Abstand a besitzt, so ist die Menge der möglichen Fälle durch

$$\int_{-a}^{a} dy \int_{-a}^{a} dx = 4a^2,$$

die Menge der günstigen Fälle durch

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy = \pi a^2$$

gemessen, die Wahrscheinlichkeit der bezeichneten Eigenschaft des Punktes ist also $\frac{\pi}{4}$. Die Aufgabe läßt aber auch eine anschauliche Deutung zu: Das Gebiet der möglichen Punktlagen ist ein den Ursprung umschließendes Quadrat von der Seite $2a$, das Gebiet der günstigen Fälle ein ihn umgebender Kreis vom Radius a; die Inhalte dieser Figuren, $4a^2$ und πa^2, sind die Maße für die entsprechenden Punktmengen.

Allgemein: Die Menge der Punkte auf einer (geraden oder krummen) Linie ist durch deren Länge, auf einer (ebenen oder krummen) Fläche durch deren Flächeninhalt, in einem begrenzten Raume durch dessen Inhalt gemessen.

Nicht in allen Fällen bietet sich die Auffassung der willkürlichen Annahme eines geometrischen Gebildes und der Struktur der Gesamtheit von Gebilden so von selbst dar wie in den voranstehenden. Wenn z. B. von einer willkürlichen Sehne im Kreise gesprochen wird, so können diesem Ausdruck verschiedene Deutungen gegeben werden je nach der Art, wie man sich die Sehne verzeichnet denkt; man kann sie von einem beliebig gewählten Anfangspunkte in beliebiger Richtung gezogen denken, oder bei beliebiger Richtung in beliebiger Entfernung vom Mittelpunkte des Kreises, oder kann sie durch Verbindung zweier beliebiger Punkte des Umfanges erzeugen. Ein und dieselbe Aufgabe erhält dann verschiedene Lösungen je nach der Auffassung, die man zu Grunde legt. Analytisch drückt sich der Unterschied der Auffassung in der verschiedenen Wahl der Variabeln aus, durch welche man das geometrische Gebilde bestimmt. So wäre bei dem angeführten Beispiele im ersten Falle die Variable eine Winkelgröße, nämlich der Winkel der Sehnenrichtung mit einer festen

Anfangsrichtung, und die Menge aller Sehnen würde durch π zu messen sein; im zweiten Falle wäre die Variable eine Längengröße, der Abstand der Sehne vom Mittelpunkte des Kreises, und die Menge aller Sehnen würde durch den Durchmesser zu messen sein.

Die Berechnung geometrischer Wahrscheinlichkeiten käme nach dem Vorgeführten auf die Auswertung bestimmter Integrale zurück, die sich indessen schon bei verhältnismäßig einfachen Problemen schwierig gestaltet; schon die Feststellung des Integrationsgebietes bereitet häufig erhebliche Schwierigkeiten. Durch Ausbildung scharfsinniger Methoden, um welche sich insbesondere englische Geometer verdient gemacht haben, ist es gelungen, Integrationen völlig zu umgehen, schwierige auf einfachere zurückzuführen und so manche komplizierte Probleme zur Lösung zu bringen, die auf direktem Wege kaum zu bewältigen wären. Eine Auswahl von Beispielen wird einen Einblick in diese Methoden vermitteln.

46. Beispiel XXXI. *Mit welcher Wahrscheinlichkeit läßt sich aus drei Strecken x, y, z, die unter einer gemeinsamen oberen Grenze liegen, ein Dreieck bilden?*

Faßt man x, y, z als (rechtwinklige) Koordinaten eines Punktes im Raume auf, so ist das Gebiet der möglichen Fälle durch den Würfel OD, Fig. 2, von der Kante a dargestellt; denn für Punkte innerhalb oder an der Oberfläche dieses Würfels — und nur für solche — ist gleichzeitig

$$0 \leq x \leq a, \qquad 0 \leq y \leq a, \qquad 0 \leq z \leq a.$$

Soll ein Dreieck gebildet werden können, so muß

$$y + z \geq x, \qquad z + x \geq y, \qquad x + y \geq z$$

sein; die Gebiete, welche diesen Bedingungen entsprechen, werden von dem Würfel durch die Ebenen OBC, OCA, OAB abgeschnitten und bilden drei kongruente Pyramiden, $OBCD$, $OCAD$, $OABD$. Das Verhältnis ihres Inhaltes zum Inhalt des Würfels gibt die verlangte Wahrscheinlichkeit:

Fig. 2.

$$p = \frac{3\,\frac{a^3}{6}}{a^3} = \frac{1}{2}.$$

47. Beispiel XXXII. *Eine Strecke a wird beliebig in drei Teile geteilt; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich aus den Teilen ein Dreieck bilden läßt?*

Die Teile x, y, z müssen positiv sein und der Gleichung

$$x + y + z = a \qquad (1)$$

genügen.

Damit sich aus ihnen ein Dreieck bilden lasse, müssen sie den Bedingungen

$$y + z \geq x, \qquad z + x \geq y, \qquad x + y \geq z$$

genügen, welche sich mit Hilfe der voranstehenden Gleichung umwandeln lassen in

$$x \leq \frac{a}{2}, \qquad y \leq \frac{a}{2}, \qquad z \leq \frac{a}{2}. \tag{2}$$

Werden x, y, z als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes im Raume aufgefaßt, so ist das Gebiet der möglichen Fälle durch das Dreieck ABC, Fig. 3, dargestellt, dessen Ecken von O den Abstand a haben; denn die Koordinaten jedes Punktes in diesem Dreieck sind positiv und genügen der Gleichung (1). Das Gebiet der günstigen Fälle wird aus diesem Dreieck durch die drei Ebenen EFG, HFJ, KJG ausgeschnitten, welche OA, beziehungsweise OB, OC senkrecht halbieren; es ist dies das Dreieck JGF, dessen Punkte den Beziehungen (2) entsprechen.

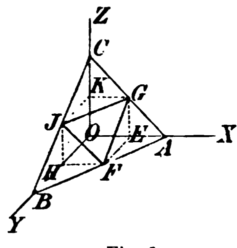


Fig. 3.

Da nun $\triangle JGF = \frac{1}{4} \triangle ABC$ ist, so ist die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{1}{4}.$$

48. Beispiel XXXIII. *Auf eine horizontale, mit äquidistanten Parallelen vom Abstande $2a$ überzogene Tafel wird eine (zylindrische) Nadel von der Länge $2c$ ($\leq 2a$) geworfen; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Nadel eine der Parallellinien kreuzt?*

Es genügt, nur diejenigen Lagen der Nadel ins Auge zu fassen, bei welchen ihr Mittelpunkt M, Fig. 4, mit einem Punkt von $AC = \frac{AB}{2} = a$ zusammenfällt; die Menge solcher Lagen wird durch πa gemessen; denn a ist das Maß für die Menge der Punkte in AC und π das Maß für die Menge der Richtungen bei jeder Lage des Mittelpunktes.

Fällt der Mittelpunkt in die Entfernung $x = AM$ bis $x + dx$, so ist die Menge der günstigen Nadelrichtungen bei jeder solchen Lage des Mittelpunktes durch 2θ, d. i.

$$2 \arccos \frac{x}{c}$$

gemessen; die Menge der beschriebenen Lagen des Mittelpunktes hat aber dx zum Maße; somit ist das Gebiet der günstigen Fälle durch

$$\int_0^c 2 \arc\cos \frac{x}{c}\, dx = 2c$$

gemessen.

Die verlangte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$p = \frac{2c}{\pi a}.$$

Die vorstehende Aufgabe, unter dem Namen „Nadelproblem" (problème de l'aiguille) bekannt, gehört zu den ersten, welche auf dem Gebiete der geometrischen Wahrscheinlichkeit gestellt worden sind; ihr Urheber ist **Buffon**[1]). Über ihre weitere Entwicklung vergleiche man des Verfassers „Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte" (1884), p. 85 ff. und dessen Bericht über „Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie" (1899), VII. Jahresber. der Deutschen Mathematiker-Verein., p. 59 ff.

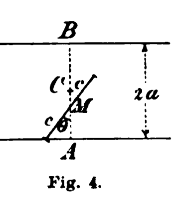


Fig. 4.

49. Beispiel XXXIV. *In einem Kreise werden, nachdem darin eine Sehne beliebig gezogen worden, zwei Punkte willkürlich angenommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen beide Punkte zu einerlei Seite der Sehne?*

α) Wird die Sehne bei beliebig angenommener Richtung in beliebiger Entfernung vom Kreismittelpunkt gezogen, so ist die Menge der Sehnen, deren Entfernung zwischen $x = OC$, Fig. 5, und $x + dx$ liegt, durch dx bestimmt. Die Menge der Punktepaare, welche bei dieser Lage der Sehne AB unterhalb derselben liegen, wird durch das Quadrat des Segments ABD, die Menge der Punktepaare oberhalb AB durch das Quadrat des Segments ABE gemessen. Hiernach ergiebt sich das Maß für die Mannigfaltigkeit der günstigen Fälle, indem man den Ausdruck

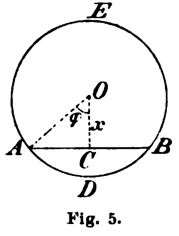


Fig. 5.

$$\left\{(ABD)^2 + (ABE)^2\right\} dx$$

über alle Sehnenlagen integriert; nach Einführung des Winkels $AOC = \varphi$ und des Kreishalbmessers $AO = r$ ergibt dies:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ r^4 (\varphi - \sin\varphi \cos\varphi)^2 + r^4 \left(\pi - \varphi - \sin\overline{\pi - \varphi} \cos\overline{\pi - \varphi}\right)^2 \right\} r \sin\varphi\, d\varphi$$

und mit Rücksicht darauf, daß

1) B.s sämtliche Werke, deutsch von B. Rave, 4. Bd., p. 441—498.

$$\int_0^\pi (\pi - \varphi - \sin\overline{\pi - \varphi}\cos\overline{\pi - \varphi})^2 \sin\varphi\, d\varphi = \int_0^\pi (\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)^2 \sin\varphi\, d\varphi,$$

weiter

$$2r^5 \int_0^\pi (\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)^2 \sin\varphi\, d\varphi = 2r^5\left(\pi^2 - \frac{128}{45}\right).$$

Die Menge der möglichen Fälle hat $2r \cdot (\pi r^2)^2$ zum Maße. Hiernach ist

$$p = 1 - \frac{128}{45\pi^2} = 0{,}712 \cdots$$

die verlangte Wahrscheinlichkeit.

β) Zu einem andern Resultate gelangt man, wenn man sich die Sehne aus dem freigewählten Anfangspunkt A in beliebiger Richtung gezogen denkt. Denn die Menge solcher Sehnen, deren Lot OC mit AO einen zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ liegenden Winkel einschließt, ist durch $d\varphi$, daher die Menge der günstigen Fälle durch

$$\int_0^\pi \left\{ r^4 (\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)^2 + r^4 (\pi - \varphi - \sin\overline{\pi - \varphi}\cos\overline{\pi - \varphi})^2 \right\} d\varphi$$
$$= 2r^4\left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{8}\right)$$

auszudrücken, während die Menge der möglichen Fälle nunmehr $\pi \cdot (\pi r^2)^2$ zum Maße hat.

Bei dieser Auffassung ist also

$$p' = \frac{2}{3} + \frac{3\pi + 1}{4\pi^3} = 0{,}747 \cdots$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

50. Mittelwert einer vom Zufall abhängigen Größe. Eine veränderliche Größe S sei der Werte $S_1, S_2, \cdots S_\nu$ fähig, deren jeden sie nur auf eine Art annehmen kann. Das arithmetische Mittel dieser Einzelwerte wird als *Mittelwert von S* bezeichnet. Bedient man sich dafür des Symbols $\mu(S)$, so ist

$$\mu(S) = \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_\nu}{\nu}. \tag{1}$$

Kann jeder Einzelwert von S auf mehrere Arten zustande kommen, allgemein S_i auf n_i Arten, und setzt man $n_1 + n_2 + \cdots + n_\nu = N$, so ist

$$\mu(S) = \frac{n_1 S_1 + n_2 S_2 + \cdots + n_\nu S_\nu}{N}. \tag{2}$$

Unterliegt die Größe S der willkürlichen Annahme und kann jeder ihrer Einzelwerte mit gleichem Grade der Möglichkeit aus der

Wahl hervorgehen, so ist im ersten Falle $\frac{1}{\nu}$, im zweiten Falle $\frac{n_1}{N} = p_1$ die Wahrscheinlichkeit, daß sich der Wert S_1 einstellen werde, ebenso $\frac{1}{\nu}$, beziehungsweise $\frac{n_2}{N} = p_2$ die Wahrscheinlichkeit des Wertes S_2 u. s. w. Mithin ist unter diesem Gesichtspunkte

$$\mu(S) = p_1 S_1 + p_2 S_2 + \cdots + p_\nu S_\nu, \tag{3}$$

d. h. *der Mittelwert der vom Zufall abhängigen Größe S ist gleich der Summe ihrer Einzelwerte, jeder mit der seinem Zustandekommen entsprechenden Wahrscheinlichkeit multipliziert.*

Ist die Mannigfaltigkeit der Werte S eine stetige, indem der einzelne von der Wertverbindung der stetigen Variabeln $x, y, \cdots$ abhängt, so ist die Menge der Werte S, welche zu Wertverbindungen zwischen $x, y, \cdots$ und $x + dx, y + dy, \cdots$ gehören, gemessen durch $dx\, dy \cdots$, die Wahrscheinlichkeit eines solchen Wertes von S gleich

$$\frac{dx\, dy \cdots}{\int\int \cdots dx\, dy \cdots},$$

das Integral über die ganze Mannigfaltigkeit ausgedehnt. Der Mittelwert von S ist dann in Konsequenz des voranstehenden Satzes

$$\mu(S) = \frac{\int\int \cdots S\, dx\, dy \cdots}{\int\int \cdots dx\, dy \cdots}, \tag{4}$$

beide Integrationen über das ganze Gebiet der S erstreckt.

51. Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit und Mittelwert. Der grundlegende, diesen Zusammenhang betreffende Satz ist der folgende: „Ist das variable geometrische Gebiet S (Linie, Fläche, Raum) in dem festen gleichartigen Gebiet A eingeschlossen, $\mu(S)$ der Mittelwert von S, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein in A willkürlich angenommener Punkt in S falle, welchen Wert dieses im Augenblicke der Realisierung auch haben möge,

$$p = \frac{\mu(S)}{A}.\text{“}$$

Kann nämlich S die Werte $S_1, S_2, \cdots S_\nu$ mit den Wahrscheinlichkeiten $w_1, w_2, \cdots w_\nu$ annehmen, so ist $w_i \frac{S_i}{A}$ die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei der Realisierung der Bedingungen der Wert S_i existiere und daß der im Gebiete A angenommene Punkt in das Teilgebiet S falle. Die totale Wahrscheinlichkeit des letzten Ereignisses ist daher

$$p = w_1 \frac{S_1}{A} + w_2 \frac{S_2}{A} + \cdots + w_\nu \frac{S_\nu}{A} = \frac{w_1 S_1 + w_2 S_2 + \cdots + w_\nu S_\nu}{A} = \frac{\mu(S)}{A}.$$

Die Ausdehnung des Beweises auf eine stetige Mannigfaltigkeit der S unterliegt keiner Schwierigkeit.

Würde es sich statt eines Punktes um deren n handeln, so ergäbe sich für die Wahrscheinlichkeit, daß sie alle in das eingeschlossene Gebiet S fallen, der Ausdruck

$$p = \frac{\mu(S^n)}{A^n}.$$

Die vorstehenden Formeln können zweifache Verwendung finden: zur Berechnung von p oder zur Berechnung von $\mu(S)$, respektive $\mu(S^n)$.

52. Beispiel XXXV. *In einer Strecke von der Länge a werden zwei Punkte X, Y willkürlich angenommen; welches ist der Mittelwert ihres Abstandes $XY = s$, welches der Mittelwert seiner n-ten Potenz?*

Denkt man sich auf der Strecke noch einen dritten Punkt Z angenommen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß er zwischen X und Y falle:

$$p = \frac{\mu(s)}{a}.$$

Nun kann p auf kombinatorischem Wege gefunden werden. Die drei Punkte können mit gleichem Grade der Möglichkeit eine der folgenden Anordnungen zeigen:

$$XYZ, \quad XZY, \quad YXZ, \quad YZX, \quad ZXY, \quad ZYX;$$

nur zwei davon, die zweite und vierte, sind dem bezeichneten Ereignis günstig, seine Wahrscheinlichkeit ist daher $p = \frac{1}{3}$. Daraus folgt

$$\mu(s) = \frac{1}{3}a.$$

Um den Mittelwert von s^n zu finden, denke man sich nach X, Y noch n weitere Punkte angenommen; die Wahrscheinlichkeit, daß sie sämtlich zwischen X und Y fallen, ist

$$p = \frac{\mu(s^n)}{a^n}.$$

Sie kann aber auch direkt bestimmt werden. Jeder von den $n+2$ Punkten kann bei einer bestimmten Zählungsrichtung der erste sein; daß es X *oder* Y sei, hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{n+2}$; ist eines von beiden eingetroffen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der andere Punkt (Y oder X) unter den übrigen der letzte sei, $\frac{1}{n+1}$. Hiernach ist auch

$$p = \frac{2}{(n+2)(n+1)},$$

folglich

$$\mu(s^n) = \frac{2}{(n+2)(n+1)} a^n.$$

53. Erster Satz über Mittelwerte. „Es seien A und B zwei einander ausschließende Gebiete gleicher Dimensionszahl; S sei eine Größe, deren Wert von zwei willkürlich angenommenen Punkten X, Y abhängt; ferner bedeute

μ den Mittelwert von S, wenn ein Punkt in A, der andere in B angenommen wird;

μ_A den Mittelwert, wenn beide Punkte in A,

μ_B den Mittelwert, wenn beide Punkte in B,

μ' den Mittelwert, wenn beide Punkte ohne Wahl im Gesamtgebiete $A+B$ angenommen werden. Dann besteht die Beziehung:

$$(A+B)^2\mu' = A^2\mu_A + B^2\mu_B + 2AB\mu.\text{“}$$

Man denke sich in der Gesamtheit der Punktepaare in $A+B$ zu jedem das zugehörige S; dann zerfällt die Summe Σ aller S in folgende Bestandteile: in Σ_A, das sich auf Punktepaare in A; in Σ_B, das sich auf Punktepaare in B bezieht; endlich in die einander gleichen Summen Σ_{AB} und Σ_{BA}, welche den Fällen entsprechen, wo X in A, Y in B und umgekehrt liegt. Hiernach ist also

$$\Sigma = \Sigma_A + \Sigma_B + 2\Sigma_{AB};$$

nun ist aber

$$\frac{\Sigma}{(A+B)^2} = \mu', \quad \frac{\Sigma_A}{A^2} = \mu_A, \quad \frac{\Sigma_B}{B^2} = \mu_B, \quad \frac{\Sigma_{AB}}{AB} = \mu,$$

folglich in der That

$$(A+B)^2\mu' = A^2\mu_A + B^2\mu_B + 2AB\mu.$$

54. Zweiter Satz über Mittelwerte. „Sind A, B, C drei einander ausschließende Gebiete in einer Ebene (Linien oder Flächen) von solcher Beschaffenheit, daß keine Gerade alle drei zugleich schneidet; nimmt man in denselben die Punkte X, Y, Z willkürlich an, so ist die mittlere Fläche des Dreiecks XYZ gleich der Fläche des Dreiecks der Schwerpunkte von A, B, C.“

Der Beweis dieses Satzes beruht auf der Tatsache, daß die mittlere Entfernung des Punktes eines ebenen Gebiets von einer in derselben Ebene gelegenen, das Gebiet nicht schneidenden Geraden gleich ist der Entfernung seines Schwerpunktes von dieser Geraden.

Daraus ergibt sich, daß der Mittelwert aller Dreiecke XYZ mit festem Y, Z durch das Dreieck $\mathfrak{A}YZ$ dargestellt wird, wenn $\mathfrak{A}$

den Schwerpunkt von A bedeutet; weiter ist der Mittelwert aller Dreiecke $\mathfrak{A}YZ$ mit festem Z durch das Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}Z$ bestimmt, wenn $\mathfrak{B}$ der Schwerpunkt von B ist; endlich ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ der Mittelwert der Dreiecke $\mathfrak{A}\mathfrak{B}Z$, also zugleich aller Dreiecke XYZ, wenn $\mathfrak{C}$ den Schwerpunkt von C bedeutet.

55. Beispiel XXXVI. *In der Fläche eines gegebenen Dreiecks ABC werden zwei Punkte X, Y beliebig angenommen; welches ist die mittlere Fläche des Dreiecks XYC?*

Teilt man das Dreieck durch die Mittellinie CD, Fig. 6, in zwei gleiche Dreiecke, so ist die mittlere Fläche von XYC *für den Fall*, daß in jede Hälfte einer der Punkte X, Y fällt, gleich dem Dreieck, welches die Schwerpunkte von ADC, DBC mit C verbindet; dieses Dreieck hat aber, weil seine Basis $\frac{1}{3}$ von AB und seine Höhe $\frac{2}{3}$ der Höhe von ABC ist, die Fläche $\frac{2}{9}ABC = \frac{2}{9}\varDelta$.

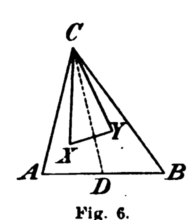


Fig. 6.

Nun kann der Satz in Nr. 53 zur Anwendung gebracht werden, wenn man

$$A + B = \varDelta, \qquad A = B = \frac{1}{2}\varDelta, \qquad \mu = \frac{2}{9}\varDelta$$

setzt und beachtet, daß $\mu_A = \mu_B = \frac{1}{2}\mu'$ ist, weil ein Dreieck XYC in ADC oder in DBC die halbe mittlere Fläche hat von derjenigen, welche einem solchen Dreieck in ABC zukommt; mithin ist

$$\varDelta^2\mu' = \frac{1}{8}\varDelta^2\mu' + \frac{1}{8}\varDelta^2\mu' + \frac{1}{9}\varDelta^3,$$

woraus der gesuchte Mittelwert

$$\mu' = \frac{4}{27}\varDelta$$

folgt.

56. Beispiel XXXVII. *In einem Dreieck ABC werden drei Punkte X, Y, Z beliebig angenommen; es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß sie mit der Ecke C ein konvexes Viereck ergeben.*

Die Punkte ergeben ein nichtkonvexes Viereck, wenn z. B. der Punkt Z in das Dreieck XYC zu liegen kommt; die Wahrscheinlichkeit hierfür ist, wenn μ' den Mittelwert von YXC und $\triangle$ die Fläche von ABC bezeichnet, $\frac{\mu'}{\triangle}$, d. i. $\frac{4}{27}$.

Da nun auch Y in das Dreieck ZXC oder X in das Dreieck YZC fallen kann, so ist die totale Wahrscheinlichkeit eines nichtkonvexen Vierecks $\frac{4}{9}$, folglich die Wahrscheinlichkeit eines konvexen $\frac{5}{9}$.

57. Beispiel XXXVIII. *In einem Halbkreise vom Halbmesser a werden zwei Punkte X, Y beliebig angenommen und mit einem Endpunkte des begrenzenden Durchmessers zu einem Dreieck verbunden; es ist die mittlere Fläche dieses Dreiecks zu bestimmen.*

Bestimmt man die Punkte X, Y durch ihre Polarkoordinaten r, φ, beziehungsweise r', φ' in Bezug auf den dritten Eckpunkt A des Dreiecks, Fig. 7, als Pol und den Durchmesser AB als Polaraxe, so ist das Element der Ebene bei X durch $r\,dr\,d\varphi$, bei Y durch $r'\,dr'\,d\varphi'$ bestimmt, und die Menge der Dreiecke, deren Ecken XY in diese Elemente fallen, durch $r\,dr\,d\varphi\; r'\,dr'\,d\varphi'$ gemessen; da jedes solche Dreieck mit der Fläche $\frac{1}{2} rr' \sin(\varphi' - \varphi)$ in Rechnung zu stellen ist, so hat man

$$\iiiint r^2 r'^2 \sin(\varphi' - \varphi)\, dr\, dr'\, d\varphi\, d\varphi' \qquad (1)$$

als Ausdruck für die Summe aller Dreiecksflächen, wenn die Integration so geführt wird, daß $\varphi' > \varphi$ ist. Nach Vollziehung der auf r, r' bezüglichen Integrationen, deren Grenzen $0, 2a\cos\varphi$, respektive $0, 2a\cos\varphi'$ sind, geht dies über in

Fig. 7.

$$\frac{64a^6}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi' \int_0^{\varphi'} \cos^3\varphi \cos^3\varphi' \sin(\varphi' - \varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{64a^6}{9}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi' \sin\varphi'\, d\varphi' \int_0^{\varphi'} \cos^4\varphi\, d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi'\, d\varphi' \int_0^{\varphi'} \cos^3\varphi \sin\varphi\, d\varphi\right\};$$

wendet man auf das erste Integral die Transformation[1])

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy = \int_0^a dx \int_0^x f(a - y, a - x)\, dy$$

an, so verwandelt es sich in das Integral

---

1) Das Integral $\int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy$ erstreckt sich über das gleichschenklige Dreieck OAO_1, Fig. 8; geht man von dem Koordinatensystem XOY zu dem System $X_1O_1Y_1$ über, so lauten die Transformationsgleichungen

$$x = a - y_1, \qquad y = a - x_1,$$

und das transformierte Integral ist

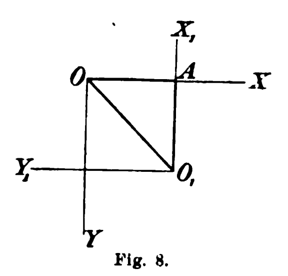


Fig. 8.

$$\int_0^a dx_1 \int_0^x f(a - y_1, a - x_1)\, dy_1 .$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi' \, d\varphi' \int_0^{\varphi'} \sin^3 \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 \varphi' \, d\varphi';$$

das zweite Integral hingegen ist gleich

$$\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi' \, d\varphi' \left\{\cos^4 \varphi\right\}_0^{\varphi'} = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 \varphi' \, d\varphi' - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \, d\varphi';$$

demnach hat (1) den Wert

$$\frac{64 a^6}{9 \cdot 4} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 \varphi' d\varphi' + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 \varphi' d\varphi' - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi' d\varphi' \right\} = \frac{11 a^6}{4 \cdot 18}.$$

Da die Menge der Dreiecke, übereinstimmend mit der Menge d Punktepaare in der Halbkreisfläche, durch $\left(\frac{\pi a^2}{2}\right)$ gemessen wird, ist die verlangte mittlere Fläche

$$\mu(AXY) = \frac{11 a^2}{18 \pi}.$$

58. Dritter Satz über Mittelwerte. „Ist μ der Mittelwe einer Größe S, welche von n in dem ebenen Gebiete A beliebig a genommenen Punkten abhängt, μ_1 der Mittelwert derselben Gröl für den Fall, daß einer der Punkte an der Begrenzung von A a genommen wird; ändert man ferner A um den differentiellen Betr dA und bezeichnet die Änderung von μ mit $d\mu$, so besteht zwisch diesen Größen die Differentialgleichung

$$A\,d\mu = n(\mu_1 - \mu)\,dA.\text{“}$$

Alle Größen S, welche zu Punktsystemen in dem erweitert Gebiete $A + dA$ gehören, ergeben die Summe

$$(\mu + d\mu)(A + dA)^n, \qquad ($$

d. i. das Produkt aus ihrem Mittelwerte mit der Menge der Punl systeme.

Die Summe zerfällt in die Summe solcher S, welche zu Punl systemen in A gehören, — diese Summe beträgt

$$\mu A^n; \qquad ($$

— und in die Summe solcher S, welche zu Punktsystemen gehör die aus $n - 1$ Punkten in A und einem Punkt in dA bestehen, diese Summe beträgt

$$n\mu_1 A^{n-1}\,dA. \qquad ($$

Bleibt man bei Größen von der Ordnung dA stehen, so ist damit die Summe aller S erschöpft; denn Punktsysteme, in welchen mehr als ein Punkt auf dA entfällt, führen zu Gliedern höherer Ordnung in Bezug auf dA.

Entwickelt man auch den Ausdruck (1) bis auf Glieder der ersten Ordnung und setzt ihn dann der Summe der Ausdrücke (2) und (3) gleich, so ergibt sich:

$$\mu A^n + A^n d\mu + n\mu A^{n-1} dA = \mu A^n + n\mu_1 A^{n-1} dA,$$

woraus nach entsprechender Reduktion

$$A d\mu = n(\mu_1 - \mu) dA$$

folgt.

Mittels dieser Gleichung kann aus bekanntem μ_1, dessen Bestimmung sich mitunter einfacher gestaltet als die direkte Berechnung von μ, dieses letztere ermittelt werden. Durch eine zweckmäßige Wahl von dA, welche die Angabe des Verhältniswertes $\frac{d\mu}{dA}$ zuläßt, kann unter Umständen die Integration erspart werden.

Zur Erläuterung diene die folgende, in Nummer 52 bereits gelöste Aufgabe: Auf einer geraden Strecke von der Länge a werden zwei Punkte X, Y willkürlich angenommen; es ist der Mittelwert μ der n-ten Potenz von $XY = s$ zu bestimmen. — Läßt man X mit einem Endpunkt der Strecke zusammenfallen, so wird μ_1 der Mittelwert der n-ten Potenz des Abstandes von Y von jenem Endpunkt; die Wahrscheinlichkeit, daß n weitere Punkte innerhalb dieses Abstandes zu liegen kommen, ist einerseits $\frac{\mu_1}{a^n}$, andererseits gleichbedeutend mit der Wahrscheinlichkeit, daß Y unter $n+1$ Punkten der letzte sei; folglich ist $\frac{\mu_1}{a^n} = \frac{1}{n+1}$, woraus $\mu_1 = \frac{a^n}{n+1}$. Läßt man nun a um da wachsen, so ergibt sich zur Bestimmung von μ die Differentialgleichung

$$a d\mu = 2\left(\frac{a^n}{n+1} - \mu\right) da,$$

welche sich auf die Normalform der linearen Gleichung:

$$\frac{d\mu}{da} + \frac{2}{a}\mu = \frac{2a^{n-1}}{n+1}$$

bringen läßt; ihr allgemeines Integral ist

$$a^2\mu = C + \frac{2a^{n+2}}{(n+1)(n+2)},$$

und da μ mit a zugleich verschwindet, so ist endgiltig

$$\mu = \frac{2a^n}{(n+1)(n+2)}.$$

59. Das Vierpunktproblem. *In einer gegebenen ebenen Fi[g] werden vier Punkte beliebig angenommen; wie groß ist die Wahrsche[in]lichkeit, daß sie sich zu einem konvexen Viereck verbinden lassen?*

Die Aufgabe kommt auf die folgende zurück: Nachdem d[rei] Punkte angenommen worden, die Wahrscheinlichkeit zu bestimm[en], daß der vierte Punkt in das durch sie bestimmte Dreieck falle, w[o-] durch ein *nicht*konvexes Viereck zustande kommt. Diese Wahrsche[in-] lichkeit ist aber gleich der mittleren Fläche μ des durch die d[rei] Punkte bestimmten Dreiecks dividiert durch die Fläche F der Fig[ur]. Und da jeder der vier Punkte als der letzte gelten kann, so ist [die] totale Wahrscheinlichkeit, daß einer von den vier Punkten in [das] Dreieck aus den drei andern falle, gleich $\frac{4\mu}{F}$, folglich die Wa[hr-] scheinlichkeit eines konvexen Vierecks:

$$p = 1 - \frac{4\mu}{F}.$$

Die Schwierigkeit der Lösung des Problems in besonderen Fäll[en] liegt also in der Bestimmung von μ.

Die vorstehende Aufgabe wird[1]) als die erste bezeichnet, welc[he] seit Buffons Nadelproblem auf dem Gebiete der geometrischen Wa[hr-] scheinlichkeit gestellt worden ist; ihr Urheber ist J. J. Sylvester.

Spezielle Fälle des Vierpunktproblems, betreffend das Dreie[ck], das Parallelogramm, das reguläre Seckseck und den Kreis, sind v[on] Woolhouse[2]) und von Crofton[3]) behandelt worden. Daß die Wa[hr-] scheinlichkeit p für den Kreis unter allen konvexen Figuren am größten i[st], hat der letztere bewiesen; für das Dreieck dürfte sie am kleinsten se[in].

In den beiden folgenden Nummern legen wir eine Lösung [für] das Dreieck und den Kreis vor.

60. Beispiel XXXIX. *Das Vierpunktproblem für das Drei[eck] zu lösen.*

Es sei $\mathfrak{ABC}$, Fig. 9, das gegebene Dreieck; seine Seiten mög[en] mit a, b, c bezeichnet werden.

Um den Mittelwert μ eines beliebigen Dreiecks XYZ innerh[alb] $\mathfrak{ABC}$ zu finden, gehen wir von der speziellen Aufgabe aus, den Mittelwert μ_1 eines Dreiecks $XY[Z]$ zu suchen, dessen eine Ecke, etwa Z, auf dem U[m-] fange von $\mathfrak{ABC}$, z. B. in $\mathfrak{AB} = c$ liegt. Zerle[gt] man $\mathfrak{ABC}$ durch $\mathfrak{C}Z$ in die beiden Teile

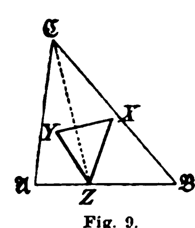


Fig. 9.

$$\mathfrak{AC}Z = A, \qquad \mathfrak{BC}Z = B,$$

so daß $\mathfrak{ABC} = A + B$ ist, so ergibt sich μ_1 [in] *dieser Lage von Z* mit Hilfe des Satzes in Nr. [...], wenn man kennt:

1) M. W. Crofton, Probability. Encycl. Brit., 9. edit. (1885), XIX, Art. 6[...]
2) Educational Times 1867. 3) l. c.

den Mittelwert eines Dreiecks XYZ in $\mathfrak{A}\mathfrak{C}Z$,
den Mittelwert eines Dreiecks XYZ in $\mathfrak{B}\mathfrak{C}Z$,
den Mittelwert eines Dreiecks XYZ in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, wobei X in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}Z$, Y in $\mathfrak{B}\mathfrak{C}Z$ liegt; nach Nr. 55 ist der erste $\frac{4}{27}A$, der zweite $\frac{4}{27}B$, der dritte nach dem Satze Nr. 54 gleich $\frac{1}{9}(A+B)$. Mithin hat man zur Bestimmung von $\mu_1(Z)$ die Gleichung:

$$(A+B)^2\mu_1(Z) = \frac{4}{27}A^3 + \frac{4}{27}B^3 + \frac{2}{9}AB(A+B).$$

Daraus berechnet sich zunächst

$$\mu_1(Z) = \frac{2}{27}\left\{2(A+B) - \frac{3AB}{A+B}\right\} = \frac{2}{27}(A+B)\left\{2 - \frac{3}{c^2}x(c-x)\right\},$$

wenn $\mathfrak{A}Z = x$ gesetzt wird; demnach ist der Mittelwert von ZXY, wenn alle Lagen von Z auf $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ berücksichtigt werden,

$$\mu_1 = \frac{1}{c}\int_0^c \mu_1(Z)\,dx = \frac{1}{9}(A+B) = \frac{1}{9}F,$$

also bloß abhängig von der Fläche F des Dreiecks und daher giltig, wo auch Z auf dessen Umfange angenommen wird.

Zur Bestimmung von μ hat man nun auf Grund des Satzes in Nr. 58 die Differentialgleichung:

$$F\,d\mu = 3\,dF\left(\frac{1}{9}F - \mu\right);$$

denkt man sich die Erweiterung von F um dF so ausgeführt, daß das Dreieck dabei sich ähnlich bleibt, so ist

$$\frac{\mu + d\mu}{F + dF} = \frac{\mu}{F} = \frac{d\mu}{dF};$$

dadurch verwandelt sich obige Gleichung in

$$\mu = 3\left(\frac{1}{9}F - \mu\right),$$

woraus

$$\mu = \frac{1}{12}F.$$

Nach der allgemeinen Formel der Nr. 59 ist hiernach die Wahrscheinlichkeit eines nichtkonvexen Vierecks $\frac{1}{3}$, die eines konvexen $\frac{2}{3} = 0{,}666\cdots$.

61. Beispiel XL. *Das Vierpunktproblem für den Kreis zu lösen.* Wir gehen wieder zunächst darauf aus, die mittlere Fläche μ_1 eines Dreiecks XYZ zu bestimmen, von welchem ein Eckpunkt, Z, auf dem Umfange liegt, Fig. 10.

Zerlegt man den Kreis aus Z in die beiden Halbkreise $A = B = \frac{\pi a^2}{2}$, so ist der Mittelwert eines Dreiecks ZXY in A oder in B nach Nr. 57 gleich $\frac{11 a^2}{18 \pi}$; der Mittelwert eines Dreiecks ZXY, das, wie das eingezeichnete, einen Eckpunkt in A, den andern in B hat, beträgt auf Grund des Satzes in Nr. 54 $\frac{4 a^2}{3 \pi}$. Demnach hat man zur Bestimmung von μ_1 nach Nr. 53 die Gleichung:

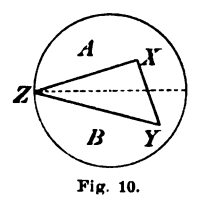


Fig. 10.

$$(\pi a^2)^2 \mu_1 = \left(\frac{\pi a^2}{2}\right)^2 \frac{11 a^2}{18 \pi} + \left(\frac{\pi a^2}{2}\right)^2 \frac{11 a^2}{18 \pi} + 2 \left(\frac{\pi a^2}{2}\right)^2 \frac{4 a^2}{3 \pi}$$

und findet daraus

$$\mu_1 = \frac{35 a^2}{36 \pi}.$$

Die Bestimmung der mittleren Fläche μ eines beliebigen Dreiecks XYZ im Kreise kann nun mit Hilfe der in Nr. 58 entwickelten Differentialgleichung erfolgen; diese lautet im vorliegenden Falle:

$$\pi a^2 d\mu = 6 \pi a \, da \left(\frac{35 a^2}{36 \pi} - \mu\right),$$

wenn man sich den Kreis durch einen Ring von der Breite da erweitert denkt; dann aber ist auch

$$\frac{\mu + d\mu}{\pi a^2 + 2 \pi a \, da} = \frac{\mu}{\pi a^2} = \frac{d\mu}{2 \pi a \, da};$$

mit Benutzung dieser Relation ergiebt sich ohne Integration

$$\mu = \frac{35 a^2}{48 \pi}.$$

Hiernach ist die Wahrscheinlichkeit eines nichtkonvexen Vierecks im Kreise $\frac{35}{12 \pi^2}$, die eines konvexen $1 - \frac{35}{12 \pi^2} = 0{,}7045 \cdots$.

62. Willkürliche Gerade in der Ebene. Das System der Geraden in der Ebene kann aufgelöst werden in einfach unendlichviele Parallelsysteme und in zweifach unendlichviele Strahlenbüschel.

Die Menge paralleler Geraden zwischen zwei bestimmten Grenzlagen wird durch den senkrechten Abstand dieser Grenzlagen gemessen.

Die Menge der Geraden, welche durch einen Punkt gehen und zwischen zwei Grenzlagen sich befinden, hat das Bogenmaß des Winkels dieser Grenzlagen zum Maße; insbesondere ist π die Menge aller Geraden durch einen Punkt.

Die Menge der Geraden, deren Abstand von einem festen Punkte zwischen $l + dl$ liegt und deren Neigung zu einer festen Geraden zwischen θ und $\theta + d\theta$ variiert, hat den Ausdruck $dl \, d\theta$.

Die Menge der Geraden, welche nach Lage und Richtung vorgeschriebenen Bedingungen zu entsprechen haben, wird durch das Integral $\iint dl\,d\theta$ bestimmt, wobei das Integrationsgebiet den Bedingungen entsprechend zu begrenzen ist.

Von besonderer Wichtigkeit ist es, ein Maß für die Menge der Geraden zu finden, welche eine geschlossene Kurve schneiden. Von der Erwägung ausgehend, daß durch alle Punkte der Ebene gleichviele Gerade hindurchgehen und daß die Menge der Punkte auf einer Kurve durch deren Länge gemessen wird, kommt man zu dem Schlusse, daß die Länge L der Kurve auch ein Maß für die Menge der sie schneidenden Geraden sei. Dieser Schluß ist aber nur dann statthaft, wenn jede Gerade gleich oft zur Zählung kommt, und dies ist der Fall, wenn die Kurve nach außen *durchaus konvex* ist, weil dann jede Gerade sie zweimal schneidet und daher zweimal gezählt wird.

Nach den vorhin entwickelten Grundsätzen wäre die in Rede stehende Menge durch $\iint dl\,d\theta$ zu bestimmen. Integriert man bei innenliegendem Ursprung O, Fig. 11, und festem θ zunächst nach l, so ergibt sich, weil dann θ aller Werte zwischen 0 und 2π fähig ist, der Ausdruck

$$\int_0^{2p} l\,d\theta,$$

welcher thatsächlich die Länge der Kurve vorstellt[1]).

Fig. 11.

Ist die Kurve nicht durchweg konvex, so tritt an die Stelle ihrer Länge die Länge eines sie umspannenden Fadens.

Liegen in einer Ebene zwei konvexe Konturen derart, daß der eine (von der Länge L) den andern (von der Länge L') umschließt, so kommt die Wahrscheinlichkeit, daß eine den äußern Umriß schneidende, sonst beliebig gezogene Gerade auch den innern Umriß schneide, gleich dem Verhältnis $\frac{L'}{L}$ der Längen. Dieser Satz läßt sich bei der Lösung von Aufgaben über geometrische Wahrscheinlichkeit in mannigfacher Weise verwerten.

63. Beispiel XLI. *Eine Scheibe mit konvexem Umriß wird auf eine Ebene geworfen, die mit äquidistanten Parallelen überzogen ist; es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß die Scheibe eine der Parallelen decke, vorausgesetzt, daß sie vermöge ihrer Form und Größe nicht mehrere zugleich decken kann.*

---

1) Cauchy, Compt. rend. XIII (1841), p. 1060 ff.

Diese Aufgabe kann in die folgende umgewandelt werden: Di Scheibe ist von einem Kreise umschlossen, dessen Durchmesser gleic ist dem Abstand $2a$ der Parallellinien; wie groß ist die Wahrschei lichkeit, daß eine Gerade, welche den Kreis schneidet, auch den Un fang der Scheibe treffe? Denn wird die Scheibe in fester Verbindun mit dem Kreise auf die besagte Ebene geworfen, so *muß* eine d Parallelen den Kreis schneiden; es handelt sich also nur mehr u die Wahrscheinlichkeit, daß sie auch die Scheibe treffe, und diese i $\frac{L}{2\pi a}$, wenn L den Umfang der Scheibe bedeutet.

Die Lösung des Nadelproblems (Nr. 48) ist hierin als speziell Fall enthalten; denn man kann die Nadel, deren Länge $2c$ ist, a Grenzform einer konvexen Scheibe vom Umfange $4c$ ansehen; der nach ist die Wahrscheinlichkeit, daß die auf die Ebene geworfe Nadel eine der Parallelen kreuze, $p = \frac{4c}{2\pi a} = \frac{2c}{\pi a}$.

Die vorstehende Aufgabe verdankt ihren Ursprung einem Frankreich unter dem Namen „jeu du joint couvert" geübten Spie bei welchem eine Münze auf einen durch Fugen in gleichbrei Streifen zerlegten Fußboden geworfen und darauf gewettet wird, d sie eine Fuge decken werde. Aufgaben ähnlicher Art sind v Buffon[1]) zuerst gestellt worden; Verallgemeinerungen derselben h Barbier[2]) behandelt.

64. Beispiel XLII. *Die Wahrscheinlichkeit zu finden, daß ei Gerade, welche eine konvexe Kurve L schneidet, auch eine außerh ihr befindliche konvexe Kurve L schneiden werde.*

Die Lösung erfordert die Bestimmung des Maßes für die Men jener Geraden, welche beide Kurven zugleich schneiden.

Zu diesem Ende verzeichne man die inneren und äußeren g meinsamen Tangenten der Kurven und überlege an der Hand d Fig. 12 wie folgt: Die Menge der Gerad welche den konvexen Umriß $OPLQO$, u derjenigen, welche den konvexen Um $OP'L'Q'O$ schneiden, ist durch die Sum der Umfänge beider, also durch die Länge des beide Kurven umspannenden und si kreuzenden Bandes gemessen. Unter dies Geraden kommen diejenigen, welche L u L' zugleich schneiden, zweimal vor. Vergleicht man die beschriebe Menge mit der Mannigfaltigkeit jener Geraden, welche den konvex Umriß $LRR'L'S'SL$ schneiden, die gemessen wird durch die Länge des beide Kurven umspannenden und sich nicht kreuzenden Band so erkennt man leicht, daß in dieser Mannigfaltigkeit alle Gerad

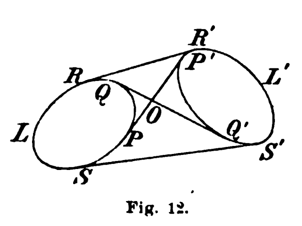


Fig. 12.

1) l. c. Nr. 48. 2) Journal Liouville, (2) V. 1860.

der erstbetrachteten Menge auch vorkommen, daß jedoch die L und L' zugleich schneidenden darin nur einfach auftreten; daher mißt die Differenz

$$X - Y$$

die Menge dieser letzteren Geraden.

Da L (darunter die Länge der Kurve verstanden) die Menge der Geraden bedeutet, welche die gleichnamige Kurve schneiden, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine willkürliche unter diesen Geraden auch L' treffe,

$$p = \frac{X - Y}{L}.$$

Ein einfaches Beispiel hierzu bietet die folgende Aufgabe: Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß eine Gerade, welche die Halbkreislinie ACB (Fig. 13) trifft, auch die supplementäre Halbkreislinie ADB schneide.

Zunächst denke man sich jede der Halbkreislinien durch den Durchmesser AOB zu einem konvexen Kontur ergänzt. Man erkennt nun leicht, daß

$$L = \pi a + 2a, \quad X = 2\pi a + 4a, \quad Y = 2\pi a$$

ist; infolge dessen hat man

Fig. 13.

$$p = \frac{4a}{\pi a + 2a} = \frac{4}{\pi + 2} = 0{,}7779 \cdots.$$

Indessen kann die Aufgabe auch mittels des Schlußsatzes von Nr. 62 gelöst werden. Die Gerade, welche ACB schneidet, trifft auch und nur dann den supplementären Halbkreis, wenn sie den Durchmesser AB schneidet; dieser aber kann als die Grenzform eines geschlossenen konvexen Umrisses von der Länge $4a$ innerhalb des ebenfalls konvexen Umrisses $ACBOA$ von der Länge $\pi a + 2a$ betrachtet werden.

65. Beispiel XLIII. *Es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß zwei beliebige Sekanten eines konvexen geschlossenen Umrisses einander innerhalb desselben schneiden.*

Die Länge des Umrisses sei L, die von ihm eingeschlossene Fläche heiße F.

Die auf der erstgezogenen Sekante ausgeschnittene Sehne c kann als die Grenzform eines geschlossenen konvexen Umrisses von der Länge $2c$ angesehen werden, der innerhalb des gegebenen liegt; daher ist $\frac{2c}{L}$ die Wahrscheinlichkeit, daß die zweite Sekante *diese* Sehne, also die erste Sekante innerhalb L schneide. Sind l, θ die Parameter der ersten Sekante in der in Nr. 62 erklärten Weise, so ist $\frac{dl\,d\theta}{L}$ die Wahrscheinlichkeit der Sehnenlänge c, folglich

$$\frac{2c}{L^2}\,dl\,d\theta$$

die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, daß bei dieser Lage der ersten Sekante ein innerer Schnitt erfolge. Die totale Wahrscheinlichkeit eines solchen Schnittes ist also:

$$p = \frac{2}{L^2}\int\int c\,dl\,d\theta = \frac{2}{L^2}\int d\theta \int c\,dl;$$

nun bestimmt $\int c\,dl$, auf alle Sekanten einer bestimmten Richtung bezogen, die Fläche F, und die noch übrige Integration nach θ ist zwischen den Grenzen 0 und π vorzunehmen; daher ist endgiltig

$$p = \frac{2\pi F}{L^2}.$$

Zu einem andern Ausdruck für p gelangt man, wenn man die mittlere Länge der Sehne c, $\mu(c)$, zu Hilfe nimmt; dann ist nämlich unmittelbar (Nr. 51)

$$p = \frac{2\mu(c)}{L}.$$

Durch Vergleichung beider Resultate ergibt sich die mittlere Sehnenlänge eines konvexen Konturs von der Länge L und der umschlossenen Fläche F:

$$\mu(c) = \frac{\pi F}{L}.$$

Aus diesen allgemeinen Formeln ergibt sich beispielsweise, daß zwei beliebige Sekanten eines Quadrates von der Seite a sich mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{\pi}{8} = 0{,}3927\cdots$ innerhalb des Quadrates schneiden, und daß die mittlere Länge der auf den Sekanten ausgeschnittenen Sehnen gleichkommt $\frac{\pi a}{4}$; daß zwei beliebige Sekanten eines Kreises vom Halbmesser a sich mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} = 0{,}5$ innen schneiden und die mittlere Länge der Sehne $\frac{\pi a}{2}$ beträgt[1]).

II. Abschnitt. Wahrscheinlichkeiten, betreffend die Ergebnisse wiederholter Beobachtungen.

§ 1. Das Theorem von Bernoulli.

66. Entwicklung der Fragestellung. Aus der Verwirklichung gewisser allgemeiner Bedingungen möge mit Notwendigkeit eines der Ereignisse E, F hervorgehen; für das Eintreten des ersten bestehe

1) Bezüglich weiterer Beispiele über „Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte" kann auf des Verf.s gleichnamige Schrift (Leipzig, 1884) verwiesen werden.

die Wahrscheinlichkeit p, für das zweite die Wahrscheinlichkeit q, so daß $p + q = 1$ ist. Die Verwirklichung (Versuch, Beobachtung) soll nicht einmal, sondern s-mal geschehen; jedoch sei ausdrücklich vorausgesetzt, daß der Komplex der allgemeinen Bedingungen in dem Sinne unveränderlich bleibe, daß die Wahrscheinlichkeiten p, q bei jedem Versuche dieselben Werte besitzen. Das einfachste Schema für diesen Sachverhalt kann in wiederholten Ziehungen einer Kugel aus einer Urne erblickt werden, welche weiße und schwarze Kugeln in bestimmtem Mengenverhältnis enthält; die gezogene Kugel wird jedesmal zurückgelegt und unter die andern gemengt, ehe der nächste Zug geschieht; das Erscheinen einer weißen Kugel gelte als Ereignis E, das einer schwarzen als Ereignis F.

Wenn man blos die Wiederholungszahlen der Ereignisse E, F in Betracht zieht und von ihrer Reihenfolge, falls sie überhaupt feststellbar wäre, absieht, so sind $s + 1$ verschiedene Gesamterfolge der s Beobachtungen möglich. Es kann

das Ereignis E s-mal, das Ereignis F gar nicht,
" " " $s-1$ " " " " 1 mal,
" " " $s-2$ " " " " 2 "
. . . .
das Ereignis E gar nicht, das Ereignis F s-mal

eintreten. Die Wahrscheinlichkeiten dieser Kombinationen sind durch die aufeinander folgenden Glieder der nach fallenden Potenzen von p geordneten Entwicklung von

$$(p + q)^s$$

bestimmt (s. Nr. 37); insbesondere stellt das Glied

$$\frac{s!}{m!\,n!}\,p^m q^n \qquad (m + n = s) \tag{1}$$

die Wahrscheinlichkeit dar, daß der Gesamterfolg in der m-maligen Wiederholung von E und der n-maligen Wiederholung von F bestehen werde oder, falls er schon vorliegt, bestehe.

Es mag hervorgehoben werden, daß diese Wahrscheinlichkeitsmessung für einen Gesamterfolg gerade so wie die Wahrscheinlichkeitsbestimmung für den einzelnen Versuch lediglich auf der Wahrscheinlichkeitsdefinition beruht und demgemäß folgenden Sinn hat: In dem Gesamtumfang der Ausführungsmöglichkeiten der s Versuche machen diejenigen, welche mit Notwendigkeit zu dem in Rede stehenden Gesamterfolg hinführen, einen Teil aus, dessen Verhältnis zum Ganzen durch die Zahl (1) bestimmt ist.

Hinsichtlich der möglichen Erfolge der s Versuche sind nun zwei Fragen von besonderer Bedeutung: Welcher unter den Erfolgen ist der wahrscheinlichste? Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß

sich ein Erfolg einstellen werde, der von dem wahrscheinlichsten nicht mehr als innerhalb vorgegebener Grenzen abweicht?

Der Sinn des Wortes „Abweichung“ ist hier der folgende: Sind m', n' die Wiederholungszahlen von E und F in der wahrscheinlichsten Kombination, so weist eine Kombination mit den Wiederholungszahlen m, n die Abweichung $m - m' = -(n - n')$ auf; um so viel übertrifft (wenn $m - m' > 0$) die Wiederholungszahl von E in der letzteren Kombination jene in der wahrscheinlichsten Kombination, oder um so viel bleibt sie hinter ihr zurück (wenn $m - m' < 0$).

Die Beantwortung der aufgestellten Fragen bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten dar. Die erste erfordert die Feststellung des größten Gliedes in der Entwicklung von $(p + q)^s$; die Exponenten von p, q in diesem Gliede kennzeichnen die wahrscheinlichste Kombination, der Wert des Gliedes selbst gibt ihre Wahrscheinlichkeit. Um die zweite Frage zu beantworten, hätte man jene Glieder der Entwicklung auszurechnen, welche Abweichungen innerhalb der vorgezeichneten Grenzen aufweisen; ihre Summe gäbe die Wahrscheinlichkeit, daß diese Grenzen nicht überschritten werden.

Ist s eine nur mäßige Zahl und sind auch p, q durch kleine Zahlen ausgedrückt, so verursacht die Ausführung dieser Rechnungen keine große Mühe. Wir wollen zwei Beispiele in dieser Art erledigen, um daran einige Wahrnehmungen zu knüpfen.

Aus einer Urne, welche zwei weiße und eine schwarze Kugel enthält, mögen 6 Ziehungen vorgenommen werden.

Die Entwicklung

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6 + 6\left(\frac{2}{3}\right)^5\frac{1}{3} + 15\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 20\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 15\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4 + 6\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \ldots$$

$$= \frac{64}{729} + \frac{192}{792} + \frac{240}{792} + \frac{160}{792} + \frac{60}{792} + \frac{12}{792} + \ldots$$

zeigt, daß die Kombination, welche 4 weiße und 2 schwarze Kugeln umfaßt, unter allen die wahrscheinlichste ist; auf die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, daß die Wiederholungszahl der weißen Kugel nicht über 5 und nicht unter 3 falle, die Abweichung von der wahrscheinlichsten Wiederholungszahl also nicht mehr als 1 nach auf- oder abwärts betrage, gibt sie die Antwort:

$$\frac{192}{791} + \frac{240}{792} + \frac{160}{792} = \frac{592}{792}.$$

Aus derselben Urne sollen doppelt so viel, das sind 12 Ziehungen vorgenommen werden.

Die 13 Glieder der nach fallenden Potenzen von $\frac{2}{3}$ geordneten Entwicklung von $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^{12}$ sind Brüche mit dem Nenner 531441 und den Zählern:

4096, 24576, 67584, 112640, 126720, 101376, 59136, 25344, 7920, 1760, 264, 24, 1.

Daraus ist zu entnehmen, daß die Kombination von 8 weißen und 4 schwarzen Kugeln die wahrscheinlichste ist; daß ferner die Wahrscheinlichkeit, weiß werde nicht öfter als 10mal und nicht seltener als 6mal sich einstellen, gleich ist

$$\frac{67584}{531441}+\frac{112640}{531441}+\frac{126720}{531441}+\frac{101376}{531441}+\frac{59131}{531441}=\frac{467456}{531441}.$$

An diesen Beispielen sei folgendes hervorgehoben.

Bei 6 Versuchen hat die wahrscheinlichste Kombination die Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{240}{792}=0{,}3030\cdots,$$

bei 12 Versuchen — die übrigen Umstände blieben unverändert — die Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{126720}{531441}=0{,}2380\cdots;$$

diese Wahrscheinlichkeit hat sich mit der wachsenden Anzahl der Versuche vermindert. Diese Erscheinung kann nicht überraschen, wenn man beachtet, daß mit der Anzahl der Versuche auch die Menge der möglichen Erfolge wächst.

Für die Grenzen 5, 3 der Wiederholungszahl weißer Kugeln ergab sich bei 6 Versuchen die Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{592}{792}=0{,}7474\cdots;$$

für die Grenzen 10, 6 bei 12 Versuchen die Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{467456}{531441}=0{,}8796\cdots.$$

Das Verhältnis der Grenzen zur Gesamtzahl der Versuche ist beidemal dasselbe, nämlich $\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$ und $\frac{3}{6}=\frac{6}{12}$, die Wahrscheinlichkeit der Nichtüberschreitung dieser Grenzen fiel das zweite Mal größer aus.

Die Reihe der Wahrscheinlichkeiten ist asymmetrisch, nach der Seite des Ereignisses mit der größeren Wahrscheinlichkeit kürzer und aus größeren Zahlen bestehend. Sie würde symmetrisch ausfallen, wenn $p=q=\frac{1}{2}$ wäre.

Bei *sehr großen* Werten von s und weiteren Grenzen der Abweichung wird die direkte Erledigung der gestellten Fragen wegen der Weitläufigkeit und Umständlichkeit der erforderlichen Rechnungen physisch undurchführbar. Für solche Fälle sind seit der Zeit, da

Jakob Bernoulli diese Untersuchungen in Angriff genommen[1]), Näherungsmethoden ausgebildet worden, um welche sich insbesondere A. de Moivre[2]), J. Stirling[3]), C. Maclaurin[4]), L. Euler[5]) und P. S. Laplace[6]) verdient gemacht haben. Mit der Entwicklung dieser Analyse und ihrer Anwendung auf verschiedene Probleme beschäftigen sich die folgenden Nummern.

67. Wahrscheinlichstes Ergebnis einer Versuchsreihe. Die Ermittlung desselben fällt zusammen mit der Aufsuchung des größten Gliedes der Entwicklung von $(p+q)^s$. Ist $\frac{s!}{m!\,n!}p^m q^n$ dieses Glied, so steht es mit dem vorangehenden und nachfolgenden in der Beziehung:

$$\frac{s!}{(m+1)!\,(n-1)!}p^{m+1}q^{n-1} < \frac{s!}{m!\,n!}p^m q^n > \frac{s!}{(m-1)!\,(n+1)!}p^{m-1}q^{n+1},$$

woraus einerseits

$$\frac{m+1}{n}\,\frac{q}{p} > 1,$$

andererseits

$$\frac{n+1}{m}\,\frac{p}{q} > 1$$

folgt; eliminiert man hieraus n und q mittels der Gleichungen $m+n=s$ und $p+q=1$, so ergeben sich für m die Grenzen:

$$sp - q < m < sp + p. \tag{1}$$

Da das Intervall dieser Grenzen 1 beträgt, so ist durch sie, sofern sie nicht ganze Zahlen sind, m als ganze Zahl *eindeutig* bestimmt. Ist hingegen $sp-q$ und infolge dessen auch $sp+p$ eine ganze Zahl, so ergeben sich zwei um eine Einheit verschiedene Werte von m, die Entwicklung hat *zwei* gleiche Glieder, welche größer sind als alle übrigen.

Wie dem auch sei, der Quotient $\frac{m}{s}$ unterscheidet sich höchstens um $\frac{1}{s}$ von p und ebenso der Quotient $\frac{n}{s}$ höchstens um $\frac{1}{s}$ von q; ist sp eine ganze Zahl, dann ist $m=sp$ die der Relation (1) entsprechende Zahl und $\frac{m}{s}$ dann genau gleich p, ebenso $\frac{n}{s}$ genau gleich q.

---

1) Ars conjectandi, pars quarta, p. 210—239 (Ostwalds Klassiker Nr. 108, p. 71—107).

2) Doctrine of chances (3. Aufl. 1756), p. 243—254; Miscellanea analytica (1730), Supplem.

3) Methodus differentialis (1730). 4) Treatise of Fluxions (1742).

5) Institutiones calculi differentialis (1755).

6) Théorie analyt. d. probab. (1812), chap. III.

Unter allen Ergebnissen, die in s Versuchen möglich sind, ist hiernach dasjenige am wahrscheinlichsten, in welchem das Verhältnis $m : n$ der Wiederholungszahlen von E und F dem Verhältnis $p : q$ der Wahrscheinlichkeiten gleich oder am nächsten ist.

Die weiter folgende Analyse läßt es zu,

$$m = sp, \quad n = sq$$

zu setzen und daher das größte Glied in der Form

$$T_0 = \frac{s!}{(sp)!\,(sq)!} p^{sp} q^{sq} \tag{2}$$

auch dann zu schreiben, wenn sp, sq nicht ganze Zahlen sein sollten.

Zur Erläuterung dienen die folgenden Zahlenbeispiele. Aus einer Urne mit 3 weißen und 2 schwarzen Kugeln werden 400, beziehungsweise 623, 624 Ziehungen gemacht; welches ist in jedem Falle das wahrscheinlichste Resultat?

Die Wahrscheinlichkeit einer weißen Kugel ist $p = \frac{3}{5}$, die einer schwarzen $q = \frac{2}{5}$.

Bei $s = 400$ ist $sp = 240$, $sq = 160$, und da dies ganze Zahlen sind, so besteht die wahrscheinlichste Kombination aus 240 weißen und 160 schwarzen Kugeln.

In dem Falle $s = 623$ sind $373\frac{2}{5}$, $374\frac{2}{5}$ die Grenzen des m einschließenden Intervalls; daher ist $m = 374$, $n = 249$.

In dem Falle $s = 624$ findet man 374, 375 als Grenzen des Intervalls für m; man darf daher ebenso wohl $m = 374$, $n = 250$ wie $m = 375$, $n = 249$ setzen.

68. Näherungsweise Darstellung des größten Gliedes. Ist s eine große Zahl, so darf man die in dem maximalen Gliede T_0 auftretenden Faktoriellen mittels der Stirlingschen Formel ausdrücken; darnach ist

$$s! = s^{s+\frac{1}{2}} e^{-s} \sqrt{2\pi}$$

$$(sp)! = (sp)^{sp+\frac{1}{2}} e^{-sp} \sqrt{2\pi}$$

$$(sq)! = (sq)^{sq+\frac{1}{2}} e^{-sq} \sqrt{2\pi};$$

daraus ergibt sich für den Binomialkoeffizienten $\frac{s!}{(sp)!\,(sq)!}$ der angenäherte Wert

$$\frac{1}{p^{sp+\frac{1}{2}} q^{sq+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi s}}$$

und für das größte Glied der näherungsweise Ansatz:

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}}. \tag{3}$$

Bei demselben p, q nimmt also die Wahrscheinlichkeit der wahrscheinlichsten Kombination mit wachsender Versuchszahl, und zwar im Verhältnis ihrer reziproken Quadratwurzel, ab. Bei gegebenem s hat T_0 den kleinsten Wert, wenn $p = q = \frac{1}{2}$ ist.

Daß bei 1000 Würfen mit einer Münze gleich oft Wappen und Schrift sich einstelle, hat die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{\sqrt{500\,\pi}} = 0{,}025231;$$

daß in 1000 Ziehungen aus einer Urne mit 4 weißen und 1 schwarzen Kugel 800 weiße und 200 schwarze Kugeln erscheinen, ist mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{\sqrt{320\,\pi}} = 0{,}031539$$

zu erwarten.

Um zu zeigen, daß die Formel (3) auch schon bei mäßigem s ziemliche Annäherung gibt, benützen wir die beiden Beispiele in Nr. 66. Dort war $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$

und für $s = 6$ der strenge Wert von $T_0 = 0{,}3030$,
der angenäherte ist $0{,}3455$;
für $s = 12$ der strenge Wert von $T_0 = 0{,}2380$,
der angenäherte ist $0{,}2443$.

Welche Näherung sie bei großem s liefert, soll bei dem Falle $s = 1200$ durch Nebeneinanderstellung der strengen und der Näherungsrechnung dargethan werden; die linksstehende Rechnung ist mit Hilfe der in der Fußnote zu Nr. 10 an zweiter Stelle erwähnten Logarithmentafel der Fakultäten geführt.

$$T_0 = \frac{1200!}{800!\,400!}\,\frac{2^{800}}{3^{1200}}:$$

$\log 1200! = 3175{,}802827$
$\log 800! = 1976{,}887084$
$\log 400! = 868{,}806414$
$330{,}109329$
$800 \log 2 = 240{,}823997$
$570{,}933326$
$1200 \log 3 = 572{,}545506$
$\log T_0 = 0{,}387820 - 2$
$T_0 = 0{,}024424$

$$T_0 = \frac{3}{\sqrt{4800\,\pi}}$$

$\log 4800 = 3{,}681241$
$\log \pi = 0{,}497150$
$4{,}178391$
$2{,}089196$
$\log 3 = 0{,}477121$
$\log T_0 = 0{,}387925 - 2$
$T_0 = 0{,}024430$

69. Näherungsweise Darstellung eines Gliedes, das von dem maximalen eine Abweichung von der Ordnung $\sqrt{s}$ aufweist. Dasjenige Glied, welches dem größten Gliede vorangehend von diesem durch $l-1$ Glieder getrennt ist, hat den Ausdruck:

$$T_l = \frac{s!}{(sp+l)!\,(sq-l)!}\, p^{sp+l} q^{sq-l}; \tag{4}$$

das hierzu symmetrisch angeordnete Glied lautet:

$$T_{-l} = \frac{s!}{(sp-l)!\,(sq+l)!}\, p^{sp-l} q^{sq+l}. \tag{5}$$

Um für das erstgedachte Glied unter der Voraussetzung, daß l eine Zahl von der Ordnung $\sqrt{s}$ sei, und unter Vernachlässigung von Größen von der Ordnung $\frac{1}{s}$ aufwärts einen Näherungswert zu erhalten, drücke man zunächst die Fakultäten mit Hilfe der Stirlingschen Formel aus; dabei benütze man die Umformung

$$(sp+l)! = (sp+l)^{sp+l+\frac{1}{2}} e^{-sp-l} \sqrt{2\pi} = (sp)^{sp+l+\frac{1}{2}} \left(1+\frac{l}{sp}\right)^{sp+l+\frac{1}{2}} e^{-sp-l} \sqrt{2\pi}$$

und ähnlich bei $(sq-l)!$. Dadurch ergibt sich für T_l der Ausdruck:

$$T_l = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} \left(1+\frac{l}{sp}\right)^{-sp-l-\frac{1}{2}} \left(1-\frac{l}{sq}\right)^{-sq+l-\frac{1}{2}}.$$

Nun ist mit der oben angegebenen Approximation der natürliche Logarithmus

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log}\left(1+\frac{l}{sp}\right)^{-sp-l-\frac{1}{2}} &= -\left(sp+l+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{l}{sp}-\frac{l^2}{2s^2p^2}+\cdots\right) \\
&= -l-\frac{l}{2sp}-\frac{l^2}{2sp}+\frac{l^3}{6s^2p^2}+\cdots \\
\operatorname{Log}\left(1-\frac{l}{sq}\right)^{-sq+l-\frac{1}{2}} &= -\left(sq-l+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{l}{sq}-\frac{l^2}{2s^2q^2}-\cdots\right) \\
&= \quad l+\frac{l}{2sq}-\frac{l^2}{2sq}-\frac{l^3}{6s^2q^2}-\cdots;
\end{aligned}$$

die Summe dieser Logarithmen reduziert sich auf

$$\frac{(p-q)l}{2spq}-\frac{l^2}{2spq}+\frac{l^3}{6s^2p^2}-\frac{l^3}{6s^2q^2}+\cdots,$$

das Produkt der beiden Klammerfaktoren von T_l kann also durch

$$e^{\frac{(p-q)l}{2spq}-\frac{l^2}{2spq}+\frac{l^3}{6s^2p^2}-\frac{l^3}{6s^2q^2}+\cdots}$$

oder durch

$$e^{-\frac{l^2}{2spq}}\left(1+\frac{(p-q)\,l}{2spq}+\frac{l^3}{6s^2p^2}-\frac{l^3}{6s^2q^2}+\cdots\right)$$

ersetzt werden.

Hiernach ist

$$T_l=\frac{e^{-\frac{l^2}{2spq}}}{\sqrt{2\pi spq}}\left(1+\frac{(p-q)\,l}{2spq}+\frac{l^3}{6s^2p^2}-\frac{l^3}{6s^2q^2}+\cdots\right);$$

daraus ergibt sich ohne weitere Rechnung:

$$T_{-l}=\frac{e^{-\frac{l^2}{2spq}}}{\sqrt{2\pi spq}}\left(1-\frac{(p-q)\,l}{2spq}-\frac{l^3}{6s^2p^2}+\frac{l^3}{6s^2q^2}+\cdots\right).$$

Der gemeinsame Faktor beider Ausdrücke ist eine gerade Funktion von l; der zweite Faktor führt die Asymmetrie herbei; ist $p > q$, so ist $T_l > T_{-l}$.

Wird die Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten T_l, T_{-l} genommen, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, daß die Abweichung nach auf- oder abwärts l betrage, und diese ist

$$T_l+T_{-l}=\frac{2}{\sqrt{2\pi spq}}\,e^{-\frac{l^2}{2spq}}.$$

Sofern man also Glieder der Entwicklung zusammenfaßt, welche in Bezug auf das größte Glied symmetrisch angeordnet sind, darf man innerhalb der angegebenen Grenzen von l und mit der bezeichneten Genauigkeit die Werte von T_l durch die *gerade* Funktion

$$T_x=\frac{1}{\sqrt{2\pi spq}}\,e^{-\frac{x^2}{2spq}} \tag{6}$$

darstellen.

Indessen liegt es in der Natur dieser Funktion, in ihrer außerordentlich raschen Abnahme mit wachsendem x, daß man sie auch über die angegebenen Grenzen hinaus anwenden darf, ohne einen erheblichen Einfluß auf die ziffermäßigen Resultate befürchten zu müssen. Es werden für beträchtliche Abweichungen sowohl die strengen wie auch die nach dem Gesetze (6) gerechneten Näherungswerte von T_l so außerordentlich klein, daß sie bei Lösung einer praktischen Frage nicht in Betracht kommen.

Die rasche Abnahme von T_l mag aus dem folgenden Beispiele ersehen werden. Für $p=\frac{3}{5}$, $q=\frac{2}{5}$, $s=2500$, in welchem Falle l von der Ordnung von 50, also als ein mäßiges Vielfache von 50 sein darf, ergibt die Rechnung nach (6):

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{1200\pi}} = 0{,}016287$$

$$T_{50} = T_0 e^{-\frac{25}{12}} = 0{,}0020280$$

$$T_{80} = T_0 e^{-\frac{16}{3}} = 0{,}000078632$$

$$T_{100} = T_0 e^{-\frac{25}{3}} = 0{,}0000039149$$

$$T_{150} = T_0 e^{-\frac{75}{4}} = 0{,}00000000019318.$$

Die weitere Abnahme erfolgt so rasch, daß T_{500} erst an der 93. Stelle eine bedeutsame Ziffer hat.

70. Wahrscheinlichkeit, daß die Abweichung innerhalb gegebener Grenzen verbleibe. Die Wahrscheinlichkeit P, daß die Wiederholungszahl von E zwischen die Grenzen $sp - l$ und $sp + l$ und entsprechend dem die Wiederholungszahl von F zwischen $sq - l$ und $sq + l$ falle, mit andern Worten: daß die Abweichung des Erfolges von der wahrscheinlichsten Kombination dem Betrage nach l nicht überschreite, ist dargestellt durch die Summe

$$T_l + T_{-l} + \cdots + T_0 + T_{-1} + \cdots + T_{-l} = \sum_{-l}^{l} T_i.$$

Diese Summe läßt sich aber durch folgende Betrachtung auf ein Integral, und zwar mit großer Annäherung, zurückführen.

Faßt man die Gleichung (6) als Gleichung einer Kurve auf, wobei T_x die Ordinate bedeutet, so kann die Fläche zwischen der Kurve, der Abscissenachse und den Ordinaten T_l und T_{-l} näherungsweise mittels der zu den Abscissen $l, l-1, l-2, \cdots -(l-1)$ gehörigen Ordinaten wie folgt ausgedrückt werden:

$$T_l + T_{l-1} + \cdots + T_{-(l-1)};$$

ein mit diesem gleichberechtigter Ausdruck lautet[1]):

$$T_{l-1} + T_{l-2} + \cdots + T_{-l};$$

größere Genauigkeit wird erzielt, wenn man das Mittel beider Summen nimmt; demnach kann

$$\int_{-l}^{l} T_x dx = 2\int_{0}^{l} T_x dx = T_{l-1} + T_{l-2} + \cdots + T_{-(l-1)} + \frac{T_l + T_{-l}}{2},$$

1) Der erste Ausdruck entspricht der Summe der Rechtecke, welche erhalten werden, wenn man durch den Endpunkt jeder Ordinate bis an die benachbarte eine Parallele zu XX' nach rechts zieht; der zweite Ausdruck gibt die Summe der Rechtecke, welche durch das Ziehen der Parallelen nach links erhalten werden.

also

$$2\int_0^l T_x dx = \sum_{-l}^{l} T_i - \frac{T_l + T_{-l}}{2}$$

gesetzt werden, woraus[1])

$$\sum_{-l}^{l} T_i = 2\int_0^l T_x dx + \frac{T_l + T_{-l}}{2}$$

folgt.

Setzt man für T_x, T_l, T_{-l} die Werte der Gleichung (6) gemäß ein, so ergibt sich für P die Darstellung:

1) Diese Formel, welche wir hier aus einem Falle der einfachen mechanischen Quadratur gewonnen haben, ist zuerst von Laplace (l. c.) mittels der Eulerschen Summenformel abgeleitet worden. Diese löst in aller Strenge das analytische Problem, die Summe $\sum_0^{l-1} T_i$ durch ein Integral auszudrücken, und lautet:

$$\sum_0^{-1} T_i = \int_0^l T_x dx - \left\{\frac{1}{2} T - \frac{B_1}{2!} T' + \frac{B_2}{4!} T''' - \frac{B_3}{6!} T^{v} + \cdots\right\}_0^l ;$$

darin bedeuten T', T''', $\cdots$ Ableitungen von T nach x und B_1, B_2, B_3, $\cdots$ die Bernoullischen Zahlen $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $\cdots$. Beschränkt man sich mit Rücksicht auf die Natur der hier vorliegenden Funktion auf das Glied $\frac{1}{2} T$, so ist

$$\sum_0^{l-1} T_i = \int_0^l T_x dx - \frac{1}{2} T_l + \frac{1}{2} T_0$$

$$\sum_0^{-(l-1)} T_i = \int_0^{-l} T_x dx - \frac{1}{2} T_{-l} + \frac{1}{2} T_0 ,$$

woraus

$$\sum_0^{l-1} T_i + \sum_0^{-(l-1)} T_i = 2\int_0^l T_x dx - \frac{T_l + T_{-l}}{2} + T_0 ;$$

nun ist aber

$$\sum_0^{l-1} T_i + \sum_0^{-(l-1)} T_i = \sum_{-l}^{l} T_i - (T_l + T_{-l}) + T_0 ,$$

daher

$$\sum_{-l}^{l} T_i = 2\int_0^l T_x dx + \frac{T_l + T_{-l}}{2}$$

wie oben.

$$P = \frac{2}{\sqrt{2\pi s p q}} \int_0^l e^{-\frac{x^2}{2spq}} dx + \frac{e^{-\frac{l^2}{2spq}}}{\sqrt{2\pi s p q}},$$

welche noch dadurch vereinfacht werden kann, daß man

für $\frac{x}{\sqrt{2spq}}$ die neue Variable t,

für $\frac{l}{\sqrt{2spq}}$ den Buchstaben γ

einführt; alsdann wird

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi s p q}}. \tag{7}$$

71. Formulierung des Bernoullischen Theorems. Der Inhalt dessen, was in der gegenwärtigen Litteratur unter dem Namen des Bernoullischen Theorems geführt wird, hat erst durch Laplace[1]) die endgiltige Formulierung erhalten, in der wir das Theorem nunmehr vorführen. Man kann es in dem folgenden Satze zusammenfassen:

„*Wenn über zwei entgegengesetzte Ereignisse E und F, deren Wahrscheinlichkeiten p und q konstant sind, s Versuche angestellt werden, so ist unter allen möglichen Ergebnissen dasjenige am wahrscheinlichsten, in welchem das Verhältnis m : n der Wiederholungszahlen von E und F dem Verhältnis p : q der Wahrscheinlichkeiten gleich oder am nächsten ist.*

Unter der Voraussetzung, daß die Zahl s der Versuche groß sei, drückt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Wiederholungszahl m von E zwischen die Grenzen

$$sp - \gamma\sqrt{2spq} \quad \text{und} \quad sp + \gamma\sqrt{2spq}, \tag{8}$$

das Verhältnis $\frac{m}{s}$ *dieser Wiederholungszahl zur Anzahl der Versuche also zwischen die Grenzen*

$$p - \gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}} \quad \text{und} \quad p + \gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}} \tag{9}$$

falle, durch

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi s p q}} \tag{7}$$

aus.“

Um in den Sinn dieses weittragenden Satzes tiefer einzudringen, sei zunächst vorgreifend bemerkt, daß der Wert des ersten Gliedes

1) Théorie analyt. chap. III.

auf der rechten Seite von (7) selbst für mäßige Werte von γ der Einheit sehr nahe ist und schon bei $\gamma = 4$ sich außerordentlich wenig von ihr unterscheidet; das zweite Glied liefert dann nur mehr einen sehr geringen Beitrag zu P, der unbeschadet der Richtigkeit der nachfolgenden Schlüsse vernachlässigt werden kann.

Aus den Ansätzen (8) und (9) ergibt sich nun:

„*Die einer gegebenen Wahrscheinlichkeit P entsprechenden Grenzen* (8) *der Wiederholungszahl m erweitern sich mit wachsender Anzahl der Versuche, jedoch nur im Verhältnis von* $\sqrt{s}$."

„*Die einer gegebenen Wahrscheinlichkeit P entsprechenden Grenzen* (9) *des Verhältnisses* $\frac{m}{s}$ *verengen sich mit wachsender Anzahl der Versuche und können durch entsprechende Vergrößerung von s beliebig eng gemacht werden.*"

„*Es ist möglich, die Zahl s der Versuche so groß zu wählen, daß man mit einer der Einheit beliebig nahen Wahrscheinlichkeit erwarten darf, es werde das Verhältnis* $\frac{m}{s}$ *nicht mehr als innerhalb beliebig eng festgesetzter Grenzen von p abweichen.*"

Es muß ausdrücklich hervorgehoben werden, daß das Bernoullische Theorem nur Wahrscheinlichkeitsaussagen enthält und daher nur die Erwartungsbildung regelt, daß es also, wie jeder Satz der Wahrscheinlichkeitstheorie, über das wirkliche Geschehen keinen Aufschluß gibt. Wenn also mit einer der Einheit noch so nahen Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist, $\frac{m}{s}$ werde innerhalb bestimmter enger, p umgebender Grenzen fallen, so kann eine wirklich ausgeführte Versuchsreihe doch ein Verhältnis $\frac{m}{s}$ ergeben, das weit über jene Grenzen hinausfällt, ohne daß hieraus ein Widerspruch mit unserem Theorem gefolgert werden dürfte.

72. Ausführung der Rechnungen. Die Berechnung von P bei gegebenem γ erfordert die Auswertung des Integrals

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt, \tag{10}$$

das eine höhere Transcendente vorstellt, die nur mittels unendlicher Rechenprozesse darstellbar ist. Auf die verschiedenen Methoden ihrer Berechnung soll hier nicht eingegangen werden[1]). Wegen ihrer hohen

1) Näheres hierüber findet man in des Verf.s „Theorie der Beobachtungsfehler" (1891), p. 115—121, ferner bei H. Opitz, Die Kramp-Laplacesche Transcendente, Osterprogr. 1900 des Königstädt. Realgymn. zu Berlin.

praktischen Bedeutung sind Tafeln dieser Funktion berechnet worden; eine solche, Tafel I, ist am Schlusse des Buches mitgeteilt[1]).

Der zweite Teil von P hat bei einigermaßen hohem γ und großem s einen untergeordneten Einfluß und wird in manchen der neueren Schriften nicht geführt, so daß P durch das Integralglied allein ausgedrückt erscheint[2]).

Man könnte indessen, um blos mit der Tafel auszukommen und doch den Wert dieses Gliedes zu berücksichtigen, dies durch eine Abänderung der Integralgrenze zu bewerkstelligen suchen. Es würde sich dann darum handeln, an die Stelle der Darstellung

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{l}{\sqrt{2spq}}} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\frac{l^2}{2spq}}}{\sqrt{2\pi spq}}$$

eine andere

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{l+\theta}{\sqrt{2spq}}} e^{-t^2} dt$$

mit möglichster Wahrung des Wertes zu setzen. Entwickelt man den letzten Ausdruck nach Potenzen von θ und bleibt bei der ersten Potenz stehen, so wird

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{l}{\sqrt{2spq}}} e^{-t^2} dt + 2\theta \frac{e^{-\frac{l^2}{2spq}}}{\sqrt{2\pi spq}} + \cdots,$$

und soll $P' = P$ werden, so ist $\theta = \frac{1}{2}$ zu nehmen[3]). Setzt man wieder $\frac{l+\frac{1}{2}}{\sqrt{2\pi spq}} = \gamma$, so ändert sich der Ausdruck des Theorems dahin, daß

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

die Wahrscheinlichkeit für die Einhaltung der Grenzen

---

1) Die Tafel ist durch sorgfältige Vergleichung der Tafeln von Encke (Berl. Astron. Jahrb. 1834), Bertrand (Calc. d. probab.), Glaisher (Philos. Mag. 42) und De Morgan (Encycl. Metrop. II, 1845) festgestellt worden. — Tafeln mit kleinerem Intervall von γ findet man bei Kämpfe in Wundts Philosoph. Studien 9 (1893).

2) J. Bertrand, Calc. d. probab. (1889), p. 78 und 83; H. Poincaré, Calc. d. probab. (1896), p. 70.

3) Vgl. J. Eggenberger, Beiträge zur Darstellung des Bernoullischen Theorems, Berner Mitt. 50 (1894) und Zeitschr. f. Math. u. Ph. 45 (1900), p. 43.

$$sp \mp \left(\gamma \sqrt{2spq} - \frac{1}{2}\right)$$

seitens m und der Grenzen

$$p \mp \left(\gamma \sqrt{\frac{2pq}{s}} - \frac{1}{2s}\right)$$

seitens $\frac{m}{s}$ bedeutet.

Handelt es sich darum, zu gegebenem P das zugehörige γ zu berechnen, so wird man aus Tafel I durch Interpolation die Wurzel der Gleichung

$$\Phi(\gamma) = P$$

bestimmen; es bleibt dann die an dieser Wurzel anzubringende Korrektur zu ermitteln, damit auch das zweite Glied von P Berücksichtigung finde. In den meisten Fällen wird man sich mit der Wurzel obiger Gleichung begnügen können. Der ganze Vorgang wird in der folgenden Nummer an einem besonderen Falle zur Erläuterung kommen.

73. Wahrscheinliche Abweichung. Diejenigen Grenzen von m, beziehungsweise von $\frac{m}{s}$, welchen die Wahrscheinlichkeit $P = \frac{1}{2}$ zukommt, so daß es ebenso wahrscheinlich ist, der zur Beobachtung kommende Wert werde zwischen sie oder er werde außerhalb derselben fallen, bezeichnet man als *wahrscheinliche Grenzen*. Die Hälfte ihres Intervalls heißt auch *wahrscheinliche Abweichung*.

Um sie zu finden, hat man jenen Wert von γ zu bestimmen, für welchen $P = \frac{1}{2}$ ist; er heiße ϱ, so daß

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\varrho^2}}{\sqrt{2\pi spq}} = \frac{1}{2}$$

wird. Dann ist

$\varrho \sqrt{2spq}$ die wahrscheinliche Abweichung von m (und n)

$\varrho \sqrt{\frac{2pq}{s}}$ " " " " $\frac{m}{s}$ (" $\frac{n}{s}$).

Aus dem Ansatz

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho_0} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}$$

ergibt sich[1])

$$\varrho_0 = 0{,}4769362762; \tag{10}$$

1) Nach der von H. Opitz (l. c.) ausgeführten Neuberechnung, welche in den letzten fünf Stellen von älteren Angaben differiert. — Wegen des häufigen Gebrauches setzen wir auch den Logarithmus von ϱ_0 her; es ist

$$\log \varrho_0 = \overline{9}{,}6784587875.$$

setzt man sodann

$$\varrho = \varrho_0 + \delta,$$

so hat zur Bestimmung von δ die Gleichung zu dienen:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho_0 + \delta} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-(\varrho_0 + \delta)^2}}{\sqrt{2\pi s p q}} = \frac{1}{2};$$

entwickelt man das erste Glied der linken Seite nach Potenzen von δ und bleibt bei der ersten Potenz stehen, so wird

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho_0} e^{-t^2} dt + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\varrho_0^2} \cdot \delta + \frac{e^{-(\varrho_0 + \delta)^2}}{\sqrt{2\pi s p q}} = \frac{1}{2};$$

daraus aber ergibt sich mit Rücksicht auf die Bedeutung von ϱ_0 und darauf, daß $e^{-\varrho_0^2}$ nur sehr wenig verschieden ist von $e^{-(\varrho_0 + \delta)^2}$,

$$\delta = -\frac{1}{2\sqrt{2 s p q}}.$$

Hiernach wäre

$$\varrho = 0{,}476936 \cdots - \frac{1}{2\sqrt{2 s p q}} \tag{11}$$

zu setzen; die wahrscheinlichen Grenzen von m würden

$$sp \mp \left(0{,}476936 \sqrt{2 s p q} - \frac{1}{2}\right), \tag{12}$$

jene von $\frac{m}{s}$

$$p \mp \left(0{,}476936 \sqrt{\frac{2 p q}{s}} - \frac{1}{2s}\right) \tag{13}$$

sein. Indessen pflegt man den zweiten Teil von ϱ gegenüber dem ersten zu vernachlässigen und ϱ_0 für ϱ zu nehmen; dann entfällt in den beiden letzten Ansätzen das Glied $\frac{1}{2}$, beziehungsweise $\frac{1}{2s}$.

Um den ziffermäßigen Unterschied dieser zwei Rechnungsweisen zu beurteilen, möge die Frage nach der wahrscheinlichen Abweichung der Wiederholungszahl m von Wappen in $s = 4040$ Würfen mit einer Münze gegenüber der wahrscheinlichsten Zahl 2020, und nach der wahrscheinlichen Abweichung des Verhältnisses $\frac{m}{s}$ gegenüber dem normalen Werte $\frac{1}{2}$ auf beide Arten beantwortet werden.

Die strenge Rechnung gibt für die erstgedachte Abweichung

$$0{,}4769 \sqrt{2020} - \frac{1}{2} = 20{,}9 \cdots,$$

also 20, für die Abweichung $\frac{m}{s} - \frac{1}{2}$

$$\frac{0{,}4769}{\sqrt{8080}} - \frac{1}{8080} = 0{,}052935;$$

nach der abgekürzten Rechnung erhält man

21,4, also 21, beziehungsweise 0,053058.

74. Mittlere Abweichung. Unter der mittleren Abweichung der Wiederholungszahl m, respektive der relativen Häufigkeit $\frac{m}{s}$ von dem zugehörigen wahrscheinlichsten Werte sp, beziehungsweise p, versteht man die Quadratwurzel aus dem mittleren Quadrat dieser Abweichung.

Nach einem in Nr. 50 entwickelten Satze ist der Mittelwert einer vom Zufall abhängigen Größe gleich der Summe der Produkte ihrer Einzelwerte mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten. Setzt man also $m - sp = l$, so ist

$$\mu(l^2) = \sum_{m=s}^{0} (m - sp)^2 \frac{s!}{m!\,n!} p^m q^n;$$

denn $\frac{s!}{m!\,n!} p^m q^n$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich E m-mal wiederholen, also die Abweichung $m - sp$ einstellen werde.

Die weitere Entwicklung des obigen Ausdrucks gibt

$$\mu(l^2) = \sum_s^0 \frac{s!}{m!\,n!} m^2 p^m q^n - 2sp \sum_s^0 \frac{s!}{m!\,n!} m p^m q^n + s^2 p^2 \sum_s^0 \frac{s!}{m!\,n!} p^m q^n;$$

nun ist

$$\sum_s^0 \frac{s!}{m!\,n!} p^m q^n = (p+q)^s = 1;$$

verallgemeinert man diesen Ansatz mittels der Variabeln t zu

$$\sum_s^0 \frac{s!}{m!\,n!} (pt)^m q^n = (pt+q)^s$$

und differenziert ihn dann zweimal nach t, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\sum_s^0 \frac{s!}{m!\,n!} m p (pt)^{m-1} q^n = sp(pt+q)^{s-1}$$

$$\sum_s^0 \frac{s!}{m!\,n!} m(m-1) p^2 (pt)^{m-2} q^n = sp^2 (s-1)(pt+q)^{s-2};$$

die Substitution $t = 1$ liefert

$$\sum_s^0 \frac{s!}{m!\,n!}\, m p^m q^n = s p,$$

$$\sum_s^0 \frac{s!}{m!\,n!}\, m(m-1) p^m q^n$$

$$= \sum_s^0 \frac{s!}{m!\,n!}\, m^2 p^m q^n - \sum_s^0 \frac{s!}{m!\,n!}\, m p^m q^n = s p^2 (s-1),$$

oraus

$$\sum_s^0 \frac{s!}{m!\,n!}\, m^2 p^m q^n = s p^2 (s-1) + s p$$

olgt. Mit diesen Werten der drei Summen erhält man

$$\mu(l^2) = s p q.$$

Hiernach ist die mittlere Abweichung der Wiederholungszahl m on sp gleich

$$\sqrt{spq} \tag{14}$$

und, wie eine einfache Überlegung zeigt,

$$\sqrt{\frac{pq}{s}} \tag{15}$$

die mittlere Abweichung des Verhältnisses $\frac{m}{s}$ von p.

Würde man das approximative Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Abweichungen, wie es durch die Gleichung (6), Nr. 69 dargestellt ist, zur Berechnung von $\mu(l^2)$ heranziehen, hierbei l als eine stetige Größe behandeln und die Integration mit Rücksicht auf die außerordentlich rasche Abnahme der Exponentialgröße auf das Intervall $(-\infty, \infty)$ ausdehnen, so ergäbe sich:

$$\mu(l^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s p q}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{l^2}{2spq}} l^2 dl;$$

setzt man hierin $\frac{l}{\sqrt{2spq}} = t$, so wird weiter

$$\mu(l^2) = \frac{2spq}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = spq,$$

weil der Wert des letzten Integrals (s. Nr. 11) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ist. Es ergibt sich also auf diesem Wege dasselbe Resultat, zu dem die strenge Rechnung geführt hat. Man kann in diesem Umstande eine Bestätigung dafür erblicken, daß das approximative Gesetz wohl geeignet ist, die

Wahrscheinlichkeit der Abweichungen auf deren ganzem Gebiete darzustellen.

75. Mittelwert der Abweichung und durchschnittliche Abweichung. Unter der ersteren Beziehung hat man sinngemäß $\mu(l)$ zu verstehen, wobei $l = m - sp$ ist. Als durchschnittliche Abweichung hingegen bezeichnet man $\mu(|l|)$, also den Mittelwert der absoluten Werte von $m - sp$.

Für $\mu(l)$ ergibt sich durch einfache Rechnung der Wert Null; denn es ist

$$\mu(l) = \sum_s^0 \frac{s!}{m!\,n!}(m - sp)p^m q^n = \sum_s^0 \frac{s!}{m!\,n!} m p^m q^n - sp \sum_s^0 \frac{s!}{m!\,n!} p^m q^n,$$

also nach Nr. 74

$$\mu(l) = sp - sp = 0. \tag{16}$$

Für $\mu(|l|)$ hat man zunächst den folgenden Ansatz:

$$\mu(|l|) = \sum_{m=s}^{sp} \frac{s!}{m!\,n!}(m - sp)p^m q^n + \sum_{sp}^{0} \frac{s!}{m!\,n!}(sp - m)p^m q^n;$$

ersetzt man in der ersten Summe $m - sp$ durch das gleichwertige $mq - np$, so löst sie sich auf in

$$q \sum_s^{sp} \frac{s!}{m!\,n!} m p^m q^n - p \sum_s^{sp} \frac{s!}{m!\,n!} n p^m q^n;$$

es ist aber

$$\frac{d}{dp} \sum_s^{sp} \frac{s!}{m!\,n!} p^m q^n = \sum_s^{sp} \frac{s!}{m!\,n!} m p^{m-1} q^n$$

$$\frac{d}{dq} \sum_s^{sp} \frac{s!}{m!\,n!} p^m q^n = \sum_s^{sp} \frac{s!}{m!\,n!} n p^m q^{n-1},$$

daher

$$\sum_s^{sp} \frac{s!}{m!\,n!}(m - sp)p^m q^n$$

$$= pq \left\{ \frac{d}{dp} \sum_s^{sp} \frac{s!}{m!\,n!} p^m q^n - \frac{d}{dq} \sum_s^{sp} \frac{s!}{m!\,n!} p^m q^n \right\}.$$

Man hat also

$$p^s + \frac{s!}{(s-1)!\,1!} p^{s-1} q + \frac{s!}{(s-2)!\,2!} p^{s-2} q^2 + \cdots + \frac{s!}{sp!\,sq!} p^{sp} q^{sq}$$

zuerst nach p, dann nach q zu differenzieren und das zweite Resultat

von dem ersten in Abzug zu bringen; das Ergebnis dieser Rechnung ist

$$s \frac{s!}{sp!\, sq!} p^{sp} q^{sq} = s T_0,$$

so daß der erste Teil von $\mu(|l|)$ den Wert $spq T_0$ hat. Eine einfache Überlegung lehrt, daß dem zweiten Teile derselbe Wert zukommt, daß also

$$\mu(|l|) = 2 spq T_0.$$

Ersetzt man T_0 durch den in Nr. 68 gefundenen Näherungswert, so ergibt sich[1])

$$\mu(|l|) = \sqrt{\frac{2spq}{\pi}}. \tag{17}$$

Selbstverständlich ist

$$\mu\left(\left|\frac{m}{s} - p\right|\right) = \sqrt{\frac{2pq}{\pi s}}. \tag{18}$$

Dieselben Werte von $\mu(l)$ und $\mu(|l|)$ erhielte man, wenn man den am Schlusse der vorigen Nummer bezüglich $\mu(l^2)$ eingeschlagenen Weg befolgen würde.

76. Beispiel XLIV. *Mit einer Münze werden 4040 Würfe ausgeführt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Wiederholungszahl von Wappen nicht um mehr als 28 von der wahrscheinlichsten Zahl 2020 abweichen, also zwischen 1992 und 2028 liegen werde?*

Gemäß den Formeln (8) und (7) in Nr. 71 ist

$$\gamma = \frac{28}{\sqrt{2020}} = 0{,}623,$$

$$P = \Phi\,(0{,}623) + \frac{e^{-0{,}623^2}}{\sqrt{2020\,\pi}};$$

der Tafel I entnimmt man

$$\Phi\,(0{,}62) = 0{,}6194114,$$

daraus ergibt sich durch Benützung der ersten und zweiten Differenz

$$\Phi\,(0{,}623) = 0{,}6217119;$$

der zweite Teil liefert in logarithmischer Ausrechnung den Beitrag

$$0{,}0085151;$$

mithin ist

$$P = 0{,}6302270.$$

Bei alleiniger Benützung der Tafel I hätte man nach dem in Nr. 72 entwickelten Verfahren mit

---

1) Vgl. hiermit die Ableitung J. Bertrands, Calc. d. probab., p. 82.

$$\gamma = \frac{28{,}5}{\sqrt{2020}} = 0{,}63412$$

zu rechnen und fände durch Interpolation

$$P = \Phi\,(0{,}64412) = 0{,}6301641,$$

also um 0,0000629 weniger als durch strenge Rechnung.

77. Beispiel XLV. *Welches sind die wahrscheinlichen Gr für die Wiederholungszahl einer bezeichneten Nummer in 2854 Lo ziehungen?*

Da die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen einer bestin Nummer in einer Ziehung $p = \frac{1}{18}$ ist, so hat man nach den Fo von Nr. 73 für die wahrscheinliche Abweichung der Wiederhol zahl den Wert

$$0{,}476936\sqrt{2 \cdot 2854 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{17}{18}} = 8{,}2 \cdots;$$

da die wahrscheinlichste Wiederholungszahl $\frac{1}{18} \cdot 2854$, d. i. 158 be so besteht die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ dafür, es werde sich die be nete Nummer nicht weniger als 150 mal und nicht öfter als 16 wiederholen[1]).

78. Beispiel XLVI. *Wie viele Versuche sind erforderlich mit der Wahrscheinlichkeit P erwarten zu dürfen, daß die Wiederho zahl eines Ereignisses, dem im einzelnen Versuche die Wahrschei keit p zukommt, nicht mehr als um $\mathfrak{p}$ Prozent von dem wahrs lichsten Werte abweichen werde?*

Die Lösung dieser Aufgabe vollzieht sich mittels der b Gleichungen

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\gamma e^{-t^2}dt,$$

$$\gamma\sqrt{2spq} = \frac{\mathfrak{p}}{100}s;$$

nachdem man aus der ersten γ bestimmt hat, ergibt sich au zweiten

$$s = 2pq\left(\frac{100\,\gamma}{\mathfrak{p}}\right)^2.$$

Will man z. B. mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{999}{1000}$ erwarten d daß die Zahl der weißen Kugeln, die man aus einer Urne mit

1) Wegen der Abrundung des Resultates auf eine ganze Zahl ist die scheinlichkeit um ein Geringes von $\frac{1}{2}$ verschieden, hier etwas kleiner.

weißen und einer schwarzen Kugel in s Ziehungen erzielt, höchstens um 5% von ihrem wahrscheinlichsten Werte $\frac{s}{6}$ abweiche, so suche man zuerst mit Hilfe der Taf. I den Wert γ, der

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-t^2}dt = 0{,}999$$

ergibt; durch Benützung der ersten Differenz findet man

$$\gamma = 2{,}32 + \frac{0{,}0000345}{0{,}0000507}\,0{,}01 = 2{,}32684;$$

mit diesem Werte berechnet sich dann

$$s = 2\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{232\cdot 684}{5}\right)^2 = 601{,}5\cdots;$$

hiernach sind 602 Ziehungen für den gedachten Zweck erforderlich.

79. Begriff der Präzision. Zwei Versuchsreihen, mögen sie sich auf dieselbe oder auf verschiedene Materien beziehen, sind in einem Punkte mit einander vergleichbar, nämlich: in Bezug auf die Weite der Grenzen, innerhalb welcher sie die Abweichung $\frac{m}{s} - p$ mit gegebener Wahrscheinlichkeit P erwarten lassen.

Um diese Vorstellung zu präzisieren, denken wir uns zwei Beobachtungs- oder Versuchsreihen; die eine beziehe sich auf die Ereignisse E, F, denen im ganzen Verlaufe der s Versuche die Wahrscheinlichkeiten p, q zukommen; die andere betreffe die Ereignisse E', F' mit den Wahrscheinlichkeiten p', q' und umfasse s' Versuche; die Wiederholungszahl von E sei m, die von E' sei m'. Alsdann ist mit der Wahrscheinlichkeit[1])

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-t^2}dt$$

zu erwarten, daß einerseits

$$-\gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}} < \frac{m}{s} - p < \gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}}$$

und daß andererseits

$$-\gamma\sqrt{\frac{2p'q'}{s'}} < \frac{m'}{s'} - p < \gamma\sqrt{\frac{2p'q'}{s'}};$$

die Weite dieser Intervalle ist

1) Wollte man den vollständigen Ausdruck (7), Nr. 70, für P beibehalten, so würde dies auf die nachfolgende Betrachtung einen ziffermäßig nur geringfügigen Einfluß üben

$$2\gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}}, \quad 2\gamma\sqrt{\frac{2p'q'}{s'}}$$

und hängt bei gegebenem P, also bei festem γ, nur von dem Wurz ausdruck ab. Je enger nun das Intervall, je näherliegend an p m das Verhältnis $\frac{m}{s}$ mit gegebener Wahrscheinlichkeit erwarten da für desto genauer wird man die betreffenden Versuche erklären. I Genauigkeit wächst also mit der Abnahme von $\sqrt{\frac{2pq}{s}}$, oder : wächst mit dem Wachsen von

$$h = \sqrt{\frac{s}{2pq}}, \tag{1}$$

und man kann übereinkommen, diesen Ausdruck geradezu als (Maß der *Präzision* der betreffenden Versuchsreihe aufzufassen.

Die Präzision wächst sonach wie die Quadratwurzel aus der A zahl der Versuche und ist um so größer, je kleiner das Produkt ĵ je mehr p und q von $\frac{1}{2}$ abweichen. In letzterem Sinne haben a Versuche, welche sich mit dem Aufwerfen einer Münze vergleich lassen, die kleinste Präzision, $h = \sqrt{2s} = 1{,}414 \cdot \sqrt{s}$; dem gegenül ist beispielsweise die Präzision für das Erscheinen einer bestimmt Nummer in s Ziehungen: $h' = \sqrt{\frac{s}{2 \cdot \frac{17}{18^2}}} = 2{,}850\sqrt{s}$, also zweimal groß.

Im Laufe der vorangegangenen Untersuchungen sind für (wahrscheinliche, für die mittlere und für die durchschnittliche A weichung der relativen Häufigkeit $\frac{m}{s}$ von der Wahrscheinlichkeit die Ausdrücke

$$\varrho\sqrt{\frac{2pq}{s}}, \quad \sqrt{\frac{pq}{s}}, \quad \sqrt{\frac{2pq}{\pi s}}$$

[s. die Ansätze (13), (15), (18)] gefunden worden; dieselben si durchweg der Präzision h umgekehrt proportional; demnach kann (Präzision auch nach diesen Größen beurteilt werden.

80. Wiederholte Versuchsreihen. So lange nur *eine* Versuc reihe vorliegt, läßt sich über ihr Ergebnis vom Standpunkte der Wa scheinlichkeitstheorie keine andere Aussage machen als die, daß eine bestimmte oder eine innerhalb vorgegebener Grenzen liegei Abweichung vom wahrscheinlichsten Ergebnis mit dieser oder jei Wahrscheinlichkeit erwarten lasse.

Zu weitergehenden Schlüssen und Betrachtungen gibt der F Anlaß, daß über zwei Ergebnisse E, F mit festen Wahrscheinli keiten p, q mehrere, sagen wir z, Beobachtungsreihen gleichen U

fanges, also auch gleicher Präzision angestellt worden sind. Jede *Reihe* bestehe aus s Versuchen, und es habe die erste m_1, die zweite m_2, $\cdots$ die letzte m_z als Wiederholungszahl von E ergeben. Dann kann von einer *wahrscheinlichsten* Gruppierung, Verteilung oder *Dispersion* der Quotienten

$$\frac{m_1}{s}, \quad \frac{m_2}{s}, \quad \cdots \quad \frac{m_z}{s}$$

um den Wert p gesprochen werden.

Da nach dem approximativen Wahrscheinlichkeitsgesetz

$$T = \frac{1}{\sqrt{2\pi s p q}} e^{-\frac{l^2}{2spq}}$$

eine positive Abweichung dieselbe Wahrscheinlichkeit hat wie eine gleich große negative, so ist es am wahrscheinlichsten, daß sich ebenso viele der Werte $\frac{m_i}{s}$ unter p wie über p stellen werden.

Nach dem Bernoullischen Theorem besteht ferner eine bestimmte Wahrscheinlichkeit $P = \Phi(\gamma)$ dafür, daß die Abweichung $\frac{m_i}{s} - p$ dem Betrage nach nicht größer sei als $\gamma \sqrt{\frac{2pq}{s}}$; daraus folgt, daß zP die wahrscheinlichste Zahl derjenigen Quotienten $\frac{m_i}{s}$ ist, welche sich in das Intervall zwischen $p - \gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}}$ und $p + \gamma\sqrt{\frac{2pq}{s}}$ einstellen.

Dazu ist aber zu bemerken, daß es, je größer z, um so weniger wahrscheinlich ist, es werde sich genau diese wahrscheinlichste Zahl zP ergeben; vielmehr muß eine Abweichung von dieser Zahl erwartet werden, und über diese Abweichung kann auf Grund des Bernoullischen Theorems wieder eine Wahrscheinlichkeitsaussage gemacht werden. Es ist nämlich mit der Wahrscheinlichkeit

$$\Pi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\delta e^{-t^2} dt$$

zu erwarten, daß die wirklich zur Beobachtung kommende Anzahl der Quotienten $\frac{m_i}{s}$, welche zwischen die oben angeführten Grenzen fallen, liegen werde zwischen

$$zP - \delta\sqrt{2zP(1-P)} \quad \text{und} \quad zP + \delta\sqrt{2zP(1-P)}.$$

Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel. Die wahrscheinlichste Wiederholungszahl der Nummer 1 in $s = 2854$ Lotterieziehungen ist $\frac{1}{18} \cdot 2858$, d. i. 158. Die gleiche Zahl gilt für jede der 89 übrigen

Nummern, und man kann die Ziehungen wie $z = 90$ gleich umfang reiche Beobachtungsreihen auffassen, indem man sie einmal auf da Erscheinen der Nummer 1, ein zweites Mal auf das Erscheinen de Nummer 2 u. s. w. hin prüft.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Wiederholungszahl einer be stimmten Nummer zwischen die Grenzen 156 und 160 (mit Einschlul derselben) falle, ist

$$P = \Phi(\gamma)$$

mit

$$\gamma = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot 2854 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{17}{18}}} = 0,11557,$$

also

$$P = \Phi(0,11557) = 0,1298;$$

daraus ergibt sich die wahrscheinlichste Anzahl derjenigen Nummer welche diese Grenzen einhalten,

$$zP = 90 \cdot 0,1298 = 11, \cdots;$$

die Wahrscheinlichkeit, daß von den 90 Nummern nicht wenig als 10 und nicht mehr als 12 die erwähnten Grenzen einhalt werden, ist

$$\Pi = \Phi(\delta)$$

mit

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 90 \cdot 0,1298 \cdot 0,8702}} = 0,219,$$

also

$$\Pi = 0,24321.$$

81. Erfahrungsdaten. Wenn unser Wissen über eine dem Zuf unterworfene Urteilsmaterie objektiv begründet ist, so dürfen wir warten, daß das Ergebnis einer großen Reihe von Realisierungen ei Struktur aufweisen werde, welche den rein rechnungsmäßigen Res taten der Wahrscheinlichkeitstheorie nahezu entspricht. Das he so viel: Wenn wir die einzelnen Ergebnisse der Realisierungsfä von irgend einem Gesichtspunkte aus in Kategorien einteilen, so zu erwarten, daß die Zusammensetzung des Gesamtergebnisses diesen Kategorien angenähert das Verhältnis der diesen Kategor zukommenden Wahrscheinlichkeiten aufweisen werde. Diese Erwartu gründet sich auf die innere Bedeutung der Wahrscheinlichkeitsbrüc wonach sie das Verhältnis der Umfänge der Verwirklichungsmöglic keiten der einzelnen Kategorien zu zahlenmäßigem Ausdruck bringe jenes Verhältnis ist aber nach dem Stande unseres Wissens das einz Bestimmende für das wirkliche Geschehen in einer großen Zahl vo Fällen.

Wiederholt sind Beobachtungsreihen daraufhin geprüft worden, wie weit sie mit den Ergebnissen der Wahrscheinlichkeitstheorie übereinstimmen; es sind auch umfangreiche Versuchsreihen eigens zu diesem Zwecke ausgeführt worden. So oft die Bedingungen, an welche überhaupt die Aufstellung einer numerischen Wahrscheinlichkeit geknüpft ist, hinreichend erfüllt waren, hat das Beobachtungsmaterial in seiner Struktur die der Wahrscheinlichkeitstheorie entsprechenden Verhältnisse unverkennbar hervortreten lassen.

Würde eine Beobachtungsreihe auffällige Abweichungen von diesen Verhältnissen aufweisen, so könnten über die Ursache dieser Erscheinung verschiedene Vermutungen aufgestellt werden. Die Berechtigung eines Wahrscheinlichkeitsansatzes hängt nämlich nicht allein von bleibenden Umständen, sondern auch von dem Vorgange bei der Verwirklichung der einzelnen Fälle ab. Es liege z. B. eine Reihe von Würfelversuchen vor, welche auffällige Abweichungen von der Theorie erkennen läßt. So lange über die verwendeten Würfel und den Modus der Ausführung der Versuche nichts bekannt ist, läßt sich keine begründete Vermutung über die Ursache jener Abweichungen aufstellen. Kennte man jedoch den Hergang bei den Versuchen und schlösse dieser jede Begünstigung dieser oder jener Würfelseiten aus, so wäre es begründet, die Ursache in Unregelmäßigkeiten der Würfel zu suchen. In einem andern Falle, wo die bleibenden Umstände den Voraussetzungen zweifellos entsprechen, wäre mit Recht der Hergang der Verwirklichung für die Unregelmäßigkeiten verantwortlich zu machen. Ein Maß der Abweichungen anzugeben, bei welchem die Berechtigung für derlei Vermutungen beginnt, ist durch die Natur der Sache ausgeschlossen. Der Weg, um bei dem Auftauchen von Vermutungen zu einer sicheren Kenntnis zu kommen, liegt allein in der Wiederholung der Versuche unter möglichst gleichbleibenden Umständen.

Die nachfolgend mitgeteilten Erfahrungsdaten dürften geeignet sein, die vorstehenden Ausführungen zu illustrieren und zu begründen.

I. Die Untersuchung der Ergebnisse der Ziehungen in der Prager und Brünner Lotterie, welche der Verfasser durchgeführt hat[1]) und die sich auf den Zeitraum 1754—1886, beziehungsweise 1771—1886 erstrecken, hat nach jeder Richtung gute Übereinstimmung mit der Theorie ergeben.

Wenn man die Ziehungen nach ihrer Zusammensetzung aus ein- und zweiziffrigen Nummern sondert, so zerfallen sie in sechs Kategorien, je nachdem keine, eine, zwei, $\cdots$ fünf einziffrige Nummern auftreten; die Wahrscheinlichkeiten dieser Kategorien sind in Nr. 36 gerechnet worden. Bezeichnet man mit s die Anzahl der Ziehungen, mit m_i die

1) Zum Gesetz der großen Zahlen. Prag 1889.

der Ziehungen einer Kategorie, so zeigen die Quotienten $\frac{m_i}{s}$ den Wahr- scheinlichkeiten p_i gegenüber folgenden Verlauf:

Kategorie	p_i	Prag: $s = 2854$	Brünn: $s = 2703$
		$\frac{m_i}{s}$	$\frac{m_i}{s}$
0	0,58298	0,58655	0,57899
1	0,34070	0,32656	0,34591
2	0,06989	0,07919	0,06881
3	0,00619	0,00735	0,00629
4	0,00023	0,00035	0,00000
5	0,00000	0,00000	0,00000
	1,00000	1,00000	1,00000

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Nummern einer Ziehung in der natürlichen *oder* in der umgekehrten Reihenfolge erscheinen, ist

$$p = \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{60} = 0{,}01667;$$

die relative Häufigkeit $\frac{m}{s}$ derartiger Ziehungen war in

Prag: 0,01612, Brünn: 0,01739,

bei Vereinigung der Ergebnisse beider Orte

0,01674.

Die Wahrscheinlichkeit des Erscheinens einer einziffrigen Nummer ist für jeden Zug

$$p = 0{,}1;$$

die relative Häufigkeit einziffriger Nummern betrug in

Prag: 0,10168, Brünn: 0,10048,

in beiden Orten zusammen

0,10109.

Zu einer eingehenderen Untersuchung gibt die Tabelle der Erscheinungshäufigkeit der einzelnen Nummern Anlaß. Man kann nämlich das ganze Ziehungsmaterial — hier soll es für die Prager Ziehung geschehen — als eine Folge von 90 gleich umfangreichen Beobachtungsreihen ansehen, angestellt über ein Ereignis der Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{1}{18},$$

ınn nun die Verhältniszahlen $\frac{m_i}{s}$ $(i = 1, 2, \ldots 90)$ auf ihre Verteilung ı Wert p prüfen; wir nehmen statt dessen die Prüfung an der ıng der Wiederholungszahlen m_i gegenüber der wahrschein- ı: $sp = 2854 \cdot \frac{1}{18} = 158$ selbst vor. Die Ergebnisse und die Rechnung erforderlichen Größen sind aus nachstehender Tabelle ıehmen:

mmern	in der Anzahl	mit der Wiederholungs-zahl m	Abweichung $m - sp$	$(m - sp)^2$
	1	138	— 20	400
	2	139	— 19	361
76, 87	4	142	— 16	256
56, 79, 86	5	143	— 15	225
47	3	144	— 14	196
	2	145	— 13	169
	1	146	— 12	144
	2	147	— 11	121
	1	149	— 9	81
55, 69	4	150	— 8	64
75	3	151	— 7	49
	1	152	— 6	36
85	3	153	— 5	25
42, 74	4	154	— 4	16
59	3	155	— 3	9
40, 67, 88	5	156	— 2	4
68	3	157	— 1	1
	2	158	0	0
	2	159	1	1
	1	160	2	4
36	3	161	3	9
	1	162	4	16
	2	163	5	25
	1	164	6	36
45, 48	4	165	7	49
66	3	166	8	64
60, 84	4	167	9	81
	2	168	10	100
63	3	170	12	144
	2	171	13	169
78	3	172	14	196
	1	173	15	225
	1	176	18	324
	2	177	19	361
	1	178	20	400
	1	179	21	441
	1	184	26	676
	1	185	27	729
	1	186	28	784
	1	189	31	961
	90	14270		18059

In Nr. 77 sind 150, 166 als wahrscheinliche Grenzen für di Wiederholungszahl einer Nummer in 2854 Ziehungen berechne worden; in Wirklichkeit ist bei

$$4+3+1+3+4+3+5+3+2+2+1+3+1+2+1+4+3=4$$

also genau bei der Hälfte der Nummern eine zwischen den genannte Grenzen (diese mit eingeschlossen) liegende Wiederholungszahl ei getroffen.

Für die mittlere und durchschnittliche Abweichung ergeben sic nach den Formeln (14), (17) die theoretischen Werte:

$$\sqrt{2854\cdot\frac{1}{18}\cdot\frac{17}{18}}=12{,}23,$$

$$\sqrt{\frac{2\cdot 2854\cdot 17}{18^2\pi}}\;=\;9{,}76;$$

andererseits berechnet sich aus der Summe der $(m-sp)^2$, welc 13059 beträgt, und aus der Summe der absoluten Werte der $(m-s$ welche 889 ausmacht, die mittlere und die durchschnittliche A weichung:

$$\sqrt{\frac{13059}{90}}=12{,}04,$$

$$\frac{889}{90}\;=\;9{,}88,$$

also in sehr naher Übereinstimmung mit den theoretischen Werten.

II. G. Th. Fechner[1]) hat die Listen von zehn sächsischen Staa lotterien aus der Zeit von 1843—1852, je 32000 bis 34000 Numme umfassend, in folgender Weise einer Prüfung unterzogen. Er tei die gezogenen Nummern in der Reihenfolge, in der sie erschien waren, in Serien zu je 3, dann zu je 10, 50, 100 Nummern u schied diese Serien nach dem absoluten Werte des Unterschiedes zwischen den geraden und den ungeraden Nummern in Kategori bestimmte nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung wahrscheinlichste Anzahl der in jede Kategorie fallenden Serien u verglich sie mit der wirklich beobachteten.

Im Sinne der in Nr. 80 eingeführten Bezeichnung bedeute s Zahl der Nummern in einer Serie, z die Anzahl der Serien.

---

1) Kollektivmaßlehre. Herausgegeben von G. F. Lipps (1897), p. 229 ff. Wiewohl die gezogenen Nummern nicht zurückgelegt werden und daher Zusammensetzung der Urne im Laufe der Ziehungen sich ändert, so ist doch vornherein die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen einer geraden und ei ungeraden Nummer $\frac{1}{2}$ für jede einzelne Ziehung.

Für $s = 3$ sind 1 und 3 die möglichen Werte von u; der erstere stellt sich ein, wenn eine gerade und zwei ungerade Nummern, oder umgekehrt, gezogen werden; die Wahrscheinlichkeit hierfür ist

$$2\binom{3}{1}\frac{1}{2^3} = \frac{3}{4},$$

der zweite Wert tritt ein, wenn drei gerade oder drei ungerade Nummern erscheinen, wofür

$$2 \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{4}$$

die Wahrscheinlichkeit ist. Da nun solcher Serien $z = 2000$ gebildet wurden, so wäre die wahrscheinlichste Verteilung auf die beiden Kategorien:

1500, 500;

wirklich gezählt wurden

1494, 506.

Bei $s = 10$ sind 0, 2, 4, 6, 8, 10 die möglichen Werte von $|u|$ und

$$\frac{10!}{5!5!}\frac{1}{2^{10}}, \quad 2\frac{10!}{4!6!}\frac{1}{2^{10}}, \quad 2\frac{10!}{3!7!}\frac{1}{2^{10}}, \quad 2\frac{10!}{2!8!}\frac{1}{2^{10}}, \quad 2\frac{10!}{1!9!}\frac{1}{2^{10}}, \quad 2 \cdot \frac{1}{2^{10}}$$

die bezüglichen Wahrscheinlichkeiten; durch ihre Multiplikation mit z ergibt sich die wahrscheinlichste Verteilung auf die einzelnen Kategorien.

Bei $s = 50$ gehen die Werte von $|u|$ von 0 bis 50, bei $s = 100$ von 0 bis 100; die Wahrscheinlichkeiten können bei dieser Größe von s nach der Näherungsformel

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi spq}} e^{-\frac{l^2}{2spq}}$$

gerechnet werden, in welcher $p = q = \frac{1}{2}$ und $l = \frac{u}{2}$ zu setzen ist; durch Multiplikation mit z ergibt sich wieder die wahrscheinlichste Verteilung der Serien auf die verschiedenen Werte von $|u|$, die nun mit der wirklich eingetroffenen zu vergleichen ist. Die Resultate sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt.

$\lvert u \rvert$	$s = 10$; $z = 5000$		$s = 50$; $z = 1000$		$s = 100$; $z =$	
	wahrscheinlichste	beobachtete	wahrscheinlichste	beobachtete	wahrscheinlichste	beo
	Verteilung		Verteilung		Verteilung	
0	1230	1201	112	110	48	
2	2051	2027	216	217	93,5	
4	1172	1225	192	194	88	
6	439	442	158	154	80	
8	98	97	119,5	120	69,5	
10	10	8	84	65	58	
12	—	—	54	62	47	
14	—	—	32	41	36	
16			17	21	27	
18			9	10	19	
20			4	3	13	
22			2	2	8,5	
24			0,5	1	5,5	
26			—	—	3	
28			—	—	2	
30					1	
32					0,5	
34					0,3	
36					0,1	
38					0,1	
	5000	5000	1000	1000	600	

III. Ein wesentlich anderes Bild bietet die Versuchsreihe d wir nun vorführen wollen; sie ist den Würfelversuchen entnom welche R. Wolf in sehr großem Umfange in verschiedenen fikationen wiederholt ausgeführt hat[2]). Mit zwei Würfeln, einer rot gebeizt war, so daß alle möglichen 36 Verbindung Würfelseiten leicht unterschieden werden konnten, sind 20000 gemacht und die erschienenen Kombinationen verzeichnet worde Resultat der Zählung war folgendes:

		Weißer Würfel					
	Nr.	1	2	3	4	5	6
Roter Würfel	1	547	587	500	462	621	690
	2	609	655	497	535	651	684
	3	514	540	468	438	587	629
	4	462	507	414	413	509	611
	5	551	562	499	506	658	672
	6	563	598	519	487	609	646

1) Drei Mitteilungen über neue Würfelversuche. Naturforsch. Gesel Zürich, 26, 27 (1881—1883).

2) Vgl. außerdem die Schriften der Naturforsch. Gesellsch. in Bern 1851, 1853; Naturforsch. Gesellsch. in Zürich, 38 (1893).

Gleiche Möglichkeit der Fälle vorausgesetzt, ist $\frac{1}{36}$ die Wahrscheinlichkeit jeder einzelnen Kombination und $\frac{1}{36} \cdot 20000 = 556$ ihre wahrscheinlichste Wiederholungszahl. Die Abweichungen von dieser Zahl und ihre Quadrate sind aus der folgenden Zusammenstellung zu ersehen.

$s = 20000;\ p = \frac{1}{36}$		
m	$m - sp$	$(m - sp)^2$
413	143	20449
414	142	19884
438	118	13924
462	94	8836
462	94	8836
468	88	7744
487	69	4761
497	59	3481
499	57	3249
500	56	3136
506	50	2500
507	49	2401
509	47	2209
514	42	1764
519	37	1369
535	21	441
540	16	256
547	9	81
551	5	25
562	6	36
563	7	49
587	31	961
587	31	961
598	42	1764
609	53	2809
609	53	2809
611	55	3025
621	65	4225
629	73	5329
646	90	8100
651	95	9025
655	99	9801
658	102	10404
672	116	13456
684	128	16384
690	134	17956
20000	2376	212440

Die wahrscheinliche Abweichung

$$0{,}476936 \sqrt{2 \cdot 20000 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{35}{36}} = 13, \cdots$$

führt zu den Grenzen 543, 569, zwischen welchen am wahrschein-

lichsten die Hälfte der m, d. i. 18 derselben zu erwarten wären; i Wirklichkeit liegen aber nur 4 zwischen diesen Grenzen (547, 55 562, 563).

Der theoretische Wert der mittleren Abweichung:

$$\sqrt{20000 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{35}{36}} = 23{,}2$$

ergibt sich wesentlich verschieden von dem aus den wirklichen A' weichungen berechneten:

$$\sqrt{\frac{212440}{36}} = 76{,}8.$$

Ähnlich verhält es sich mit der durchschnittlichen Abweichung, der theoretischer Wert sich mit 18,54 ergibt, während sie sich aus d Summe der $|m - sp|$ mit 66 berechnet.

Die Beobachtungsreihe zeigt also in jeder Beziehung so erhe liche Widersprüche gegenüber der Theorie, daß man mit Sicherh den Schluß ziehen darf, es seien die Bedingungen, welche der wal scheinlichkeitstheoretischen Behandlung zugrunde liegen, bei den Ve suchen nicht erfüllt gewesen. Da nun die Art ihrer Ausführung ei Begünstigung einzelner Fälle ausschließt, so kann der Grund nur Unregelmäßigkeiten der Würfel liegen, welche bewirkten, daß d Würfelseiten nicht als gleichmögliche Fälle sich darstellen. Dies Umstand verrät sich schon durch den systematischen Charakter d Abweichungen, den ein Blick auf die erste Tafel deutlich erkenn läßt: die Kombinationen, welche die Seite 4 des einen wie des ande Würfels enthalten, sind weniger zahlreich vertreten, während Kombinationen mit 6 auffällig häufig erschienen sind[1]).

§ 2. Das Theorem von Poisson.

82. Entwicklung der Fragestellung. Einen wichtigen (danken hat Poisson[2]) in jenen Teil der Wahrscheinlichkeitstheo eingeführt, welcher sich mit der Erwartungsbildung in bezug auf Ergebnisse wiederholter Versuche beschäftigt, indem er von der Vora setzung konstant bleibender Wahrscheinlichkeiten abgehend annah

---

1) R. Wolf hat unter Hinzuziehung einer Hypothese über die Abhäng keit der Wahrscheinlichkeit der Würfelseiten von der Lage des Schwerpunk und weiterer Versuchsreihen folgende Wahrscheinlichkeiten ermittelt:

Nr.	1	2	3	4	5	6
Weißer Würfel	0,16230	0,17245	0,14485	0,14205	0,18175	0,1966
Roter Würfel	0,17035	0,18155	0,15880	0,14580	0,17240	0,1711

2) Recherches sur la probabilité etc. Paris 1837; deutsch von H. Schnu Braunschweig 1841, 4. Kapitel. — Außerdem Abhandlungen in den Con rend. 1, 2 (1835, 1836).

daß sich die Wahrscheinlichkeiten der in Frage kommenden Ereignisse E, F im Laufe der Versuche ändern. Es lassen sich in der Tat leicht Vorgänge konstruieren, bei welchen dies zutrifft; sobald man den Boden der Anwendungen betritt, scheint die Variabilität der Wahrscheinlichkeiten die Regel zu bilden.

Das Problem, mit dem wir uns hier zunächst beschäftigen, besteht in folgendem: Es werden s Versuche oder Beobachtungen über die beiden entgegengesetzten Ereignisse E, F angestellt, denen im λ-ten Versuche ($\lambda = 1, 2, \cdots s$) die Wahrscheinlichkeiten p_λ, $q_\lambda = 1 - p_\lambda$ zukommen. Gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit, daß sich die Ereignisse in einer bestimmten Anzahl von Malen wiederholen; nach derjenigen Kombination, welche unter allen die größte Wahrscheinlichkeit besitzt; endlich nach der Wahrscheinlichkeit, daß die Wiederholungszahlen m, n von E, F, oder die Verhältnisse $\frac{m}{s}$, $\frac{n}{s}$, welche die relative Häufigkeit des Erscheinens ausdrücken, vorgegebene Grenzen nicht überschreiten.

Zur schematischen Darstellung der Sachlage denke man sich s Urnen U_λ ($\lambda = 1, 2, \cdots s$), welche mit weißen und schwarzen Kugeln in solchem Mengenverhältnis gefüllt sind, daß die Urne U_λ dem Erscheinen einer weißen Kugel die Wahrscheinlichkeit p_λ, dem Erscheinen einer schwarzen Kugel die Wahrscheinlichkeit q_λ verleiht; aus jeder Urne wird eine Kugel gezogen. Wiewohl die Reihenfolge, in welcher die Urnen darankommen, für den Erfolg gleichgiltig ist, stelle man sich, um mit der obigen Formulierung im Einklange zu bleiben, vor, daß die λ-te Ziehung aus der Urne U_λ geschehe.

Bei kleinem s kann die Beantwortung der oben gekennzeichneten Fragen auf dem Wege der direkten Rechnung geschehen. Beschwerlich wird dieser Weg aber schon bei einigermaßen großem s (etwa von der Ordnung einiger Zehner), und ganz unverwendbar bei sehr großem s. Für diesen Fall hat nun Poisson Näherungsformeln entwickelt mit Hilfe einer Analyse, welche in ihrer Grundlage auf Laplace[1]) zurückführt.

83. Ableitung des Theorems. Die Entwicklung des Produktes

$$\prod_1^s (p_\lambda u + q_\lambda v)$$

nach Potenzen von u und v befolgt solche arithmetische Regeln, daß der Koeffizient von $u^m v^n$ die Wahrscheinlichkeit für das m-malige Eintreffen von E und das n-malige Eintreffen von F bedeutet. Be-

1) Théorie analyt., art. 8.

zeichnet man diese Wahrscheinlichkeit mit $U_{m,n}$ und ersetzt u d
e^{xi}, v durch e^{-xi}, unter i die imaginäre Einheit verstanden, so

$$X = \prod_1^s (p_\lambda e^{xi} + q_\lambda e^{-xi}) = \sum U_{m,n} e^{(m-n)xi}.$$

Durch Multiplikation mit $e^{-(m-n)xi}$ entfällt der exponen
Faktor bei $U_{m,n}$ und nur bei diesem Gliede. Integriert man hi
in bezug auf x zwischen den Grenzen $-\pi$, π, so fallen rechter I
alle Glieder bis auf das mit $U_{m,n}$ behaftete aus, weil für jedes g
zahlige r (mit Ausschluß der Null)

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{rxi} dx = 0$$

ist, und es ergibt sich für $U_{m,n}$ die Darstellung:

$$U_{m,n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X e^{-(m-n)xi} dx.$$

Nun ist

$$X = \prod_1^s \{(p_\lambda + q_\lambda) \cos x + i (p_\lambda - q_\lambda) \sin x\}$$

$$= \prod_1^s \{\cos x + i (p_\lambda - q_\lambda) \sin x\}$$

$$= \prod_1^s \{\varrho_\lambda (\cos \varphi_\lambda + i \sin \varphi_\lambda)\},$$

wenn

$$\varrho_\lambda = \sqrt{\cos^2 x + (p_\lambda - q_\lambda)^2 \sin^2 x} = \sqrt{1 - 4 p_\lambda q_\lambda \sin^2 x}$$

und

$$\operatorname{tg} \varphi_\lambda = (p_\lambda - q_\lambda) \operatorname{tg} x$$

gesetzt wird; mit den Abkürzungen

$$\prod_1^s \varrho_\lambda = R, \quad \sum_1^s \varphi_\lambda = \Phi$$

wird also

$$X = R (\cos \Phi + i \sin \Phi)$$

und

$$U_{m,n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R \{\cos (\Phi - \overline{m - n}\, x) + i \sin (\Phi - \overline{m - n}\, x)\} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R \cos (\Phi - \overline{m - n}\, x) dx.$$

wenn man beachtet, daß R vermöge (1) eine gerade, Φ hingegen wegen (2) eine ungerade Funktion von x ist. Aus denselben Gründen kann auch

$$U_{m,n} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi R\cos(\Phi - \overline{m-n}x)\,dx$$

geschrieben werden.

Zerlegt man das Integrationsgebiet in die Teile $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ und substituiert in dem zweiten Teile $x = \pi - \xi$, so geht Φ über in $(m + n)\pi - \Phi$, während R keine Änderung erfährt; das zweite Teilintegral lautet dann

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos(\overline{m+n}\pi - \Phi + \overline{m-n}\xi - \overline{m-n}\pi)\,d\xi,$$

und dies ist gleich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos(2n\pi - \Phi + \overline{m-n}\,\xi)\,d\xi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos(\Phi - \overline{m-n}\xi)\,d\xi,$$

stimmt also dem Werte nach mit dem ersten Teilintegral überein, so daß

$$U_{m,n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos(\Phi - \overline{m-n}x)\,dx \tag{4}$$

ist.

Vorausgesetzt, daß kein p_λ und q_λ der Null oder der Einheit sehr nahe liegt, kommt kein Faktor von

$$R = \prod_1^s \sqrt{1 - 4p_\lambda q_\lambda \sin^2 x}$$

der Einheit nahe, und es wird R um so kleiner, je weiter sich x von der unteren Integralgrenze 0 entfernt; belangreiche Werte nimmt es nur in der Nähe dieser Grenze an und kann hier annähernd durch

$$\prod_1^s (1 - 2p_\lambda q_\lambda x^2),$$

der Logarithmus von R durch

$$-x^2 \sum 2p_\lambda q_\lambda$$

ersetzt werden; mit der abkürzenden Bezeichnung

$$k = \sqrt{\frac{2\sum p_\lambda q_\lambda}{s}}\ ^{1)}$$

wird also näherungsweise

$$R = e^{-sk^2x^2}.$$

Weiter folgt aus

$$\varrho_\lambda \sin \varphi_\lambda = (p_\lambda - q_\lambda) \sin x$$

mit Benützung des Wertes von ϱ_λ aus (1) und bei Beschränkung auf kleine Werte von x

$$\sin \varphi_\lambda = (p_\lambda - q_\lambda)(1 + 2p_\lambda q_\lambda x^2)\left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots\right)$$

$$= (p_\lambda - q_\lambda)\, x + (p_\lambda - q_\lambda)\left(2p_\lambda q_\lambda - \frac{1}{6}\right) x^3 + \cdots,$$

daraus durch Inversion

$$\varphi_\lambda = (p_\lambda - q_\lambda)\, x + \frac{4}{3}(p_\lambda - q_\lambda)\, p_\lambda q_\lambda x^3;$$

demzufolge ist, wenn man die abkürzenden Bezeichnungen:

$$\frac{\sum p_\lambda}{s} = \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_s}{s} = p, \qquad \frac{\sum q_\lambda}{s} = \frac{q_1 + q_2 + \cdots + q_s}{s} = q$$

$$\frac{4}{3}\,\frac{\sum (p_\lambda - q_\lambda)\, p_\lambda q_\lambda}{s} = h$$

einführt,

$$\Phi = s(p - q)\, x + shx^3.$$

Mit diesen Näherungswerten von R und Φ stellt sich jetzt U wie folgt dar:

$$U_{m,n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-sk^2x^2} \cos\left[\{s(p - q) - (m - n)\}\, x + shx^3\right] dx.$$

Der Koeffizient von x kann umgeformt werden in

$$s\left\{p - \frac{m}{s} - \left(q - \frac{n}{s}\right)\right\} = sg.$$

1) Für den numerischen Wert von k läßt sich eine obere Grenze angeben. Da nämlich $\frac{1}{4}$ der größtmögliche Wert des Produktes $p_\lambda q_\lambda$ ist, so kann $\frac{\sum p_\lambda q_\lambda}{s}$ den Wert $\frac{1}{4}$ nicht überschreiten; infolge dessen ist

$$k \geqq \sqrt{\frac{1}{2}} = 0.71$$

wobei, vermöge $p + q = 1$ und $m + n = s$, g den doppelten Unterschied $p - \frac{m}{s}$ $\left(\text{oder auch den doppelten Unterschied } \frac{n}{s} - q\right)$ bedeutet. Wird hierauf der Cosinus entwickelt, hierbei aber über die dritte Potenz von x nicht hinausgegangen, so verwandelt sich der obige Ausdruck in:

$$U_{m,n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-sk^2x^2} \{\cos(sgx) - shx^3 \sin(sgx)\} \, dx$$

und durch die Substitution

$$x\sqrt{s} = z$$

weiter in:

$$U_{m,n} = \frac{2}{\pi\sqrt{s}} \int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{s}} e^{-k^2z^2} \left\{\cos(gz\sqrt{s}) - \frac{hz^3}{\sqrt{s}} \sin(gz\sqrt{s})\right\} dz.$$

Wegen der mit wachsendem z außerordentlich rasch fallenden Exponentialfunktion wird der Wert der Funktion unter dem Integralzeichen schon innerhalb des Integrationsintervalls sehr klein und außerhalb desselben so geringfügig, daß es auf den Wert von $U_{m,n}$ keinen merkbaren Einfluß übt, wenn man die obere Grenze durch ∞ ersetzt.

Nun ist[1])

$$\int_0^\infty e^{-k^2z^2} \cos(gz\sqrt{s}) \, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2k} e^{-\frac{sg^2}{4k^2}};$$

daraus ergibt sich durch Differentiation nach g:

$$\int_0^\infty e^{-k^2z^2} z\sqrt{s} \sin(gz\sqrt{s}) \, dz = \frac{sg\sqrt{\pi}}{4k^3} e^{-\frac{sg^2}{4k^2}},$$

weiter durch Differentiation in bezug auf k:

$$\int_0^\infty e^{-k^2z^2}\, 2kz^3 \sin(gz\sqrt{s}) \, dz = \left(\frac{3sg\sqrt{\pi}}{4k^4} - \frac{sg^3\sqrt{\pi s}}{8k^6}\right) e^{-\frac{sg^2}{4k^2}},$$

woraus sich

1) Man kommt zu dem Werte J dieses Integrals, indem man es nach g differenziert, das Integral $\frac{dJ}{dg}$ durch partielle Integration entwickelt und die so entstandene Differentialgleichung integriert; zu dem Werte der Integrationskonstanten führt die Annahme $g = 0$.

$$\int_0^\infty e^{-k^2 z^2} \frac{h z^3}{\sqrt{s}} \sin(gz\sqrt{s})\, dz = \frac{gh\sqrt{\pi s}}{8k^5 s}\left(3 - \frac{sg^2}{2k^2}\right) e^{-\frac{sg^2}{4k^2}}$$

berechnet.

Nach Einführung dieser Integralwerte in den letzten Ausdruc[k] für $U_{m,n}$ wird, wenn man noch

$$\frac{g\sqrt{s}}{2k} = \theta \qquad (1$$

setzt,

$$U_{m,n} = \frac{1}{k\sqrt{\pi s}}\left[1 - \frac{h\theta}{2k^3\sqrt{s}}(3 - 2\theta^2)\right] e^{-\theta^2}. \qquad (1$$

Wenn man auf die Bedeutung von g zurückgeht, so drückt $U_{m,n}$ die Wahrscheinlichkeit aus, daß die Ereignisse E, F in den Wiederholungszahlen

$$m = sp - k\theta\sqrt{s}, \quad n = sq + k\theta\sqrt{s}$$

erscheinen.

Für die Wiederholungszahlen

$$m' = sp + k\theta\sqrt{s}, \quad n' = sq - k\theta\sqrt{s}$$

besteht dementsprechend die Wahrscheinlichkeit

$$U_{m',n'} = \frac{1}{k\sqrt{\pi s}}\left[1 + \frac{h\theta}{2k^3\sqrt{s}}(3 - 2\theta^2)\right] e^{-\theta^2}. \qquad (13$$

Hiernach ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich die Wiederholungszahl des Ereignisses E von der Zahl sp um $k\theta\sqrt{s}$ nach auf- oder abwärts unterscheide,

$$U_{m,n} + U_{m',n'} = \frac{2}{k\sqrt{\pi s}} e^{-\theta^2},$$

und dies ist am größten für $\theta = 0$.

Daraus ergibt sich als erstes Resultat:

„*Die wahrscheinlichste unter allen Kombinationen ist diejenige, in welcher sich die Wiederholungszahlen der Ereignisse E und F so verhalten wie ihre durchschnittlichen Wahrscheinlichkeiten p, q im Laufe der Versuche.*"

Denn nach den Formeln (7) sind p, q die arithmetischen Mittel der Wahrscheinlichkeiten p_λ, q_λ und ergänzen sich so wie diese zur Einheit.

Setzt man

$$k\theta\sqrt{s} = \xi$$

und denkt sich unter ξ eine ganze Zahl, so wird die Wahrscheinlich-

keit P, daß die Wiederholungszahl m von E zwischen die Grenzen $sp - l$ und $sp + l$ falle, ausgedrückt sein durch

$$\sum_0^l \frac{2}{k\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{\xi^2}{k^2 s}} - \frac{1}{k\sqrt{\pi s}};$$

der negative Teil rührt daher, weil in der Summe die Wahrscheinlichkeit der Abweichung 0 doppelt gezählt ist. Verwandelt man die Summe nach der in Nr. 70 angegebenen Methode in ein Integral, so wird

$$P = \frac{2}{k\sqrt{\pi s}} \int_0^l e^{-\frac{\xi^2}{k^2 s}} + \frac{e^{-\frac{l^2}{k^2 s}}}{k\sqrt{\pi s}},$$

oder einfacher, wenn man

$$\frac{\xi}{k\sqrt{s}} = t, \quad \frac{l}{k\sqrt{s}} = \gamma$$

setzt,

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{k\sqrt{\pi s}}. \tag{14}$$

Die zweite Aussage, die mit der vorigen zusammen *Poissons Theorem* ausmacht, lautet demnach wie folgt:

„Es ist mit der Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{k\sqrt{\pi s}}$$

zu erwarten, daß die Wiederholungszahl m des Ereignisses E zwischen die Grenzen

$$sp \mp \gamma k \sqrt{s},$$

die relative Häufigkeit $\frac{m}{s}$ dieses Ereignisses also zwischen die Grenzen

$$p \mp \frac{\gamma k}{\sqrt{s}}$$

fallen werde.“

Die wichtigste Folgerung aus diesem Satze geht dahin, daß durch entsprechende Vermehrung der Versuche die Grenzen, innerhalb welcher das Verhältnis $\frac{m}{s}$ mit einer der Einheit beliebig nahen Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist, beliebig eng gezogen werden können. Bei der Begründung dieser Schlußfolgerung ist auf den im Gange des Beweises hervorgehobenen Umstand Rücksicht zu nehmen, daß k un-

abhängig von der Größe der Versuchszahl an eine obere Grenz $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ gebunden ist.

Das Bernoullische Theorem ist als besonderer Fall in den Poissonschen enthalten; denn, werden die Wahrscheinlichkeiten p unter einander gleich und gleich p, so sind auch die q_λ einander gleich und gleich q;

$$k = \sqrt{\frac{2\sum p_\lambda q_\lambda}{s}}$$

geht über in $\sqrt{2pq}$, und die Ausdrücke für P, die Grenzen von und $\frac{m}{s}$ verwandeln sich in diejenigen, welche das Bernoullische Theorem anführt.

Eine Bemerkung möge schon an dieser Stelle Platz finden. In bezug auf das wahrscheinlichste Ergebnis der s Versuche ist es ebenso, als ob dieselben bei konstant bleibender Wahrscheinlichkeit $p = \frac{\sum}{s}$ ausgeführt worden wären; auf andere Beziehungen darf aber die Analogie nicht übertragen werden.

84. Beispiel XLVII. *Es liegen drei Urnen A_1, A_2, A_3 vor; die erste enthält 2 weiße und 3 schwarze, die zweite 3 weiße und 2 schwarze, die dritte 1 weiße und 4 schwarze Kugeln. Man macht aus A_1 200, aus A_2 400, aus A_3 600 Ziehungen, wobei die gezogene Kugel jedesmal wieder zurückgelegt wird. Welches ist das wahrscheinlichste Resultat dieser Ziehungen und welches die wahrscheinliche Abweichung von diesem?*

Die durchschnittlichen Wahrscheinlichkeiten für die weiße und schwarze Kugel sind

$$p = \frac{\frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5}}{6} = \frac{11}{30}, \qquad q = \frac{\frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{4}{5}}{6} = \frac{19}{30}.$$

Mit diesen berechnen sich die wahrscheinlichsten Wiederholungszahlen

$$sp = 1200 \cdot \frac{11}{30} = 440, \qquad sq = 1200 \cdot \frac{19}{30} = 760.$$

Ferner ist

$$k = \sqrt{2 \cdot \frac{\frac{6}{25} + 2 \cdot \frac{6}{25} + 3 \cdot \frac{4}{25}}{6}} = 0{,}63245;$$

die wahrscheinliche Abweichung, wenn man in dem Ausdrucke für I das zweite Glied unbeachtet läßt, beträgt also

$$\varrho k \sqrt{s} = 0{,}476936 \cdot 0{,}63245 \cdot \sqrt{1200} = 10{,}3 \cdots,$$

so daß die Wiederholungszahl der weißen Kugel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zwischen den Grenzen 430 und 450 zu erwarten ist.

Anders ergeben sich diese Grenzen, wenn die 1200 Ziehungen aus *einer* Urne gemacht werden, welche der weißen Kugel die Wahrscheinlichkeit $\frac{11}{30}$ verleiht, also beispielsweise aus einer Urne mit 11 weißen und 19 schwarzen Kugeln; dann ist nämlich die wahrscheinliche Abweichung

$$0{,}476936\sqrt{2 \cdot 1200 \cdot \frac{11}{30} \cdot \frac{19}{30}} = 11{,}1 \cdots,$$

die wahrscheinlichen Grenzen für die Wiederholungszahl der weißen Kugel sind also 439 und 451, weiter als im andern Falle.

85. Mittlere Abweichung. Für die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung vom absoluten Betrage ξ ergab sich der Näherungsausdruck:

$$\frac{2}{k\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{\xi^2}{k^2 s}}.$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit ξ^2 und integriert, ξ als stetige Variable auffassend, zwischen den Grenzen 0 und ∞, so ergibt sich das mittlere Quadrat der Abweichung l, nämlich:

$$\begin{aligned} \mu(l^2) &= \frac{2}{k\sqrt{\pi s}} \int_0^\infty \xi^2 e^{-\frac{\xi^2}{k^2 s}} d\xi \\ &= \frac{2k^2 s}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt \\ &= \frac{k^2 s}{2}, \end{aligned}$$

weil das Integral (s. Nr. 11) den Wert $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ hat. Mit Rücksicht auf den Wert von k, Gleichung (5), ist also

$$\mu(l^2) = \sum p_\lambda q_\lambda; \tag{15}$$

die Quadratwurzel hieraus ist die mittlere Abweichung von der wahrscheinlichsten Wiederholungszahl.

Bestünde hingegen durch die ganze Dauer der Versuche dieselbe Wahrscheinlichkeit für E und so auch für F, nämlich die durchschnittliche Wahrscheinlichkeit p, beziehungsweise q, so ergäbe sich nach Nr. 74 als mittleres Quadrat der Abweichung:

$$\mu_1(l^2) = spq.$$

Um diese beiden Werte mit einander vergleichen zu können, bringen wir sie auf folgende Gestalt:

$$\mu(l^2) = p_1(1-p_1) + p_2(1-p_2) + \cdots + p_s(1-p_s)$$
$$= p_1 + p_2 + \cdots + p_s - (p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_s^2),$$
$$\mu_1(l^2) = s\,\frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_s}{s}\left(1 - \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_s}{s}\right)$$
$$= p_1 + p_2 + \cdots + p_s - \frac{(p_1 + p_2 + \cdots + p_s)^2}{s};$$

mithin ist

$$\mu_1(l^2) - \mu(l^2) = p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_s^2 - \frac{(p_1 + p_2 + \cdots + p_s)^2}{s}$$
$$= \frac{(1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2)(p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_s^2) - (p_1 + p_2 + \cdots + p_s)^2}{s}$$
$$= \frac{(p_1 - p_2)^2 + (p_1 - p_3)^2 + \cdots + (p_2 - p_3)^2 + \cdots}{s} > 0,$$

also

$$\mu_1(l^2) < \mu(l^2).$$

Daraus ergibt sich der Satz:

„*Die mittlere Abweichung vom wahrscheinlichsten Resultate i[st] kleiner, die Präzision also größer, wenn die Ziehungen in der b[e]schriebenen Weise aus verschiedenen Urnen vorgenommen werden, a[ls] wenn sie aus einer Urne erfolgten, die dem Erscheinen von E die durchschnittliche Wahrscheinlichkeit verleiht.*"

Würden z Reihen von je s Versuchen auf die erste Art ausgeführt werden, so wäre für die dabei zum Vorschein kommende[n] Quotienten

$$\frac{m_1}{s}, \quad \frac{m_2}{s}, \quad \ldots \quad \frac{m_z}{s}, \qquad \text{(R)}$$

welche die relative Häufigkeit des Erscheinens von E in den einzelnen Reihen darstellen, eine andere wahrscheinlichste Verteilung oder *Dispersion* um den Wert p zu erwarten als für die Quotienten

$$\frac{m_1'}{s}, \quad \frac{m_2'}{s}, \quad \ldots \quad \frac{m_z'}{s}, \qquad \text{(R')}$$

welche sich ergäben, wenn die z Ziehungsreihen aus einer und derselben Urne vorgenommen worden wären, welche dem E die durchschnittliche Wahrscheinlichkeit p verleiht. Der Unterschied bestünde darin, daß sich die Reihe (R) enger um den Wert p zusammendrängte als die Reihe (R'). Bezeichnet man die wahrscheinlichste Dispersion der [illegible]nisse von Reihen, welche nach Art der Reihen (R'), also u[illegible]dig gleichbleibenden Umständen ausgeführt werden, als

normale Dispersion, so gebührt der Verteilung der Ergebnisse der Reihe (R) die Bezeichnung *unternormale Dispersion*[1]).

86. Beispiel XLVIII. *Eine Urne enthält σ Kugeln, davon sind σp weiß, σq schwarz. Man macht s ($< \sigma$) Ziehungen, ohne die gezogenen Kugeln zurückzulegen. Wie groß ist unter der Voraussetzung, daß σ, s und $\sigma - s$ große Zahlen seien, die Wahrscheinlichkeit, daß $sp + l$ weiße und $sq - l$ schwarze Kugeln zum Vorschein kommen?*

Der Fall ist dadurch bemerkenswert, daß sich die Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen einer weißen, resp. schwarzen Kugel, die vor Beginn der Ziehungen p, q sind, im Laufe derselben auf unbekannte Art ändern.

Der strenge Ausdruck für die verlangte Wahrscheinlichkeit ist:

$$T_l = \frac{s!}{(sp+l)!\,(sq-l)!} \cdot \frac{\sigma p(\sigma p - 1)\cdots(\sigma p - sp - l + 1)\cdot \sigma q(\sigma q - 1)\cdots(\sigma q - sq + l + 1)}{\sigma(\sigma - 1)\cdots(\sigma - s + 1)};$$

der erste Faktor gibt die Anzahl der Arten an, auf welche das bezeichnete Ereignis eintreten kann, der zweite gibt die Wahrscheinlichkeit bei einer bestimmten Anordnung der Kugeln, die aber für alle Anordnungen die gleiche ist. Nun läßt sich T_l wie folgt durch lauter Fakultäten ausdrücken:

$$T_l = \frac{s!}{(sp+l)!\,(sq-l)!} \cdot \frac{(\sigma p)!\,(\sigma q)!\,(\sigma - s)!}{[(\sigma - s)p - l]!\,[(\sigma - s)q + l]!\,\sigma!}.$$

Unter den über σ, s und $\sigma - s$ gemachten Voraussetzungen kann näherungsweise gesetzt werden (vgl. Nr. 69):

$$\frac{s!}{(sp+l)!\,(sq-l)!}\, p^{sp+l} q^{sq-l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}}\, e^{-\frac{l^2}{2spq}}$$

$$\frac{(\sigma - s)!}{[(\sigma - s)p - l]!\,[(\sigma - s)q + l]!}\, p^{(\sigma - s)p - l} q^{(\sigma - s)q + l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma - s)pq}}\, e^{-\frac{l^2}{2(\sigma - s)pq}};$$

daraus ergibt sich durch Multiplikation:

$$\frac{s!}{(sp+l)!\,(sq-l)!} \frac{(\sigma - s)!}{[(\sigma - s)p - l]!\,[(\sigma - s)q + l]!}\, p^{\sigma p} q^{\sigma q} = \frac{1}{2\pi pq\sqrt{s(\sigma - s)}}\, e^{-\frac{\sigma l^2}{2s(\sigma - s)pq}}.$$

1) Der Begriff der Dispersion und ihre Unterscheidung in normale, unternormale und übernormale rührt von W. Lexis her: Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft (1877), p. 22. — Vgl. auch J. v. Kries, Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1886), p. 103 ff. — Ein Beispiel übernormaler Dispersion folgt in der nächsten Nummer.

Ferner ist nach Nr. 68

$$\frac{\sigma!}{(\sigma p)!\,(\sigma q)!}\,p^{\sigma p}q^{\sigma q} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma pq}}.$$

Durch Division der vorletzten Gleichung durch die letzte erhält man

$$T_l = \frac{1}{\sqrt{2\pi s\frac{\sigma - s}{\sigma}pq}}\,e^{-\frac{l^2}{2s\frac{\sigma-s}{\sigma}pq}}.$$

Dies ist aber derselbe Ausdruck, welcher sich ergeben hätte, wenn die Wahrscheinlichkeiten p, q im ganzen Verlaufe der Ziehungen konstant blieben, wenn jedoch statt s Versuchen deren blos $\frac{\sigma - s}{\sigma}$ gemacht würden. Je größer σ gegenüber s ist, desto geringer der Einfluß, den das Nichtzurücklegen der Kugeln ausübt; für $\lim \sigma = \infty$ wird $\frac{\sigma - s}{\sigma} = 1$, d. h. bei einer unbegrenzten Menge von Kugeln in der Urne hört jener Einfluß völlig auf.

Würde man z Beobachtungsreihen gleichen Umfanges in der beschriebenen Weise ausführen und die Quotienten

$$\frac{m_1}{s},\ \frac{m_2}{s},\ \ldots\ \frac{m_z}{s}$$

bilden, welche die relative Häufigkeit des Erscheinens einer weißen Kugel in den einzelnen Reihen ausdrücken, so wäre gegenüber dem Falle, wo die Wahrscheinlichkeiten p, q im Verlauf der Versuche konstant bleiben, eine *übernormale Dispersion* dieser Quotienten zu erwarten, d. h. eine Verteilung derselben, bei welcher sie sich weniger dicht um den Wert p zusammendrängen als in dem entgegengestellten Falle. Denn die Präzision einer Beobachtungsreihe der oben beschriebenen Art ist

$$\sqrt{\frac{s\frac{\sigma - s}{\sigma}}{2pq}},$$

die einer Beobachtungsreihe mit konstant bleibenden Wahrscheinlichkeiten

$$\sqrt{\frac{s}{2pq}},$$

die letztere also größer als die erstere.



§ 3. Das Gesetz der großen Zahlen.

87. Elementare Wahrscheinlichkeiten und Durchschnittswahrscheinlichkeiten. Die nähere Vergleichung des Bernoullischen Theorems mit dem Poissonschen gibt Anlaß zu folgenden Bemerkungen.

In dem typischen Falle, auf welchen sich das Bernoullische Theorem bezieht, sind die konstant bleibenden Wahrscheinlichkeiten p, q der Ereignisse E, F maßgebend sowohl für die Bestimmung der wahrscheinlichsten Kombination von E, F in s Versuchen, wie auch für die Präzision der Versuchsreihe und daher auch für die Dispersion der Ergebnisse wiederholter derartiger Versuchsreihen gleichen Umfanges.

Anders verhält es sich in dem Falle, welcher dem Poissonschen Theorem zu Grunde liegt. Hier gibt es wohl zwei Größen p, q, nämlich die arithmetischen Mittel der p_λ und q_λ, welche für die wahrscheinlichste Kombination von E und F bestimmend sind in derselben Weise wie in dem ersten Falle; sie sind aber nicht maßgebend für die Beurteilung der Präzision und Dispersion; diese hängen vielmehr von den einzelnen p_λ, q_λ ab und können sich daher bei demselben p und q sehr verschieden gestalten.

Wir wollen diesen Unterschied vorläufig dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir p, q im ersten Falle als *Elementarwahrscheinlichkeiten*, im zweiten Falle als *Durchschnittswahrscheinlichkeiten* bezeichnen. Das verschiedene Verhalten beider veranlaßt uns, dem Wesen der Durchschnittswahrscheinlichkeiten näher zu treten. Die folgende Betrachtung dürfte einen hierzu geeigneten Ausgangspunkt darbieten.

Eine Urne U enthalte N Kugeln, wovon G weiß, die übrigen schwarz sein mögen; die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel (Ereignis E) ist

$$p = \frac{G}{N}.$$

Nun stelle man sich vor, daß die Kugeln durch irgend ein Merkmal[1]) in ν Kategorien unterschieden seien, welche der Reihe nach aus $N_1, N_2, \cdots N_\nu$ Kugeln bestehen, worunter sich $G_1, G_2, \cdots G_\nu$ weiße befinden mögen; dann ist $N_1 + N_2 + \cdots + N_\nu = N$ und $G_1 + G_2 + \cdots + G_\nu = G$, und die Wahrscheinlichkeit von E läßt sich in der Form

$$p = \frac{G_1 + G_2 + \cdots + G_\nu}{N} = \frac{N_1}{N}\frac{G_1}{N_1} + \frac{N_2}{N}\frac{G_2}{N_2} + \cdots + \frac{N_\nu}{N}\frac{G_\nu}{N_\nu}$$

darstellen. Dieser Ausdruck gestattet folgende Deutung: Man kann

1) Z. B. durch aufgeschriebene Nummern.

jetzt von ν Modalitäten des Ereignisses E (und seines Gegensatzes F) reden; $\frac{N_1}{N} = \omega_1$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß die erste Modalität sich einstelle; $\frac{G_1}{N_1} = p_1$ die Wahrscheinlichkeit, daß dann das Ereignis E eintreffe[1]). Mit diesen Bezeichnungen schreibt sich p entweder

$$p = \omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \cdots + \omega_\nu p_\nu$$

oder

$$p = \frac{N_1 p_1 + N_2 p_2 + \cdots + N_\nu p_\nu}{N},$$

und erscheint bei der letzteren Schreibweise als arithmetisches Mittel der den einzelnen Modalitäten entsprechenden Wahrscheinlichkeiten, jede Wahrscheinlichkeit mit dem der Modalität entsprechenden Gewichte genommen, also in der Form einer Durchschnittswahrscheinlichkeit.

Man kann, um das Verhältnis der $p_1, p_2, \cdots p_\nu$ zu dem p zu kennzeichnen, die ersten *Spezial-* oder *Partial*wahrscheinlichkeiten, p dagegen eine *General-* oder *Total*wahrscheinlichkeit nennen[2]).

Wie auch die Zerlegung in Kategorien erfolgen möge, an dem Wesen der Frage nach der Wahrscheinlichkeit des Erscheinens einer weißen Kugel wird nichts geändert, und gerade hierin ist das charakteristische Merkmal einer elementaren Wahrscheinlichkeit zu erblicken.

Nun aber denke man sich die Kugelkategorien von einander getrennt, indem man jede in eine besondere Urne legt; an die Stelle der einen Urne U treten nun ν Urnen $U_1, U_2, \cdots U_\nu$, welche dem Ereignis E der Reihe nach die Wahrscheinlichkeit $p_1, p_2, \cdots p_\nu$ verleihen.

Die Frage nach der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E kann jetzt verschiedene Beantwortung erfahren je nach den Bestimmungen, welche über die Ausführung der Ziehungen getroffen werden.

a) Setzt man fest, daß aus einer *bestimmten* Urne, z. B. aus U_1, gezogen werden soll, so hat E die Wahrscheinlichkeit p_1.

b) Bestimmt man, daß einer *beliebigen* Urne eine Kugel entnommen werden soll, so ist

$$p' = \frac{1}{\nu} p_1 + \frac{1}{\nu} p_2 + \cdots + \frac{1}{\nu} p_\nu = \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_\nu}{\nu}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß sie weiß sein werde.

---

1) Poisson, Recherches etc., deutsche Übersetz., p. 109 und 115, bezeichnet die Modalitäten als „Ursachen“ des Ereignisses E (oder F) und belegt die Zahlenreihe $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_\nu$ mit dem Namen „Wahrscheinlichkeitsgesetz der Ursachen“.

2) J. v. Kries, Pri[illegible]hrsch.-R., p. 106. — L. v. Bortkewitsch, Krit. Betracht. z. theo[illegible]h. f. Nationalök. u. Stat. (3) 8 (1894), p. 642.

c) Man kann die Bestimmungen auch so treffen, daß bezüglich der Erwartungsbildung wieder die ursprünglichen Verhältnisse eintreten. Man lege in eine Hilfsurne $N_1 \lambda$ Zettel mit der Nummer 1, $N_2 \lambda$ Zettel mit der Nummer 2, $\cdots$, $N_\nu \lambda$ Zettel mit der Nummer ν (λ bedeutet eine beliebige ganze Zahl) und ziehe zuerst aus dieser Urne einen Zettel; die Nummer desselben bezeichnet die Urne, aus welcher die Kugel zu ziehen ist. Unter diesen Umständen ist die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen einer weißen Kugel wieder

$$p = \frac{N_1}{N}\frac{G_1}{N_1} + \frac{N_2}{N}\frac{G_2}{N_2} + \cdots + \frac{N_\nu}{N}\frac{G_\nu}{N_\nu}.$$

Auch dadurch würde dieses Ziel erreicht, daß man, statt einer, $N_1 \lambda$ Urnen von der Sorte U_1, $N_2 \lambda$ Urnen von der Sorte U_2, $\cdots$, $N_\nu \lambda$ Urnen von der Sorte U_ν, im Ganzen $N\lambda$ Urnen aufstellt und aus einer beliebigen die Kugel zieht.

Nun handle es sich nicht um die einzelne Ziehung, sondern um eine Reihe, sagen wir von $s = N\lambda$ Ziehungen. Wir wollen zwei Ausführungsmodalitäten einander gegenüberstellen.

α) Man benütze das System U_1, U_2, $\cdots$ U_ν von ν Urnen, mache $N_1 \lambda$ Ziehungen aus U_1, $N_2 \lambda$ Ziehungen aus U_2, $\cdots$, schließlich $N_\nu \lambda$ Ziehungen aus U_ν, die gezogene Kugel jedesmal zurücklegend und unter die andern mischend. Die Durchschnittswahrscheinlichkeit, welche bei diesem Vorgange der weißen Kugel entspricht, ist

$$p = \frac{N_1 p_1 + N_2 p_2 + \cdots + N_\nu p_\nu}{N}.$$

β) Man benütze das unter c) erwähnte System von $N\lambda$ Urnen, worunter sich $N_1 \lambda$ von der Sorte U_1 befinden u. s. w., und mache jede der s Ziehungen aus einer beliebigen Urne des Systems, die Kugel jedesmal zurücklegend; dabei wird zugleich vorausgesetzt, daß die Urnen beständig durcheinander gemengt werden, daß man also nicht wisse, aus welchen bereits gezogen worden ist. Auch bei diesem Vorgange ist die Durchschnittswahrscheinlichkeit für eine weiße Kugel

$$p = \frac{N_1 p_1 + N_2 p_2 + \cdots + N_\nu p_\nu}{N}.$$

Zwischen diesen an Wert gleichen Durchschnittswahrscheinlichkeiten besteht aber ein fundamentaler Unterschied.

Während man im Falle α) mit Sicherheit weiß, daß genau $N_1 p_1$-mal die Spezialwahrscheinlichkeit p_1, genau $N_2 \lambda$-mal die Spezialwahrscheinlichkeit p_2, u. s. f. zur Geltung kam, läßt sich im Falle β) keine bestimmte Aussage hierüber machen. Zwar ist, sofern s eine sehr große Zahl vorstellt, dem Bernoullischen Theorem zufolge mit großer Wahrscheinlichkeit zu erwarten, daß die relative Häufigkeit, mit

welcher die Urnen der einzelnen Gattungen daran kommen, ni allzuviel von den Verhältnissen $\frac{N_1}{N}$, $\frac{N_2}{N_1}$ ... abweichen werde; es lie aber auch erhebliche Abweichungen von diesen Verhältnissen im reiche der Möglichkeit.

Im Falle α) kann von einer Wahrscheinlichkeit des Ereignisse schlechtweg, d. i. für die ganze Dauer der Versuche, nicht gesproc werden; sie ist eben $N_1 \lambda$-mal p_1, $N_2 \lambda$-mal p_2 u. s. f. Im Falle aber gibt p die Wahrscheinlichkeit von E für die ganze Versu dauer an; damit steht keineswegs im Widerspruche, daß bei der A führung des einzelnen Versuches, nachdem man sich bereits für Urne entschieden hat, aus welcher der nächste Zug geschehen s eine der Spezialwahrscheinlichkeiten wirksam wird; bei der völli Unwissenheit über die Anordnung der Urnen besteht doch immer die Generalwahrscheinlichkeit dafür, daß man eine weiße Kugel zie werde.

Der Fall β) ist also völlig äquivalent der Ausführung von s Ziehun aus der einen ursprünglichen Urne U, welche dem Erscheinen ei weißen Kugel die Elementarwahrscheinlichkeit p gab. Der Fall aber läßt sich in keiner Weise durch Ziehungen aus einer einzi Urne von gleichbleibender Füllung ersetzen.

Man hat, um das Ergebnis der Betrachtung zusammenzufas zwei Arten von Durchschnittswahrscheinlichkeiten zu unterschei solche von *bestimmter* und solche von *willkürlicher* Zusammensetz oder in anderer Terminologie[1]): konstant zusammengesetzte Du schnittswahrscheinlichkeiten und Durchschnittswahrscheinlichkeiten eigentlichen Sinne. Die letzteren sind analog den elementaren W scheinlichkeiten.

Daraus ergibt sich als naturgemäße Folgerung, daß auf Versu reihen, welchen eine elementare *oder* eine Durchschnittswahrscheinl keit im eigentlichen Sinne zugrunde liegt, das Bernoullis Theorem zur Anwendung zu kommen hat, daß also, was den letzt Fall betrifft, die Präzision lediglich nach der Durchschnittswahrsch lichkeit zu beurteilen ist. Bei Versuchsreihen hingegen, welchen Durchschnittswahrscheinlichkeit von bestimmter Zusammensetz zugrunde liegt, kommt das Theorem von Poisson zur Geltung; richtet sich die Präzision nach der Zusammensetzung der Du schnittswahrscheinlichkeit.

88. Das Gesetz der großen Zahlen. Das Hauptergel der Untersuchungen dieses Abschnittes läßt sich in folgendem sammenfassen.

„Wenn zwei einander ausschließenden Ereignissen E, F gew unveränderlich bleibende, der numerischen Rechnung zugängliche

1) L. v. Bortkewitsch, l. c., p. 650—651.

stände zugrunde liegen, so läßt sich eine Zahl p angeben derart, daß die Differenz zwischen p und dem Verhältnis $\frac{m}{s}$ der Wiederholungszahl m des Ereignisses E in einer sehr großen Zahl s von Realisierungen zu dieser Zahl selbst mit angebbarer Wahrscheinlichkeit P über gewisse enge Grenzen nicht hinausfällt. Der Zusammenhang zwischen P und den Grenzen ist ein solcher, daß mit wachsendem s bei festem P die Grenzen sich verengen, und bei festen Grenzen P der Einheit sich nähert. Dies hat weiter zur Folge, daß die Verhältnisse $\frac{m}{s}$, $\frac{m'}{s}$, die sich aus zwei Realisierungsreihen gleichen Umfanges ergeben, mit angebbarer Wahrscheinlichkeit eine Differenz erwarten lassen, die über bestimmte enge Grenzen nicht hinausfällt."

Den Inhalt dieser Aussage bezeichnet man als „Gesetz der großen Zahlen".

Was die ziffermäßige Bestimmung der Grenzen und der ihnen entsprechenden Wahrscheinlichkeit P betrifft, so ist in der vorigen Nummer auseinandergesetzt worden, wann hierzu die Formeln des Bernoullischen und wann jene des Poissonschen Theorems zu verwenden sind.

Das Gesetz der großen Zahlen ist ein Wahrscheinlichkeitssatz, der wie jeder andere, gleichgiltig ob es sich um eine einmalige oder eine wiederholte Realisierung handelt, nur das Maß einer Erwartung bestimmt; über den Verlauf des wirklichen Geschehens vermag kein Satz der Wahrscheinlichkeitslehre eine Auskunft zu geben. Wenn das Gesetz der großen Zahlen häufig als eine Vorhersage über das künftige Geschehen formuliert wird, so muß eine solche Auslegung vom Standpunkte der Theorie als unlogisch bezeichnet werden; nur als Ergebnis der vielfach gemachten *Erfahrung*, daß sich zufällige Ereignisse in ausgedehnten Versuchsreihen nahe im Verhältnis ihrer Wahrscheinlichkeiten zutragen, hat sie eine gewisse Berechtigung.

Poisson, von dem die Bezeichnung „Gesetz der großen Zahlen" herrührt[1]), hat selbst diese Auslegung vor Augen gehabt und unter jener Bezeichnung ein Gesetz verstanden, welches die physischen und moralischen Vorgänge beherrscht. Auch das Bernoullische Theorem faßt er als eine Aussage über das wirkliche Geschehen auf[2]). Jene Bezeichnung will er aber im Gegensatze zu diesem Theorem nur auf solche Ereignisse angewandt wissen, deren Wahrscheinlichkeit im Laufe der Versuche oder Beobachtungen sich ändert, und er erblickt in dem, was er Gesetz der großen Zahlen nennt, eine weittragende Verallgemeinerung des Bernoullischen Theorems. Wenn man jedoch seine mathematische Deduktion und die zu ihr beigebrachten Illu-

1) Comptes rend. 1 (1835), p. 478 ff.
2) Comptes rend. 2 (1836), p. 377 ff.

strationsbeispiele näher prüft, so kommt man zu der Einsicht, (
es sich um Ereignisse handelt, deren Wahrscheinlichkeit in der Fo
einer Durchschnittswahrscheinlichkeit im eigentlichen Sinne erscheː
auf welche das Bernoullische Theorem genau mit demselben Rec
angewandt werden darf wie auf Ereignisse, für die sich aus den
kannten Umständen eine Elementarwahrscheinlichkeit ergibt[1]).

III. Abschnitt. Wahrscheinlichkeiten auf Grund der Erfahrun[

§ 1. Wahrscheinlichkeit der möglichen Ursachen eines beobachteten Ereignisses.

89. Entwicklung der Fragestellung. Wenn über zwei]
eignisse (Tatbestände) E und F, die einander gegenseitig ausschließ
ein solches Wissen zu Gebote steht, welches gestattet, die Umfän
der Realisierungsmöglichkeiten, die mit Notwendigkeit das eine o(
das andere Ereignis herbeiführen, gegen einander abzugrenzen u
mit einander quantitativ zu vergleichen, so lassen sich auf Gru
dieses Wissens allein die für die Erwartungsbildung maßgebend
Wahrscheinlichkeiten berechnen, sei es, daß es sich nur um ei
einzelne Realisierung oder um eine Folge von solchen handelt.

Die hierdurch gekennzeichnete allgemeine Methode wird
Wahrscheinlichkeitsbestimmung a priori, eine nach dieser Methode l
stimmte Wahrscheinlichkeit auch als apriorische Wahrscheinlichk
bezeichnet. Bisher waren es nur Wahrscheinlichkeiten dieser Art, (
uns beschäftigt haben.

Es bedeutet nun einen wichtigen Schritt in der Entwicklung (
Wahrscheinlichkeitstheorie, daß man sie auch auf Ereignisse a
zudehnen sucht, bezüglich welcher ein so geartetes Wissen nicht v(
liegt, wo jedoch der beobachtete Erfolg einer oder mehrerer Realis
rungen zu Gebote steht. Denn die Anwendungen der Wahrscheinli(
keitstheorie auf Naturerscheinungen und Vorgänge des praktisch
Lebens bieten fast ausschließlich Fälle dieser Art dar.

Bevor es hier zu Erwartungsbildungen in bezug auf künfti
Erfolge kommen kann, muß ein Rückschluß von dem beobachtet
Erfolge auf die ihn bedingenden Umstände gemacht werden, u
dieser beruht wieder auf einem Wahrscheinlichkeitsurteil. Wir nehm
an, das vorhandene, aber unzureichende Wissen in Verbindung r
dem beobachteten Ereignis gestatte die Aufstellung einer begrenzt
oder auch unbeschränkten Menge von Annahmen über die dem l

[1]) Vgl. die eingehende Beleuchtung dieses Gegenstandes bei L. v. Bortk
witsch, l. c., p. 653 ff.

obachteten Ereignis zugrunde liegenden Umstände oder Bedingungen. Sowie nun ein bestimmter, bezeichneter Erfolg aus verschiedenen Bedingungskomplexen mit verschiedenem Grade der Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist, so kommt auch den verschiedenen möglichen Bedingungskomplexen, aus welchen ein wirklich beobachteter Erfolg hervorgegangen sein kann, verschiedene Wahrscheinlichkeit der Existenz zu. Erst wenn die Messung dieser gelungen ist, kann eine Berechnung über die Wahrscheinlichkeit erst zu beobachtender Erfolge angestellt werden.

Die Methode, welche ein zur apriorischen Wahrscheinlichkeitsbestimmung unzureichendes Wissen und die Ergebnisse der Erfahrung, der Beobachtung, zur Lösung von Aufgaben verwendet, wird als *Wahrscheinlichkeitsbestimmung a posteriori* bezeichnet. Unter einer aposteriorischen Wahrscheinlichkeit ist daher eine solche zu verstehen, bei deren Berechnung auch die Erfahrung mitgewirkt hat.

Es ist in der Wahrscheinlichkeitstheorie üblich geworden, die für die Erwartungsbildung maßgebenden Umstände im Hinblick auf ein ungewisses Ereignis seine *Ursache* zu nennen. In diesem Sinne spricht man auch von den möglichen Ursachen eines beobachteten Ereignisses und meint darunter die verschiedenen Bedingungskomplexe, aus welchen das Ereignis hervorgegangen sein kann. Es besteht hier ein Widerspruch mit dem gewöhnlichen Sprachgebrauch, indem unter Ursache nicht das verstanden wird, was dem Ereignis das Eintreffen, die Existenz, mit Notwendigkeit verleiht, sondern etwas, was sie ihm verleihen *kann*. Am zutreffendsten wäre es wohl, von Annahmen oder *Hypothesen* über die dem beobachteten Ereignis zugrunde liegenden Umstände zu sprechen; in vielen Fällen erweist sich die Bezeichnung „Entstehungsmodi" des beobachteten Ereignisses als zutreffend[1]).

Wir gehen nun daran, dasjenige Theorem in seinen verschiedenen Formen abzuleiten, auf welchem die Beurteilung der Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Ursachen beruht, welchen ein beobachtetes Ereignis zugeschrieben werden kann. Die Ableitung soll an schematischen Problemen vorgenommen werden, um deutlich erkennen zu lassen, daß sie keiner neuen Prinzipe bedarf und lediglich auf der Wahrscheinlichkeitsdefinition beruht, mit andern Worten, daß die aposteriorische Wahrscheinlichkeitsrechnung mit denselben logischen Schlüssen operiert wie die apriorische und nur in den Grundlagen der Rechnung von dieser sich unterscheidet. Einer späteren Stelle bleibt es dann vorbehalten, die Voraussetzungen, welche gemacht werden, auf ihren wesentlichen Inhalt zu prüfen und zu untersuchen, wie weit sie in besonderen Fällen erfüllt sind.

1) Vgl. hierzu J. v. Kries, Prinz. d. Wahrscheinlichkeitsrechnung, p. 122, und K. Stumpf, Über den Begriff d. mathem. Wahrsch. Sitzungsber. d. Münch. Ak. 1892, p. 96 ff.

90. Theorem von Bayes[1]) für den Fall, daß die Ursachen a priori gleichmöglich sind.

Wir stellen folgendes Problem zur Lösung:

„Es liegen n äußerlich gleiche Urnen $U_1, U_2, \cdots U_n$ von folgender Füllung vor:

U_1 enthält c_1 Kugeln, darunter a_1 weiße;
U_2 „ c_2 „ „ a_2 „ ;
. . . .
U_n „ c_n „ „ a_n „ ;

man hat aus einer der Urnen eine Kugel gezogen und sie weiß gefunden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel aus der Urne U_i stamme?"

Für das beobachtete Ereignis gibt es n mögliche Entstehungsmodi oder Ursachen, dargestellt durch die n Urnen; die Ursachen sind a priori, d. h. vor der Ziehung, *gleichmöglich*, weil für jede Urne die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ besteht, daß man sie wählen werde.

Um die Lösung der Aufgabe auf die Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit im bisher geläufigen Sinne zurückzuführen, gestalten wir die Bedingungen folgendermaßen um.

Zunächst bringen wir die Urnen auf gleiche Kugelzahl, ohne das Mischungs*verhältnis* in Ansehung der weißen Kugeln zu ändern. Ist v das kleinste gemeinschaftliche Vielfache (oder *ein* Vielfaches) der Zahlen $c_1, c_2, \cdots c_n$ und ist

$$v = \gamma_1 c_1 = \gamma_2 c_2 = \cdots = \gamma_n c_n, \tag{1}$$

so enthalten die Urnen je v Kugeln und darunter

$$\gamma_1 a_1, \quad \gamma_2 a_2, \quad \cdots \quad \gamma_n a_n$$

weiße.

Nun dürfen, ohne daß die ursprüngliche Gleichmöglichkeit der Einzelfälle gestört würde, die Inhalte der Urnen in *einer* Urne U vereinigt werden; vorher jedoch sollen die Kugeln jeder Urne mit der gleichen Nummer versehen werden, welche die Urne trägt, um sie auch jetzt noch nach ihrer Abstammung unterscheiden zu können.

Die ursprünglich gestellte Frage ist jetzt identisch mit der folgenden: Eine aus der Urne U gezogene Kugel war weiß; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie mit der Nummer i bezeichnet sei?

---

1) J. Bayes war der erste, der sich (in einer nach seinem Ableben durch Price veröffentlichten Abhandlung, erschienen im 53. Bande der Philos. Trans. [1764], p. 370—418) mit der Beurteilung der Wahrscheinlichkeit von Ursachen beschäftigte. Die Formulierung der Sätze verdankt man Laplace (Théorie analyt.)

Aber auch diese Frage kann vermöge des Umstandes, daß die Farbe der gezogenen Kugel bekannt ist, durch eine andere ersetzt werden: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne U', in die man aus U nur die weißen Kugeln gelegt hat, eine Kugel mit der Nummer i zu ziehen?

Und die Antwort hierauf ist auf Grund der Wahrscheinlichkeitsdefinition gegeben durch:

$$P_i = \frac{\gamma_i a_i}{\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n}.$$

Ersetzt man die γ durch ihre Werte aus der Relation (1), so wird

$$P_i = \frac{v\frac{a_i}{c_i}}{v\frac{a_1}{c_1} + v\frac{a_2}{c_2} + \cdots + v\frac{a_n}{c_n}} = \frac{\frac{a_i}{c_i}}{\frac{a_1}{c_1} + \frac{a_2}{c_2} + \cdots + \frac{a_n}{c_n}};$$

nun ist aber $\frac{a_i}{c_i} = p_i$ die Wahrscheinlichkeit, aus der Urne U_i eine weiße Kugel zu ziehen; demnach ist schließlich die Lösung für das ursprünglich gestellte Problem:

$$P_i = \frac{p_i}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}. \tag{2}$$

Durch Abstraktion ergibt sich hieraus das Theorem:

„Wenn ein beobachtetes Ereignis E mehreren a priori gleichmöglichen Ursachen zugeschrieben werden kann, jedoch so, daß eine von ihnen notwendig wirksam war, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Ursache U_i es war, gleich der Wahrscheinlichkeit, mit welcher das Ereignis aus ihr zu erwarten ist, geteilt durch die Summe der auf alle Ursachen bezogenen Wahrscheinlichkeiten dieses Ereignisses."

Hieraus ergibt sich die Bemerkung, daß die Wahrscheinlichkeit einer Ursache proportional ist der Wahrscheinlichkeit, welche sie dem beobachteten Ereignis verleiht; daraus folgt weiter, daß die größte Wahrscheinlichkeit jener Ursache zukommt, aus welcher unter allen das beobachtete Ereignis mit der größten Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist. Die Grenze dieses Zusammenhanges ist der *Kausalnexus*: Wo Ereignis und Ursache durch das Prädikat der (gegenseitigen) Notwendigkeit mit einander verknüpft sind, ist aus der Existenz des Ereignisses auch auf die Existenz der Ursache mit Sicherheit zu schließen.

91. Theorem von Bayes für den Fall, daß die Ursachen a priori verschiedene Wahrscheinlichkeit besitzen.

Es sei das folgende Problem zu lösen: „Eine Urne enthält c Kugeln; davon sind c_1 mit der Nummer 1 bezeichnet und a_1 davon

weiß; c_2 mit der Nummer 2 bezeichnet und a_2 davon weiß u. s. f. bis zur Nummer n. Es ist eine Ziehung gemacht und konstatiert worden, daß die gezogene Kugel weiß ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie die Nummer i trage?"

Für das beobachtete Ereignis gibt es n Entstehungsmodi, dargestellt durch die Gruppen gleichbezeichneter Kugeln; weil diese Gruppen ungleich zahlreich sind, so bestehen a priori verschiedene Wahrscheinlichkeitsgrade der Ursachen.

Mit Rücksicht darauf, daß die Farbe der gezogenen Kugel bekannt ist, kann die Aufgabe in eine andere umgewandelt werden, indem man die weißen Kugeln, in der Anzahl

$$a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

vorhanden, in eine andere Urne legt und nun die Frage nach der Wahrscheinlichkeit stellt, daß ein Zug eine mit der Nummer i bezeichnete Kugel bringe.

Diese Wahrscheinlichkeit ist aber

$$P_i = \frac{a_i}{a} = \frac{a_i}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

und läßt sich wie folgt umstellen:

$$P_i = \frac{\frac{c_i}{c}\frac{a_i}{c_i}}{\frac{c_1}{c}\frac{a_1}{c_1} + \frac{c_2}{c}\frac{a_2}{c_2} + \cdots + \frac{c_n}{c}\frac{a_n}{c_n}};$$

nun ist $\frac{c_i}{c} = \omega_i$ die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel aus der mit der Nummer i versehenen Gruppe zu ergreifen, also die apriorische Wahrscheinlichkeit der Ursache, um deren Wahrscheinlichkeit a posteriori gefragt wird, und $\frac{a_i}{c_i} = p_i$ die Wahrscheinlichkeit, welche diese Ursache dem beobachteten Ereignis verleiht. Die Lösung des gestellten Problems ist also durch

$$P_i = \frac{\omega_i p_i}{\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \cdots + \omega_n p_n} \tag{3}$$

gegeben.

Das in der vorigen Nummer formulierte Theorem erfährt also eine Modifikation dahin, daß die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses nach einer Ursache jedesmal mit der apriorischen Wahrscheinlichkeit der Ursache multipliziert in die Formel eingeht[1]).

1) K. Stumpf, l. c., p. 96, hat für die verschiedenen hier auftretenden Wahrscheinlichkeiten eine Nomenclatur vorgeschlagen: Er nennt ω_i die vor-

Man kann die Formel (3) auch so begründen. Es handelt sich um das Zusammentreffen des beobachteten Ereignisses und derjenigen Ursache, deren Wahrscheinlichkeitsgrad man bestimmen will. Faßt man dieses zusammengesetzte Ereignis zuerst so auf, daß die Ursache existent wird und durch sie das beobachtete Ereignis zu stande kommt, so schreibt sich seine Wahrscheinlichkeit:

$$\omega_i p_i;$$

denn vor dem Versuch ist ω_i die Wahrscheinlichkeit der Ursache, welche dem beobachteten Ereignis die Wahrscheinlichkeit p_i erteilt. Stellt man sich dann auf den Standpunkt, daß, wenn das beobachtete Ereignis eintrat, dies infolge der Wirkung der betreffenden Ursache geschah, so ergibt sich für dasselbe zusammengesetzte Ereignis die Wahrscheinlichkeit:

$$(\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \cdots + \omega_n p_n) P_i;$$

denn $\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \cdots + \omega_n p_n$ ist die Wahrscheinlichkeit, welche dem beobachteten Ereignis überhaupt, ohne Kenntnis der aktiven Ursache, eigen ist, und P_i die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Ereignis, nachdem es eingetreten, der bezeichneten Ursache zuzuschreiben sei. Aus der Gleichsetzung der beiden Ausdrücke ergibt sich wieder die Formel (3).

92. Die verschiedenartige Natur der Ursachen. In den Problemen, auf welche die Ableitung der Bayesschen Regel gegründet worden ist, waren die möglichen Ursachen materiell existent, das eine Mal vertreten durch die verschieden gefüllten Urnen, das andere Mal durch die verschieden bezifferten Kugelgruppen in einer Urne. Wahrscheinlichkeit einer Ursache bedeutete hier nicht die Wahrscheinlichkeit, daß sie existent sei, sondern daß das beobachtete Ereignis aus ihr hervorgegangen war.

Anders liegen die Dinge in dem folgenden Problem, das für viele Fälle der Anwendung typisch ist: „Eine Urne enthält c Kugeln, die nur weiß oder schwarz sein können; über den Hergang der Füllung der Urne ist nichts bekannt. Dagegen weiß man, daß in s Ziehungen, wobei die gezogene Kugel jedesmal zurückgelegt und unter die andern gemengt worden ist, immer eine weiße Kugel erschienen ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß a) die Urne nur weiße, b) mehr weiße als schwarze Kugeln enthalte?"

Hier sind es die verschiedenen *Annahmen*, welche über das Verhältnis der weißen und schwarzen Kugeln in der Urne gemacht wer-

---

gängige Wahrscheinlichkeit, p_i den Erklärungswert, das Produkt $\omega_i p_i$ die abstrakte (i. e. von den übrigen Ursachen absehende) und P_i die konkrete Wahrscheinlichkeit der betreffenden Ursache.

den können, die man als die möglichen Ursachen des beobachtet Ereignisses bezeichnet.

Der hypothetische Charakter der Ursachen tritt hier deutli zutage: nur *eine* der Ursachen, d. h. nur *ein* bestimmtes Füllun verhältnis kann existent sein; die Wahrscheinlichkeit einer Ursac kann hier als Wahrscheinlichkeit ihrer Existenz ausgelegt werden.

In den Beispielen der Nrn. 90 und 91 konnte die Ursache als Ereignis, als ein Geschehen aufgefaßt werden: Greifen in die betreffen Urne, Treffen der mit einer bestimmten Nummer versehenen Kug gruppe.

In dem vorliegenden Falle haben die Ursachen nicht die I deutung von Ereignissen, sondern die von hypothetischen Tatbestände

Wenn hier aus dem vollständigen Nichtwissen über die E stehungsweise der Urne die Gleichmöglichkeit aller Annahmen ül das Füllungsverhältnis deduziert wird, so ruht die gleiche Wahrsche lichkeit aller Ursachen auf einer andern Grundlage, als in dem B spiel der Nr. 90: dort war sie durch die Existenz und die äußerlic Gleichheit der verschieden gefüllten Urnen objektiv begründet; h hat es nur eine logische Berechtigung, wenn aus dem völlig Nichtwissen auf die gleiche Zulässigkeit der möglichen Füllungsv hältnisse geschlossen wird.

Bei der Lösung selbst ist zu beachten, daß mit Rücksicht die vorliegende Erfahrung c Annahmen über die Füllung der U gemacht werden können, welche enthalten sind in dem Schema:

$$\lambda \text{ weiße}, \quad c-\lambda \text{ schwarze Kugeln} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots$$

diesen Annahmen entsprechen die Wahrscheinlichkeiten

$$p_\lambda = \left(\frac{\lambda}{c}\right)^s \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots$$

des beobachteten Ereignisses.

Die Frage a) ist nach der Wahrscheinlichkeit der Existenz letzten Füllung gerichtet und hat

$$P_c = \frac{\left(\frac{c}{c}\right)^s}{\left(\frac{1}{c}\right)^s + \left(\frac{2}{c}\right)^s + \cdots + \left(\frac{c}{c}\right)^s} = \frac{c^s}{1^s + 2^s + \cdots + c^s}$$

zur Lösung.

Die Frage b) ist nach einer vollständigen Wahrscheinlichk gerichtet und daher durch die Summe der P_λ beantwortet, in welch λ größer als $c-\lambda$ ist; daher hat man:

für ein gerades c:

$$P = \frac{\left(\frac{c}{2}+1\right)^s + \left(\frac{c}{2}+2\right)^s + \cdots + c^s}{1^s + 2^s + \cdots + c^s},$$

für ein ungerades c:

$$P = \frac{\left(\frac{c+1}{2}\right)^s + \left(\frac{c+3}{2}\right)^s + \cdots + c^s}{1^s + 2^s + \cdots + c^s}.$$

So wäre beispielsweise für $c = 5$ und $s = 4$:

$$P_5 = \frac{5^4}{1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4} = \frac{625}{979} = 0{,}6384,$$

$$P = \frac{3^4 + 4^4 + 5^4}{1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4} = \frac{962}{979} = 0{,}9826.$$

Während nach der obigen Fassung von dem Inhalte der Urne außer der Gesamtzahl der Kugeln nichts bekannt war, nehmen wir jetzt an, derselbe sei so entstanden, daß man aus einer Hilfsurne mit α weißen und β schwarzen Kugeln c-mal zog (die Kugel zurücklegend) und in die zu bildende Urne jedesmal eine Kugel von der Farbe der gezogenen einlegte.

Die c Füllungsmodi haben nun a priori verschiedene Wahrscheinlichkeit; allgemein kommt der Annahme, daß λ weiße und $c - \lambda$ schwarze Kugeln vorhanden sind, die Wahrscheinlichkeit

$$\omega_\lambda = \binom{c}{\lambda}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^\lambda \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{c-\lambda} \qquad (\gamma = \alpha + \beta)$$

zu, mit welcher zu erwarten war, daß aus der Hilfsurne λ-mal weiß und $c - \lambda$-mal schwarz gezogen werde.

Hiernach ist bei diesem Stande des Wissens

$$P_c = \frac{\omega_c p_c}{\sum_1^c \omega_\lambda p_\lambda} = \frac{\alpha^c c^s}{\binom{c}{1}\alpha\beta^{c-1}1^s + \binom{c}{2}\alpha^2\beta^{c-2}2^s + \cdots + \binom{c}{c}\alpha^c c^s},$$

$$P = \frac{\sum_\varkappa^c \omega_\lambda p_\lambda}{\sum_1^c \omega_\lambda p_\lambda},$$

wo $\varkappa = \frac{c}{2} + 1$ oder $\frac{c+1}{2}$, jenachdem c gerad oder ungerad ist.

Der Erkenntniswert dieser Wahrscheinlichkeiten ist größer als im vorigen Falle, weil sie sich auf ein umfangreicheres Wissen gründen.

Mit den früheren Werten $c = 5$ und $s = 4$ und mit $\alpha = 2$, $\beta = 1$ findet man:

$$P_5 = \frac{2^5 \cdot 5^4}{5 \cdot 2 \cdot 1^4 + 10 \cdot 2^2 \cdot 2^4 + 10 \cdot 2^3 \cdot 3^4 + 5 \cdot 2^4 \cdot 4^4 + 2^5 \cdot 5^4} = \frac{2000}{4761} = 0{,}4201$$

$$P = \frac{4696}{4761} = 0{,}9863.$$

93. Theorem von Bayes bei unbegrenzter Menge möglicher Ursachen.

Diejenige Form, in welcher die Frage nach der Wahrscheinlichkeit einer speziellen Ursache oder eines Ursachenkomplexes für ein beobachtetes Ereignis in den Anwendungen am häufigsten sich einstellt, läßt sich aus dem folgenden Schema entnehmen.

„Der beobachtete Erfolg bestehe in dem m-maligen Eintreffen und dem n-maligen Ausbleiben eines Ereignisses E in $s = m + n$ Versuchen, dem von vornherein jede Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1 zugeschrieben werden kann. Über die Umstände, welche auf diese Wahrscheinlichkeit Einfluß haben, sei entweder gar nichts bekannt, so daß man genötigt ist, allen Werten aus dem bezeichneten Intervall gleichen Möglichkeitsgrad beizulegen, oder aber es bestehe nach dieser Richtung ein solches Wissen, daß man den Wahrscheinlichkeitsgrad a priori jedes Wertes anzugeben imstande ist."

Die Annahme eines Wertes x für die Wahrscheinlichkeit von E ist hier als eine Ursache des beobachteten Ereignisses aufzufassen; es gibt also der Ursachen eine unendliche, unzählbare Menge, weil die Menge der reellen Werte in einem Intervall unzählbar ist. Mit der Supponierung eines Wertes x ist aber eine Hypothese über die Natur der zugrunde liegenden Umstände in der Regel nicht gemacht; nur ein allgemeines Bild ist hierfür geschaffen, indem man sagen kann, es verhalte sich mit dem Ereignis in bezug auf seine Verwirklichung so, wie mit dem Ziehen einer weißen Kugel aus einer Urne, welche mit einer unendlichen Menge weißer und schwarzer Kugeln in dem durch die Zahl x gekennzeichneten Mischungsverhältnis gefüllt ist. Die Menge der Kugeln muß als unendlich vorausgesetzt werden, damit das Mischungsverhältnis jedes Wertes fähig sei.

Für das beobachtete Ereignis entspringt aus x die Wahrscheinlichkeit

$$y = x^m (1 - x)^n;$$

mithin wäre bei gleicher apriorischer Wahrscheinlichkeit aller Werte von x die aposteriorische Wahrscheinlichkeit des besonderen Wertes x gleich

$$\frac{y}{\sum\limits_0^1 y}.$$

Aber ein solcher Ausdruck ist unausführbar, da die Summe im Nenner sich über *alle* Werte des Intervalles (0, 1) zu erstrecken hätte; er zeigt nur die von vornherein erkennbare Tatsache an, daß die Wahrscheinlichkeit eines individuellen Wertes x von Null nicht zu unterscheiden ist.

Hier ist also eine Modifikation der Fragestellung notwendig und diese soll darin bestehen, daß man um die Wahrscheinlichkeit eines Wertes aus dem Intervall $(x, x + dx)$ fragt; diese wird der Größe dx des Intervalls und dem zugehörigen Werte von y, der in dem Intervall als konstant erachtet werden kann, proportional, also durch

$$\varkappa y dx$$

darstellbar sein; bemerkt man, daß die auf alle Intervalle bezogene Summe dieser Ausdrücke den Wert 1 haben muß, so folgt aus der Gleichung

$$\varkappa \int_0^1 y dx = 1$$

für $\varkappa$ die Bestimmung:

$$\varkappa = \frac{1}{\int_0^1 y dx},$$

und hiermit ergibt sich für die beschriebene Wahrscheinlichkeit der Ausdruck:

$$p_x = \frac{y dx}{\int_0^1 y dx}. \tag{4}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß x in ein endliches Intervall (θ, θ') falle, ist daraus

$$P = \frac{\int_\theta^{\theta'} y dx}{\int_0^1 y dx}. \tag{5}$$

In dem Falle, daß man die Wahrscheinlichkeit a priori eines Wertes x anzugeben imstande ist — sie heiße w und wird eine Funktion von x sein — erfahren die Formeln (4), (5) eine ähnliche Änderung, wie sie sich bei dem Übergange von (1) zu (2) ergeben hat, und gehen über in:

$$p_x = \frac{w y dx}{\int_0^1 w y dx}, \tag{6}$$

beziehungsweise

$$P = \frac{\int_\theta^{\theta'} w y dx}{\int_0^1 w y dx}. \tag{7}$$

94. Die wahrscheinlichste Hypothese. Die wahrschei lichste Hypothese über die bedingenden Umstände des beobachtet Ereignisses ist durch jenen Wert von x gekennzeichnet, welcher χ d. h. welcher y, beziehungsweise wy zum Maximum macht. M nennt diesen Wert — er heiße a — die *Wahrscheinlichkeit von E na der wahrscheinlichsten Hypothese.*

Aus $y = x^m (1-x)^n$ ergibt sich durch Nullsetzen des Differentia quotienten die Bestimmung

$$a = \frac{m}{m+n} = \frac{m}{s};$$

hiermit berechnet sich der maximale Wert von y:

$$M = \frac{m^m n^n}{s^s}.$$

Wir wollen nun das Verhalten von y in der Umgebung d Maximums unter der Voraussetzung prüfen, daß s eine große Zahl i und setzen zu diesem Ende

$$x = \frac{m}{s} + z,$$

wodurch

$$1 - x = \frac{n}{s} - z$$

und

$$y = \left(\frac{m}{s} + z\right)^m \left(\frac{n}{s} - z\right)^n = M\left(1 + \frac{s}{m} z\right)^m \left(1 - \frac{s}{n} z\right)^n = MZ$$

wird. Je kleiner z, um so genauer darf die Entwicklung

$$l \cdot Z = m\, l \cdot \left(1 + \frac{s}{m} z\right) + n\, l \cdot \left(1 - \frac{s}{n} z\right)$$

$$= m\left(\frac{s}{m} z - \frac{s^2}{2m^2} z^2 + \cdots\right) + n\left(-\frac{s}{n} z - \frac{s^2}{2n^2} z^2 - \cdots\right)$$

bei der zweiten Potenz dieses Arguments abgebrochen werden; es w dann

$$l \cdot Z = -\frac{s^2}{2mn} z^2$$

und somit

$$Z = e^{-\frac{s^3}{2mn} z^2};$$

bei Berücksichtigung der Glieder mit z^3 träte im Exponenten ei Glied, $\frac{s^3(n^3 - m^3)}{3m^3n^3} z^3$, hinzu, das bei großem s (und m, n) auf de Wert der Exponentialgröße nur unerheblichen Einfluß nimmt.

Der Ansatz

$$y = Me^{-\frac{s^3}{2mn} z^2} \qquad ($$

zeigt nun, daß y in der Umgebung von a anfangs langsam, bald aber sehr rasch abnimmt und Werte erlangt, die im Vergleich zu M außerordentlich gering sind. Zur Erläuterung dieser Angaben möge folgendes dienen: Für $m = 300$, $n = 200$, $(s = 500)$, ist $a = \frac{3}{5}$, und es findet sich, daß

$$\begin{array}{llll} \text{für } z = \pm \frac{1}{100} & y = 0{,}90107\,M, \\ \text{„} \quad \text{„} = \pm \frac{5}{100} & \text{„} = 0{,}073965\,M, \\ \text{„} \quad \text{„} = \pm \frac{1}{10} & \text{„} = 0{,}000029929\,M, \\ \text{„} \quad \text{„} = \pm \frac{1}{5} & \text{„} = 0{,}000000000000000080241\,M. \end{array}$$

Wenn auch die Rechnung bei so großem z nicht mehr scharf genug ist, so zeigt sie doch, daß Annahmen über x, die nur einigermaßen von der wahrscheinlichsten Annahme a abweichen, im Vergleich zu dieser eine überaus geringe Wahrscheinlichkeit für sich haben.

Was den Maximalwert M von y selbst betrifft, so ist er außerordentlich klein und im vorliegenden Falle erst an der 147. Dezimalstelle mit einer bedeutsamen Ziffer besetzt.

Mit diesem Verhalten steht die Funktion y in einem gewissen Gegensatze zu der Funktion $x^n e^{-x}$, welche wir in Nr. 11 unter Voraussetzung eines großen n betrachtet haben.

95. Beispiel XLIX. *In eine Urne wurden c Kugeln, weiße und schwarze, durch Auslosung mit einer Münze eingebracht: so oft Wappen fiel, wurde eine weiße, so oft Schrift fiel, eine schwarze Kugel eingelegt. Eine darauffolgende Ausführung von s Ziehungen, wobei die gezogene Kugel zurückgelegt worden, ergab m weiße und n schwarze Kugeln. Welches ist die wahrscheinlichste Hypothese über die Zusammensetzung der Urne?*

Vorausgesetzt wird, daß c und s große Zahlen bedeuten.

Unabhängig von jeder Rechnung können hier gewisse Erwägungen angestellt werden. Auf Grund des Entstehungsmodus der Urne, welcher das vorgängige Wissen darstellt, wäre $\frac{1}{2}$ die wahrscheinlichste Annahme über die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen einer weißen Kugel. Aus der gemachten Erfahrung ergäbe sich hierfür $\frac{m}{s}$. Sollen beide Momente bei der Feststellung der wahrscheinlichsten Hypothese zusammenwirken, wie das die Natur der Sache fordert, so wird ein Wert zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{m}{s}$ zu nehmen sein, falls nicht vielleicht $\frac{m}{s} = \frac{1}{2}$ ist. Bei der Entscheidung der Frage, welchem von den beiden Werten man näherrücken soll, wäre auf die Umfänge der Versuchs-

reihen Rücksicht zu nehmen, durch welche einerseits die Füllung der Urne, andrerseits die Beobachtungsreihe zustande kam. Niemand würde Anstand nehmen, wenn beide Reihen gleich umfangreich waren ($c = s$), den wahrscheinlichsten Wert in die Mitte zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{m}{s}$ zu verlegen; ein Überwiegen des c würde das Vertrauen zu $\frac{1}{2}$, ein Überwiegen des s das Vertrauen zu $\frac{m}{s}$ erhöhen und ein Näherrücken an diesen Wert rechtfertigen.

Sehen wir nun zu, welche Antwort die Rechnung gibt.

Die Wahrscheinlichkeit, daß in die Urne statt $\frac{c}{2}$ weiße Kugeln deren $\frac{c}{2} + l$ kommen, ist (s. Nr. 69) proportional

$$e^{-\frac{2l^2}{c}};$$

ist dem so, dann ist $\frac{1}{2} + \frac{l}{c}$ die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen, $\frac{1}{2} - \frac{l}{c}$ die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel und

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{l}{c}\right)^m \left(\frac{1}{2} + \frac{l}{c}\right)^n$$

die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses. Setzt man $\frac{l}{c} = z$, so ist

$$\frac{1}{2} - z$$

die wahrscheinlichste Hypothese, wenn für z derjenige Wert gesetzt wird, der

$$e^{-2cz^2}\left(\frac{1}{2} - z\right)^m \left(\frac{1}{2} + z\right)^n$$

zu einem Maximum macht. Die Bedingung dafür ist:

$$-4cz - \frac{m}{\frac{1}{2} - z} + \frac{n}{\frac{1}{2} + z} = 0;$$

sie kann, da z nur als ein kleiner echter Bruch zu vermuten ist, angenähert durch die folgende ersetzt werden:

$$-4cz - 2m(1 + 2z) + 2n(1 - 2z) = 0;$$

daraus berechnet sich

$$z = \frac{n - m}{2(c + s)}$$

und

$$\frac{1}{2} - z = \frac{c + 2m}{2(c + s)}.$$

Dies ist aber das arithmetische Mittel aus $\frac{1}{2}$ und $\frac{m}{s}$, wenn man diesen Zahlen die Gewichte c und s beilegt; denn

$$\frac{c \cdot \frac{1}{2} + s \cdot \frac{m}{s}}{c + s} = \frac{c + 2m}{2(c+s)}.$$

Die Rechnung bestätigt also die allgemeinen Erwägungen vollinhaltlich.

96. Umkehrung des Bernoullischen Theorems. Während das Bernoullische Theorem die Erwartungsbildung für eine große Anzahl vorzunehmender Beobachtungen oder Versuche regelt, wenn die Wahrscheinlichkeiten für die dabei in Betracht kommenden, einander ausschließenden Ereignisse E, F bekannt sind und durch die Dauer der Versuche unverändert bleiben; so gestattet umgekehrt das Theorem von Bayes unter gewissen Voraussetzungen, aus dem Ergebnis einer ausgedehnten Beobachtungsreihe einen Schluß zu ziehen auf die unbekannten Wahrscheinlichkeiten der beteiligten Ereignisse; selbstverständlich kann dieser Schluß nur in einem Wahrscheinlichkeitsurteil bestehen. Vorausgesetzt wird dabei die Unveränderlichkeit der bedingenden Umstände während der Beobachtungen und gleiche apriorische Wahrscheinlichkeit der möglichen Hypothesen.

Der beobachtete Erfolg bestehe in dem m-maligen Eintreffen eines Ereignisses E und in dem n-maligen Eintreffen des entgegengesetzten Ereignisses F in $m + n = s$ Versuchen; die unbekannten, zur Einheit sich ergänzenden Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse seien p, q.

Die Wahrscheinlichkeit, daß p zwischen die Grenzen $\frac{m}{s} - \theta$ und $\frac{m}{s} + \theta$ falle, von seinem wahrscheinlichsten Werte $\frac{m}{s}$ also höchstens um θ nach der einen oder andern Seite abweiche, ist nach Formel (5), Nr. 93 gleich

$$P = \frac{\int\limits_{\frac{m}{s}-\theta}^{\frac{m}{s}+\theta} y\,dx}{\int\limits_0^1 y\,dx},$$

darin $y = x^m(1-x)^n$ gesetzt.

Für das Integral im Nenner ergibt sich durch Anwendung partieller Integration leicht

$$\int\limits_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}. \qquad (9)$$

In dem Zählerintegral setze man

$$x = \frac{m}{s} + z;$$

es geht dadurch über in

$$\int_{-\theta}^{\theta} \left(\frac{m}{s} + z\right)^m \left(\frac{n}{s} - z\right)^n dz,$$

wofür unter der Voraussetzung, daß die Grenzen des Integral seien, nach den Entwicklungen der Nr. 94 mit großer Annäher

$$\frac{m^m n^n}{s^s} \int_{-\theta}^{\theta} e^{-\frac{s^3 z^2}{2mn}} dz$$

geschrieben werden kann.

Mit dieser Umgestaltung und Approximation wird

$$P = \frac{(s+1)!}{m!\,n!} \frac{m^m n^n}{s^s} \int_{-\theta}^{\theta} e^{-\frac{s^3 z^2}{2mn}} dz.$$

Wendet man auf die Fakultäten die Stirlingsche Formel ergibt sich:

$$\frac{(s+1)!}{m!\,n!} = (s+1) \frac{s^s e^{-s} \sqrt{2\pi s}}{m^m n^n e^{-s} 2\pi \sqrt{mn}} = \frac{(s+1) s^s \sqrt{s}}{m^m n^n \sqrt{2\pi mn}},$$

wofür, je größer s, mit um so größerer Annäherung

$$\frac{s^s}{m^n n^n} \sqrt{\frac{s^3}{2\pi mn}}$$

substituiert werden kann.

Dann aber lautet P wie folgt:

$$P = \sqrt{\frac{s^3}{2\pi mn}} \int_{-\theta}^{\theta} e^{-\frac{s^3 z^2}{2mn}} dz;$$

führt man hierin die neue Variable t ein,

$$\sqrt{\frac{s^3}{2mn}}\, z = t$$

setzend, und bezeichnet $\theta \sqrt{\frac{s^3}{2mn}}$ mit γ, so gelangt man zu Satze:

„*Es ist mit der Wahrscheinlichkeit*

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

—

zu erwarten, daß die unbekannte Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses E zwischen den Grenzen

$$\frac{m}{s} - \gamma\sqrt{\frac{2mn}{s^3}} \quad \text{und} \quad \frac{m}{s} + \gamma\sqrt{\frac{2mn}{s^3}} \tag{11}$$

liege."

Da das Intervall der Grenzen, $2\gamma\sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$, von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{s}}$ ist, weil m, n im allgemeinen von der Ordnung der Zahl s sind, so konvergiert es, wie groß auch γ, d. h. wie nahe auch P der Einheit angenommen wird, mit wachsendem s gegen Null. Man kann also die Zahl s der Beobachtungen so groß wählen, daß mit einer der Einheit beliebig nahen Wahrscheinlichkeit erwartet werden darf, die unbekannte Wahrscheinlichkeit p[1]) liege innerhalb beliebig eng festgesetzter Grenzen. In diesem Ausspruche liegt die *Umkehrung der großen Zahlen.*

Sowie unter der Voraussetzung, daß die Wahrscheinlichkeit p von E *bekannt* sei, von wahrscheinlichen Grenzen der relativen Häufigkeit $\frac{m}{s}$ von E in s Versuchen und von einer Präzision der Versuchsreihe gesprochen wurde, so kann auch hier von wahrscheinlichen Grenzen der *unbekannten* Wahrscheinlichkeit p von E und von der Präzision ihrer Bestimmung durch die Versuchsreihe die Rede sein. Es sind nämlich im Sinne der Ausführungen von Nr. 73

$$\frac{m}{s} - 0{,}476936\sqrt{\frac{2mn}{s^3}} \quad \text{und} \quad \frac{m}{s} + 0{,}476936\sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$$

die wahrscheinlichen Grenzen von p, d. h. die Grenzen, innerhalb deren sein Wert mit der Wahrscheinlichkeit $P = \frac{1}{2}$ zu erwarten ist, und nach Nr. 79 ist

$$h = \sqrt{\frac{s^3}{2mn}}$$

die Präzision der durch die Erfahrung gewonnenen Bestimmung $\frac{m}{s}$ für p.

Zur Ausführung der hier auftretenden Rechnungen bedient man sich der Tafel I.

Es handle sich beispielsweise um die folgende Frage: Aus einer Urne, welche 1000000 Kugeln enthält, weiße und schwarze in unbekanntem Mischungsverhältnis, sind 800 Kugeln gezogen worden[2]); davon waren 320 weiß und 480 schwarz; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß

1) Gleichgiltig, ob es eine elementare oder eine Durchschnittswahrscheinlichkeit im eigentlichen Sinne ist. (Vgl. Nr. 87.)

2) Für das numerische Endresultat wird es hier gleichgiltig sein, ob man sich die Kugeln zurückgelegt denkt oder nicht.

das Verhältnis der Anzahl der weißen Kugeln zu ihrer Gesamt: dessen wahrscheinlichster Wert auf Grund der Beobachtung $\frac{2}{5}$ zwischen die Grenzen $\frac{15}{40}$ und $\frac{17}{40}$ falle?

Wiewohl hier x, die hypothetische Wahrscheinlichkeit für Ziehen einer weißen Kugel, nicht *aller* Werte zwischen 0 und 1 f: ist, so sind die möglichen Werte doch so dicht, daß man bei Fiktion, x sei eine stetige Variable, verbleiben darf.

Aus dem Ansatz

$$\gamma\sqrt{\frac{2\cdot 320\cdot 480}{800^3}} = \frac{1}{40}$$

berechnet sich $\gamma = 1{,}0205$; somit ist

$$P = \Phi(1{,}0205) = 0{,}85104.$$

Mit dieser Wahrscheinlichkeit ist anzunehmen, daß die Anzahl weißen Kugeln in der Urne nicht unter 375000 und nicht i 425000 betrage.

97. Allgemeine Bemerkungen über die Wahrscheinl: keiten von Ursachen. Man kann die Bedeutung einer a p bestimmten Wahrscheinlichkeit mittels des Gesetzes der großen Za illustrieren, indem man sagt, in einer großen Anzahl von Versu werde sich das Ereignis höchstwahrscheinlich nahezu in der d seine Wahrscheinlichkeit ausgedrückten relativen Häufigkeit zutra Diese Deutung haben einige Philosophen[1]) geradezu als Grund für die Definition der Wahrscheinlichkeit genommen, mitunter a dings von einer prinzipiell mißverständlichen Auffassung des I noullischen Theorems ausgehend. Zu einer gemeinverständli Erklärung einer numerischen Wahrscheinlichkeit ist diese Deut am besten geeignet.

Es entsteht nun die Frage: Lassen die Wahrscheinlichkeiten Ursachen eine solche Deutung immer zu, nicht etwa bloß forı sondern in berechtigter Weise?

Wir wollen diese Frage an Beispielen erörtern.

Aus einer Urne, von der man bloß weiß, daß sie vier Kug die schwarz oder weiß sind, enthält, sind vier Ziehungen (mit je maligem Zurücklegen der Kugel) gemacht worden und ergaben mal weiß und einmal schwarz. Nach der Bayesschen Regel ist Wahrscheinlichkeit, daß die Urne zwei weiße und zwei schw Kugeln enthalte,

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{4}\right)^3\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^3\frac{3}{4}} = \frac{8}{23}.$$

1) J. St. Mill, A System of Logic (1. Aufl. 1843); J. Venn, Logic of chance (1

Läßt dieses Resultat in *berechtigter* Weise eine Deutung nach dem Gesetz der großen Zahlen zu? Darf man sagen: Wenn man sehr viele Urnen nimmt, deren jede vier Kugeln enthält, die nur weiß oder schwarz sein können; wenn man aus jeder vier Ziehungen in der beschriebenen Weise macht und dabei jene Urnen ausscheidet, welche dreimal weiß und einmal schwarz ergaben, so werden nahe $\frac{8}{23}$ von diesen Urnen mit zwei weißen und zwei schwarzen Kugeln gefüllt sein?

Für diesen Schluß besteht kein innerer Grund, da man nicht weiß, wie die Urnen entstanden, d. h. wie sie gefüllt worden sind. Er hätte Berechtigung nur dann, wenn man wüßte, daß bei der Füllung alle möglichen Kombinationen, nämlich drei weiß, eine schwarz; zwei weiß, zwei schwarz; eine weiß, drei schwarz, gleichmäßig berücksichtigt worden sind. Ist dieses Wissen nicht vorhanden, dann kann der Schluß irreführen.

Wir ändern nun dasselbe Beispiel dahin ab, daß wir als feststehend voraussetzen, die Urne sei durch Auslosung mit einer Münze entstanden derart, daß für Wappen weiß und für Schrift schwarz eingelegt wurde. Jetzt gibt die Bayessche Regel für dieselbe Füllung bei demselben beobachteten Ereignis die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}}{4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\frac{1}{4}+6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{2}+4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\frac{3}{4}}=\frac{4}{9}.$$

Dieses Resultat läßt eine objektiv begründete Deutung in dem obigen Sinne zu wie folgt: Wenn man eine sehr große Anzahl von Urnen in der beschriebenen Weise füllt; wenn man aus jeder vier Ziehungen macht und diejenigen Urnen bei Seite stellt, aus welchen dreimal weiß und einmal schwarz zum Vorschein kam; so ist es sehr wahrscheinlich, daß nahe $\frac{4}{9}$ dieser Urnen mit zwei weißen und zwei schwarzen Kugeln gefüllt sein werden.

In den Fällen, wo das apriorische Wahrscheinlichkeitsgesetz der Ursachen bekannt ist, haben die nach der Bayesschen Regel ermittelten Wahrscheinlichkeiten dieselbe Berechtigung und Bedeutung, wie a priori bestimmte Wahrscheinlichkeiten.

Wo jedoch die Kenntnis dieses Gesetzes mangelt und man genötigt ist, den Hypothesen gleiche apriorische Wahrscheinlichkeit zuzuschreiben, sind die Resultate nicht kritiklos hinzunehmen. Die schablonenhafte Anwendung der Bayesschen Regel kann hier zu Ergebnissen führen, die keinen inneren Wert besitzen und gegen deren Anerkennung sich der gemeine Verstand sträubt.

Indessen kann die mehrerwähnte Regel auch dann zu brauchba Resultaten führen, wenn die Annahme gleicher apriorischer M lichkeit der Hypothesen zweifellos unbegründet ist; dies trifft wenn der Rechnung sehr umfangreiche Erfahrungsdaten zugru gelegt werden können, und erklärt sich aus dem Verhalten Wahrscheinlichkeit eines aus vielen Ereignissen zusammengesetz Erfolges, in ihrer außerordentlich raschen Abnahme, sobald man s von ihrem Maximum nach der einen oder andern Seite entfernt, al auch durch den Umstand, daß in den meisten Fällen innerhalb ni zu weiter Grenzen eine Abstufung des Wahrscheinlichkeitsgrades Ursachen a priori wirklich untunlich ist. Hier bildet die ausgebreit Erfahrung trotz des Mangels vorgängiger Kenntnisse eine zureiche feste Grundlage für die Beurteilung des Wahrscheinlichkeitsgrades.

Als Beispiel einer mißverständlichen Anwendung der Bayessch Regel kann die folgende Frage gelten: Mit einer Münze ist einn geworfen worden und es erschien Wappen; wie groß ist die Wa scheinlichkeit, daß die Wappenseite gegenüber der Schriftseite l günstigt sei?

Hat man nämlich keinen Grund, aus der Beschaffenheit Münze eine Ungleichheit der beiden Münzseiten betreffs ihrer Rea sierungsmöglichkeit zu vermuten, dann ist der Wahrscheinlichkei ansatz $\frac{1}{2}$ für beide innerlich, objektiv, so stark motiviert, daß gemachte „Erfahrung" gar keinen Einfluß üben kann. Ist aber Gru zu einer solchen Vermutung vorhanden, so wird die eine Erfahru gewiß nicht für zureichend befunden werden, das Maß der Vermutu zu bestimmen.

Stellte man sich auf den Standpunkt, daß mangels einer g naueren Einsicht alle Werte von 0 bis 1 für die Wahrscheinlichkeit der Wappenseite als gleichmöglich anzusehen seien, so ergäbe Bayessche Regel als Wahrscheinlichkeit für die Begünstigung die Münzseite

$$\frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\,dx}{\int_{0}^{1} x\,dx} = \frac{3}{4},$$

ein Resultat, das durch sich selbst die Unzulässigkeit einer solch Rechnungsweise verrät. Sollte die eine Beobachtung eine so gro Wahrscheinlichkeit für die erwähnte Hypothese begründen?

In der Tat entspricht die Rechnung keineswegs dem Stande d vorhandenen Wissens. Wenn auch die Gestaltung der Münzseit

(das ungleiche Relief) die Vermutung nahelegt, daß ihnen verschiedene Wahrscheinlichkeitsgrade zukommen dürften, so wird man doch keineswegs zugeben, es könnte die Wahrscheinlichkeit einer Seite ebenso leicht $\frac{1}{8}$ wie $\frac{3}{8}$ oder $\frac{5}{8}$ oder $\frac{15}{16}$ u. s. w. betragen, wie das die Rechnung annimmt. Vielmehr wird der Sachverhalt der sein, daß man eine Abweichung innerhalb gewisser enger Grenzen für möglich, außerhalb derselben aber für ausgeschlossen hält; daß man ferner innerhalb dieser Grenzen eine Abstufung des Möglichkeitsgrades vorzunehmen sich außer stande fühlt. Zu einer begründeten Feststellung des Grenzintervalls fehlt es aber an jeglichem Behelf. Indessen zeigt die Probe mit einer annehmbaren Hypothese, wie erheblich sich das Resultat der Rechnung durch diese Auffassung ändert. Angenommen, man würde nach einer Besichtigung der Münze eine Abweichung bis zu $\frac{1}{16}$ für möglich halten, dann wäre das Intervall, innerhalb dessen x sich bewegen kann, durch $\frac{7}{16}$ und $\frac{9}{16}$ begrenzt, und die Wahrscheinlichkeit der Begünstigung der Wappenseite, erschlossen aus dem angestellten Versuch, betrüge

$$\frac{\int_{\frac{8}{16}}^{\frac{9}{16}} x\,dx}{\int_{\frac{7}{16}}^{\frac{9}{16}} x\,dx} = \frac{17}{32} = 0{,}531\cdots.$$

In diesem Resultate wird man nichts Befremdliches mehr erblicken können, wenn überhaupt eine so geringe Erfahrung als zureichende Grundlage für eine Rechnung erachtet wird.

Wären neun Versuche gemacht worden und hätten alle das Resultat „Wappen“ ergeben, so wäre dies schon ein erheblicher Grund, zu vermuten, die Wappenseite sei begünstigt; die erste Rechnungsweise gibt als Maß dieser Vermutung

$$\frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^9\,dx}{\int_{0}^{1} x^9\,dx} = \frac{1023}{1024} = 0{,}99903\cdots,$$

nach der zweiten ist es bloß

$$\frac{\int_{\frac{8}{16}}^{\frac{9}{16}} x^9\,dx}{\int_{\frac{7}{16}}^{\frac{9}{16}} x^9\,dx} = \frac{9^{10}-8^{10}}{9^{10}-7^{10}} = 0{,}753\cdots.$$

Nicht in den Ziffern, sondern in der mit dem gemeinen Verstan harmonierenden Tatsache liegt der erkenntnistheoretische Wert dies Resultate, daß die erweiterte Erfahrung den Wahrscheinlichkeitsgr der Vermutung erheblich vermehrt hat.

98. Beurteilung einer Abweichung eines beobachtete Erfolges vom erwartungsmäßigen. Der Erkenntniswert ein a priori angesetzten numerischen Wahrscheinlichkeit hängt von de Grade der Sicherheit ab, mit welchem man von der Gleichmöglic keit der Einzelfälle überzeugt ist. Der ideale Fall einer absolut Sicherheit hierüber wird dort, wo es sich um eine physische Urtei materie handelt, kann jemals eintreten. Wäre er vorhanden, so stünde auch kein Zweifel darüber, daß eine Abweichung, die beobachteter Erfolg dem erwartungsmäßigen, d. h. dem wahrsche lichsten gegenüber zeigt, und wäre sie noch so groß, dem Zuf also den während der Beobachtung beständig variierenden Umstän zuzuschreiben ist.

Besteht jene absolute Sicherheit nicht, ist vielmehr für ei Zweifel an der Gleichmöglichkeit der Fälle Raum vorhanden, so üb trägt sich dieser Zweifel auch auf den Ursprung einer wa genommenen Abweichung, und es tritt die Frage auf: Ist die A weichung ein Werk des Zufalls oder ist sie in der Urteilsmate selbst begründet?

Es liegt in der Natur der Sache, daß auf eine solche Fra niemals eine dezidierte Antwort wird zu geben sein. Sie kann nu zu Vermutungen Anlaß geben, und auch diese werden mit Vorsich zu fassen sein. Wie weit kann hier die Rechnung zu Hilfe genomme werden?

Vor allem ist zu bemerken, daß die beiden Sachverhalte, die i der gestellten Frage einander entgegengehalten sind, sich nicht gege seitig ausschließen; man kann nicht sagen, *entweder* ist die beobachte Abweichung ein Werk des Zufalls *oder* sie rührt von einem Verhalt der Materie her, das von dem vorausgesetzten abweichend ist; vie mehr wird sie fast ausnahmslos das Resultat des Zusammenwirke beider Veranlassungen sein. Die Antwort wird daher auch nic dahin lauten können, daß das eine von beiden eher anzunehmen s als das andere.

Jede Abweichung, mag sie noch so groß und ihre Wahrscheinlichkeit im Vergleich zur Wahrscheinlichkeit der Abweichung Null noch so klein sein, liegt im Bereich der Möglichkeit und hat daher an sich nichts Befremdendes. Aus *einer* Abweichung allein Schlüsse zu ziehen, wenn nicht schon a priori zu Vermutungen eine Veranlassung vorlag, hat logisch keine Berechtigung. Für eine wohlbegründete Rechnung fehlt es an den erforderlichen Daten.

Wenn trotzdem Rechnungen in solchen Fragen ausgeführt worden sind, so konnte ihren Resultaten eine entscheidende Bedeutung nicht beigemessen werden; es konnte sich vielmehr dabei nur darum handeln, der schätzungsweisen Vermutung einigen Halt zu gewähren.

Zur Erläuterung nehmen wir die von Poisson[1]) untersuchten Münzversuche Buffons auf.

Mit einer Münze sind 4040 Würfe gemacht worden; 2048-mal — statt 2020-mal, wie es dem wahrscheinlichsten Falle entsprechen würde — ist Wappen erschienen. Was kann daraus für die Beschaffenheit der Münze vermutet werden?

Zunächst könnte man sich die Frage vorlegen, ob denn die beobachtete Abweichung 28 im Zusammenhalt mit der Versuchszahl exorbitant zu nennen sei; und um hierfür einen Anhalt zu haben, könnte man die Wahrscheinlichkeit rechnen, mit welcher eine Abweichung von 28 oder darüber zu erwarten ist.

Aus dem Ansatze

$$\gamma = \sqrt{2 \cdot 4040 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 28$$

berechnet sich

$$\gamma = 0{,}623;$$

mithin ist

$$P = \Phi(0{,}623) = 0{,}6217$$

die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung bis zum Betrage 28,

$$1 - P = 0{,}3783$$

die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung von 28 aufwärts. Man kann also eine Abweichung von 28 und darüber nicht als etwas außergewöhnliches, höchst unwahrscheinliches bezeichnen. Unter 1000 Versuchsreihen von je 4040 Würfen, ausgeführt mit *exakten* Münzen, hätte man gegen 378-mal eine Abweichung zu gewärtigen, die über 28 hinausgeht.

Man könnte sich ferner auf den Standpunkt stellen, daß man über die „Münze“ gar nichts wisse, und nun auf Grund der gemachten Beobachtung allein die Wahrscheinlichkeit suchen, welche der Hypothese zukommt, die Wappenseite sei gegenüber der Schriftseite begünstigt. Dies führt zu folgender Rechnung.

1) Recherches etc., deutsche Bearbeitung p. 193 ff. Vgl. auch J. Bertrand, Calc. d. prob., p. 157 sq.

Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit der Wappenseite m $\frac{1}{2} + z$, die der Schriftseite demgemäß mit $\frac{1}{2} - z$, so handelt es si um die Wahrscheinlichkeit, daß $1 > \frac{1}{2} + z > \frac{1}{2} - z$, also z zwisch den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}$ enthalten sei; für diese ergibt sich auf Gru der vorliegenden Beobachtung der Ausdruck:

$$\frac{\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} + z\right)^{2048} \left(\frac{1}{2} - z\right)^{1992} dz}{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} + z\right)^{2048} \left(\frac{1}{2} - z\right)^{1992} dz}.$$

Die strenge Auswertung desselben ist wegen der großen Ex nenten undurchführbar. Wir suchen daher einen Näherungswert die Funktion Z unter den beiden Integralzeichen, indem wir ih Logarithmus wie folgt entwickeln:

$$l \cdot Z = l \cdot \frac{1}{2^{4040}} + 2048\, l \cdot (1 + 2z) + 1992\, l \cdot (1 - 2z)$$

$$= l \cdot \frac{1}{2^{4040}} + 112z - 8080z^2 - \cdots.$$

Die Natur von Z bringt es mit sich, daß es zu beiden Seiten sei Maximums, das sich für $z = 0{,}00693$ ergibt, sehr bald außerordentl rasch abnimmt, so daß nur ein enges Intervall um diesen besonde Wert von z auf den numerischen Betrag von P, soweit er von In esse ist, Einfluß hat; dies ist auch der Grund, warum man die E wicklung mit der zweiten Potenz abbrechen kann. Durch den Üb gang zur Zahl selbst erhält man

$$Z = \frac{1}{2^{4040}} e^{112z - 8080z^2}$$

und daraus

$$P = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} e^{112z - 8080z^2} dz}{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{112z - 8080z^2} dz}.$$

Während nun der Exponent an der Stelle $z = 0{,}00693$, wo Funktion ihren größten Wert einnimmt, $1{,}164 \cdots$ beträgt, sinkt

bis zur oberen Grenze auf den Betrag — 1964 herab; infolge dessen hat es keinen Einfluß auf die maßgebenden Ziffern von P, wenn man das Integral bis ∞ erstreckt; ähnliches gilt bezüglich der unteren Grenze des Nennerintegrals, so daß man schreiben kann:

$$P = \frac{\int\limits_0^\infty e^{112z - 8080z^2}\,dz}{\int\limits_{-\infty}^\infty e^{112z - 8080z^2}\,dz}$$

$$= \frac{\int\limits_0^\infty e^{112z - 8080z^2}\,dz}{\int\limits_0^\infty e^{112z - 8080z^2}\,dz + \int\limits_0^\infty e^{-112z - 8080z^2}\,dz}.$$

Allgemein ist

$$\int\limits_0^\infty e^{2bz - a^2z^2}\,dz = \int\limits_0^\infty e^{\frac{b^2}{a^2} - \left(az - \frac{b}{a}\right)^2}\,dz = e^{\frac{b^2}{a^2}} \int\limits_{-\frac{b}{a}}^\infty e^{-t^2}\,dt$$

$$= e^{\frac{b^2}{a^2}} \left\{ \int\limits_0^\infty e^{-t^2}\,dt + \int\limits_0^{\frac{b}{a}} e^{-t^2}\,dt \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{b^2}{a^2}} \left\{ 1 + \Phi\left(\frac{b}{a}\right) \right\},$$

und analog ergibt sich

$$\int\limits_0^\infty e^{-2bz - a^2z^2}\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{b^2}{a^2}} \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{b}{a}\right) \right\}.$$

Durch Anwendung dieser Formeln auf den obigen Ausdruck erhält man mittels der Tafel I

$$P = \frac{1 + \Phi(0{,}6229)}{2} = \frac{1{,}62162}{2} = 0{,}8108.$$

Diesem Resultate gegenüber hat der Einwand, daß es unter der Annahme entstanden ist, als seien alle Werte zwischen 0 und 1 für die Wahrscheinlichkeit einer Münzseite gleich zulässig, keine Bedeutung; in Wirklichkeit haben nämlich auf die abgeleiteten Ziffern nur die Werte eines engen Intervalls um $z = 0{,}00693$ Einfluß.

Wie kann das Resultat im Sinne des Gesetzes der großen Zahlen gedeutet werden?

Wenn man mit einer ungeheuren Zahl von Münzen verschiedensten Gepräges Versuche machte, mit jeder 4040; wenn man diejenigen aus-

schiede, bei welchen sich 2048-mal Wappen ergab, so wäre man rechtigt zu erwarten, daß auf je 1000 dieser Münzen nahe 810 sol Exemplare kämen, bei denen die Wappenseite begünstigt ist; bei übrigen 190 wäre jenes Resultat eingetroffen, obwohl sie exakt zu Gunsten der *Schriftseite* unregelmäßig sind.

Eine Verifikation dieses Schlusses aber ist, auch wenn es mög wäre, die hinreichende Menge von Versuchreihen anzustellen, untun denn es gibt kein Mittel, die Wahrscheinlichkeit der beiden S einer Münze durch ein physikalisches Verfahren zu bestimmen.

Man kann das Ergebnis der Rechnungen wohl nicht anders dahin zusammenfassen, daß die beobachtete Abweichung auch einer exakten Münze nichts Ungewöhnliches bedeuten würde, daß aber auch der Vermutung einer Unregelmäßigkeit der Münze Gunsten der Wappenseite einen erheblichen Wahrscheinlichkeits verleiht.

§ 2. Wahrscheinlichkeit künftiger Ereignisse auf Grund von Beobachtungen.

99. Aposteriorische Wahrscheinlichkeit eines zu wärtigenden Ereignisses. Eine aus Versuchen oder Beob tungen für ein zufälliges Ereignis abgeleitete Wahrscheinlichkeit als *empirische* oder als *Erfahrungswahrscheinlichkeit* bezeichnet. Theorie bietet zwei Methoden ihrer Bestimmung dar.

Die eine Methode besteht darin, daß man dem Ereignis dieje Wahrscheinlichkeit zuschreibt, welche sich aus der wahrscheinlich Hypothese über das beobachtete Ereignis dafür ergibt. Man n diese Wahrscheinlichkeit die *nach der wahrscheinlichsten Ursache* stimmte. Ihre Berechnung erfordert die Anwendung der Bayess Regel.

Die andere Methode besteht darin, daß man alle Hypothesen, mit dem beobachteten Ereignis vereinbar sind, bei der Bestimm der Wahrscheinlichkeit des künftigen Ereignisses mitwirken läßt, entsprechend dem Grade ihrer eigenen Wahrscheinlichkeit. In die Falle spricht man von einer *Wahrscheinlichkeit a posteriori* im sonderen.

Vom theoretischen Standpunkte wäre die zweite Methode vo ziehen, weil sie auf alle möglichen Ursachen Rücksicht nimmt, wäh die erste sich auf eine bestimmte unter ihnen allein stützt. Bei fangreichen Erfahrungsreihen, wie solche in den praktischen An dungen zumeist vorliegen, liegen die Resultate beider Methoden nahe aneinander, daß es wohl gleichgiltig bleibt, welches von be man wählt. Zumeist wird hier unter der empirischen Wahrsch lichkeit die nach der wahrscheinlichsten Hypothese gerechnete standen.

Das erste Verfahren bedarf keiner Erläuterung mehr.

Die Bestimmung der aposteriorischen Wahrscheinlichkeit besteht einer Anwendung der Sätze von der zusammengesetzten und der lständigen Wahrscheinlichkeit.

. Sei B das beobachtete Ereignis, das sich aus den einfachen, einler entgegengesetzten Ereignissen E, F irgendwie zusammensetzt; sselbe lasse die Ursachen U_i $(i = 1, 2, \cdots n)$ zu, deren apriorische ahrscheinlichkeiten ω_i $(i = 1, 2, \cdots n)$ sei mögen; p_i sei die Wahrteinlichkeit, mit welcher B aus der Ursache U_i zu erwarten ist, id P_i die aposteriorische Wahrscheinlichkeit dieser Ursache; endlich zeichne $\mathfrak{p}_i$ die Wahrscheinlichkeit, welche die Ursache U_i dem inftigen (ebenfalls aus E und F zusammengesetzten) Ereignisse K rleiht.

Dann ist

$$\Pi = P_1 \mathfrak{p}_1 + P_2 \mathfrak{p}_2 + \cdots + P_n \mathfrak{p}_n \tag{12}$$

vollständige, aus der Erfahrung gefolgerte, also die Wahrscheinikeit a posteriori von K; denn P_1 ist die aus der Beobachtung B eleitete Wahrscheinlichkeit, daß die Ursache U_1 vorlag, und wenn vorlag und wenn bei dem künftigen Ereignis die nämliche Ursache iv ist wie bei dem beobachteten, so ist K mit der Wahrscheinlich- $\mathfrak{p}_1$ zu erwarten; folglich ist $P_1 \mathfrak{p}_1$ die Wahrscheinlichkeit, daß K ch die Ursache U_1 zustande kommt u. s. w.

Nach dem Theorem von Bayes (Nr. 91) ist

$$P_i = \frac{\omega_i p_i}{\sum\limits_1^n \omega_i p_i},$$

glich ist, durch die einfachsten Rechenelemente ausgedrückt:

$$\Pi = \frac{\sum\limits_1^n \omega_i p_i \mathfrak{p}_i}{\sum\limits_1^n \omega_i p_i}. \tag{13}$$

Waren die Ursachen von vornherein gleichmöglich, also $\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n$, so vereinfacht sich die Formel und lautet:

$$\Pi = \frac{\sum\limits_1^n p_i \mathfrak{p}_i}{\sum\limits_1^n p_i}. \tag{14}$$

Ist die Wahrscheinlichkeit x von E aller Werte des stetigen Beches $(0, 1)$ fähig, so stellen sich die früher mit ω, p, $\mathfrak{p}$ bezeich-

neten Wahrscheinlichkeiten insgesamt als Funktionen von x dar und sollen nunmehr mit w, y, z bezeichnet werden, so daß w die apriorische Wahrscheinlichkeit von x, y die auf x basierende Wahrscheinlichkeit von B und z die aus x gefolgerte Wahrscheinlichkeit von K bedeutet. Die aposteriorische Wahrscheinlichkeit von K stellt sich dann in der Gestalt

$$\Pi = \frac{\int_0^1 wyz\,dx}{\int_0^1 wy\,dx}, \tag{15}$$

und wenn w konstant ist, in der Form

$$\Pi = \frac{\int_0^1 yz\,dx}{\int_0^1 y\,dx} \tag{16}$$

dar.

Die Bemerkungen, welche in Nr. 97 über die Wahrscheinlichkeit der Ursachen gemacht worden sind, übertragen sich notwendig auch auf Π.

Lediglich, um den prinzipiellen Unterschied der beiden Bestimmungsweisen der empirischen Wahrscheinlichkeit hervorzuheben, diene das folgende einfache Beispiel (vgl. Nr. 97).

Aus einer Urne, die nur weiße und schwarze Kugeln, im ganzen vier, enthält, sind vier Ziehungen (mit Zurücklegung der Kugel) gemacht worden; dreimal erschien eine weiße, einmal eine schwarze Kugel. Welche empirische Wahrscheinlichkeit folgt aus diesen Tatsachen für das Ziehen einer weißen Kugel aus der Urne?

Dem beobachteten Ereignis B (3 weiß, 1 schwarz) können drei Ursachen zugrunde gelegt werden, nämlich:

U_1: 3 weiße, 1 schwarze Kugel,
U_2: 2 „ 2 „ Kugeln,
U_3: 1 „ 3 „ „ ;

die Wahrscheinlichkeiten von B nach diesen drei Ursachen sind:

$$p_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{1}{4} = \frac{27}{256}; \quad p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{16}{256}; \quad p_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \frac{3}{4} = \frac{3}{256};$$

die Wahrscheinlichkeiten der Ursachen selbst:

$$P_1 = \frac{27}{46}, \qquad P_2 = \frac{16}{46}, \qquad P_3 = \frac{3}{46}.$$

Das künftige Ereignis K ist das Ziehen einer weißen Kugel. Seine Wahrscheinlichkeit nach der wahrscheinlichsten Ursache (U_1) ist

$$\frac{3}{4} = 0{,}75,$$

seine Wahrscheinlichkeit a posteriori dagegen

$$\Pi = \frac{27}{46} \cdot \frac{3}{4} + \frac{16}{46} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{46} \cdot \frac{1}{4} = \frac{29}{46} = 0{,}630 \cdots.$$

100. Hauptaufgabe über die aposteriorische Wahrscheinlichkeit. Das beobachtete Ereignis B bestehe in dem m-maligen Eintreffen und dem n-maligen Ausbleiben eines Ereignisses E von unbekannter, a priori aller Werte gleichfähiger Wahrscheinlichkeit x. Das künftige Ereignis K bedeute das m'-malige Eintreffen und das n'-malige Ausbleiben von E in $m' + n'$ weiteren Beobachtungen.

Die Bestimmung der aposteriorischen Wahrscheinlichkeit Π von K hat nach der Formel (16) zu erfolgen, und zwar ist darin:

$$y = x^m(1-x)^n, \quad z = \binom{m'+n'}{m'} x^{m'}(1-x)^{n'}$$

zu setzen; denn das beobachtete Ereignis zeigt eine bestimmte Reihenfolge des Eintreffens und Ausbleibens von E, während bezüglich des künftigen diese Reihenfolge unbestimmt und gleichgiltig ist. Hiernach hat man

$$\Pi = \binom{m'+n'}{m'} \frac{\int_0^1 x^{m+m'}(1-x)^{n+n'}\,dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx}. \tag{17}$$

Werden die Integrale nach der Formel (9), Nr. 96, ausgeführt, so ergibt sich für Π der nur aus Fakultäten zusammengesetzte Ausdruck:

$$\Pi = \frac{(m'+n')!\,(m+m')!\,(n+n')!\,(m+n+1)!}{m'!\,n'!\,(m+m'+n+n'+1)!\,m!\,n!}, \tag{17*}$$

der bei großen Werten von m, n, m', n' mittels der Stirlingschen Formel auszuwerten wäre.

Durch die Annahme $m' = 1$, $n' = 0$ geht Π in die *aposteriorische Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E* selbst über; diese beträgt also:

$$\Pi = \frac{\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^n\,dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx} = \frac{m+1}{m+n+2}. \tag{18}$$

Sie unterscheidet sich um so weniger von der Wahrscheinlichkeit nach

der wahrscheinlichsten Hypothese, deren Wert $\frac{m}{m+n}$ ist, je umfan reicher die Beobachtung B ist.

Unter der Voraussetzung, daß $m+n$ eine sehr große Zahl i hat das Resultat (18) auch dann eine wohlbegründete Bedeutun wenn die Voraussetzung der gleichen apriorischen Wahrscheinlichk aller Werte von x nicht zutrifft; wegen der außerordentlich rasch Abnahme der Funktionen unter den Integralzeichen, sobald man si von den einander naheliegenden Stellen $\frac{m+1}{m+n+1}$ und $\frac{m}{m+n}$ ihr Maxima entfernt, wirken nämlich nur enge Intervalle um diese We auf den Betrag von Π ein, und innerhalb dieser Intervalle wird zumeist untunlich sein, eine Abstufung im Möglichkeitsgrade der We von x vorzunehmen.

Setzt man in der Formel (17) $m=m'$, $n=n'$, $[m+n=s]$, kommt man zu der Wahrscheinlichkeit eines künftigen Erfolgs, mit dem beobachteten, was die Wiederholungszahlen des Eintreff und Ausbleibens anlangt, vollständig übereinstimmt; ist s sehr gr so ergibt sich für diese Wahrscheinlichkeit der Näherungswert

$$\Pi=\sqrt{\frac{s}{4\pi mn}}; \qquad (\text{:}$$

bei demselben s ist dieses Π um so größer, je mehr die Zahlen m von einander verschieden sind; sein kleinster Wert ist $\frac{1}{\sqrt{\pi s}}$. Hä man beispielsweise aus einer Urne unkekannten Inhalts in 10 C Ziehungen 2000-mal eine weiße und 8000-mal eine schwarze Ku hervorgeholt, so wäre gemäß der Formel (19) mit der Wahrsche lichkeit $\frac{1}{80\sqrt{\pi}}=0{,}0075024$ zu erwarten, daß 10 000 weitere Ziehung dasselbe Resultat hervorbringen.

Zu der Formel (19) ist folgendes zu bemerken. Wären $\frac{m}{s}$, die *bekannten* Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen und Ausbleib von E, so bestünde nach Nr. 68 die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi s\frac{m}{s}\frac{n}{s}}}=\sqrt{\frac{s}{2\pi mn}}$$

dafür, daß in $s=m+n$ Versuchen E m-mal eintreffen und n-m ausbleiben werde. Diese Wahrscheinlichkeit ist $\sqrt{2}$-mal größer die in Formel (19) unter andern Voraussetzungen berechnete. D Grund dieser Abweichung liegt darin, daß dort $\frac{m}{s}$, $\frac{n}{s}$ nicht *sicheren*, sondern nur die wahrscheinlichsten Werte der Wahrsche lichkeiten für E und Nicht-E sind.

101. Beispiel I. *Eine Urne enthält 8 Kugeln, weiße und schwarze; 4 davon sind nach und nach herausgenommen worden und es waren 3 weiß, 1 schwarz. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 3 weiteren Kugeln, die man successive zieht, 1 weiß und 2 schwarz sein werden?*

Fünf Hypothesen sind mit der bekannten Anzahl der Kugeln und dem beobachteten Ereignis vereinbar, nämlich:

$U_1 \cdots 3$	weiße,	5	schwarze	Kugeln
$U_2 \cdots 4$	„	4	„	„
$U_3 \cdots 5$	„	3	„	„
$U_4 \cdots 6$	„	2	„	„
$U_5 \cdots 7$	„	1	„	Kugel.

Die aus ihnen entspringenden Wahrscheinlichkeiten des *beobachteten* Erfolges sind:

$$p_1 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{5}{280}, \quad p_2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{16}{280}, \quad p_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{30}{280},$$

$$p_4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{40}{280}, \quad p_5 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{35}{280};$$

jene des *zukünftigen* Ereignisses:

$$\mathfrak{p}_1 = 0, \quad \mathfrak{p}_2 = 3 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{3}{4}, \quad \mathfrak{p}_3 = 3 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{2}, \quad \mathfrak{p}_4 = 0, \quad \mathfrak{p}_5 = 0.$$

Folglich reduziert sich die aposteriorische Wahrscheinlichkeit des künftigen Ereignisses auf

$$\Pi = P_2 \mathfrak{p}_2 + P_3 \mathfrak{p}_3;$$

wenn man in Ermangelung weiteren Wissens die Ursachen als a priori gleichwahrscheinlich ansieht, so ist

$$P_2 = \frac{16}{5 + 16 + 30 + 40 + 35} = \frac{8}{63}, \quad P_3 = \frac{15}{63},$$

demnach

$$\Pi = \frac{3}{14}.$$

Nun nehme man an, dieselben Ziehungen würden aus einer Urne mit einer unbegrenzten Menge weißer und schwarzer Kugeln unbekannten Mischungsverhältnisses gemacht worden sein, und es handelte sich um die aposteriorische Wahrscheinlichkeit des nämlichen künftigen Ereignisses. Die unbekannte Wahrscheinlichkeit x für das Ziehen einer weißen Kugel kann dann jeden Wert zwischen 0 und 1 besitzen und bleibt während der Ziehungen konstant. Man hat nun Π nach der Formel (17) zu rechnen und findet

$$\Pi = \binom{3}{1} \frac{\int\limits_0^1 x^4(1-x)^3 dx}{\int\limits_0^1 x^3(1-x)\,dx} = 3 \cdot \frac{\frac{4!\,3!}{8!}}{\frac{3!\,1!}{5!}} = \frac{3}{14}.$$

Das Resultat ist dasselbe wie vorhin, und diese Übereinstimmung gilt für beliebige Zahlen[1]).

IV. Abschnitt. Bewertung von Vor- und Nachteilen, welche an zufällige Ereignisse geknüpft sind.

§ 1. Die mathematische Erwartung.

102. Definition der mathematischen Erwartung. Eine Person sei an einer Reihe zufälliger, einander ausschließender Ereignisse $F, F', \cdots F^{(n)}$ in der Weise interessiert, daß das Eintreffen von $F^{(i)}$, das mit der Wahrscheinlichkeit $p^{(i)}$ zu erwarten ist, für sie eine Einnahme (oder Ausgabe) $a^{(i)}$ zur Folge hat; im Falle der Einnahme soll $a^{(i)}$ positiv, im andern Falle negativ sein. Dann hat die Person eine ungewisse Summe x zu gewärtigen, die $n+1$ verschiedener Werte, eines jeden mit bestimmter Wahrscheinlichkeit, fähig ist, und man kann im Sinne von Nr. 50 von einem Mittelwert dieser Summe sprechen, der sich als Summe der Produkte ihrer möglichen Werte mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten darstellt; wird er mit E bezeichnet, so ist

$$E = pa + p'a' + p''a'' + \cdots + p^{(n)}a^{(n)}, \tag{1}$$

wobei gleichzeitig

$$p + p' + p'' + \cdots + p^{(n)} = 1 \tag{2}$$

besteht.

Ist nur auf das Ereignis F eine Summe, ein Preis a ausgesetzt, während die übrigen Ereignisse keine Vermögensänderung zur Folge haben, so kann x nur die beiden Werte a und 0 annehmen, ersteren mit der Wahrscheinlichkeit p, letzteren mit der Wahrscheinlichkeit $q = p' + p'' + \cdots + p^{(n)}$, und es ist

$$E = pa. \tag{3}$$

Den Mittelwert E bezeichnet man im vorliegenden Falle als die *mathematische Erwartung* oder *mathematische Hoffnung* der Person gegenüber den ungewissen Summen. Hiermach ist *die auf eine einzelne Summe bezügliche mathematische Erwartung das Produkt aus der*

---

[1]) J. Todhunter, History of the mathematical theory of probability (1865), p. 454 ff.

Summe und der Wahrscheinlichkeit ihrer Realisierung, und die auf eine Reihe einander ausschließender Eventualsummen bezügliche mathematische Erwartung gleich der Summe der Erwartungen, welche die einzelnen Beträge betreffen.

Von mathematischer Hoffnung wird häufig auch gesprochen, wenn in dem Produkt pa der Faktor a nicht eine Geldsumme, sondern irgend eine andere vom Zufall abhängige Größe bedeutet.

103. Beziehung der mathematischen Erwartung zum wahrscheinlichsten Erfolg. Um zur Bedeutung dessen zu gelangen, was soeben als mathematische Erwartung formal definiert worden ist, stellen wir folgende Betrachtung an.

Auf das Eintreffen des Ereignisses F, dem die Wahrscheinlichkeit p zukommt, während das Nichteintreffen mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ zu erwarten ist, sei der Preis a ausgesetzt.

Bei einer einmaligen Realisierung der Bedingungen hat die Person, welche sich zur Zahlung des Preises verpflichtet — der Unternehmer —, entweder a oder 0 auszufolgen.

Werden s Realisierungen vereinbart und ist s eine Zahl, welche sich im Verhältnis $p : q$ in zwei Teile zerlegen läßt, so ist die wahrscheinlichste von dem Unternehmer zu leistende Zahlung spa, weil die Kombination: sp-mal F und sq-mal Nicht-F unter allen die wahrscheinlichste ist; die durchschnittlich auf eine Realisierung entfallende Zahlung ist dann pa.

Sind sp, sq nicht ganze Zahlen, so gibt es (vgl. Nr. 67) zwischen $sp - q$ und $sp + p$ eine ganze Zahl, die in der Form $sp + \delta$ (mit $|\delta| < 1$) geschrieben werden kann und so beschaffen ist, daß $(sp + \delta)$-mal F und $(sq - \delta)$-mal Nicht-F die wahrscheinlichste Kombination bezeichnet. Die wahrscheinlichste Leistung des Unternehmers beträgt jetzt $(sp + \delta)a$, und davon entfällt auf eine Realisierung durchschnittlich der Betrag $pa + \frac{\delta a}{s}$, der sich mit wachsendem s dem pa als Grenze nähert.

Man kann demnach den Satz aussprechen: Die wahrscheinlichste, durchschnittlich auf eine von s Realisierungen entfallende Zahlung des Unternehmers ist entweder der mathematischen, auf eine Realisierung gerichteten Erwartung genau gleich oder weicht von ihr um eine Größe der Ordnung $\frac{1}{s}$ ab.

104. Die aus einer wiederholten Realisierung resultierende mathematische Erwartung. Die Bedingungen seien dieselben wie in der vorigen Nummer. Aus s Wiederholungen können, entsprechend den möglichen Kombinationen des Eintreffens und Ausbleibens von F, $s + 1$ verschiedene Erfolge erzielt werden:

$$sa, \ (s-1)a, \ \cdots \ (s-r)a, \ \cdots \ a, \ 0;$$

ihre Wahrscheinlichkeiten sind durch die Glieder der Entwicklung von $(p + q)^s$ bestimmt; insbesondere kommt dem Erfolge $(s - r)$ die Wahrscheinlichkeit $\binom{s}{r} p^{s-r} q^r$ zu. Mithin ist die aus der wiederholten Realisierung hervorgehende mathematische Erwartung

$$E = a \sum_0^s (s - r) \binom{s}{r} p^{s-r} q^r.$$

Um den Wert der Summe zu ermitteln, gehe man von der allgemeineren Summe

$$\sum_0^s \binom{s}{r} (tp)^{s-r} q^r = (tp + q)^s$$

aus, in welcher t eine Hilfsvariable bedeutet; durch Differentiation nach dieser entsteht

$$\sum_0^s (s - r) p \binom{s}{r} (tp)^{s-r-1} q^r = sp(tp + q)^{s-1},$$

und hieraus ergibt sich, wenn $t = 1$ gesetzt wird:

$$\sum_0^s (s - r) \binom{s}{r} p^{s-r} q^r = sp;$$

demnach ist

$$E = spa$$

in der Tat die s-fache auf die einzelne Entscheidung gerichtete mathematische Erwartung.

Da sich die auf mehrere von einander unabhängige und einander ausschließende Ereignisse bezüglichen Erwartungen bei der Bildung der Gesamterwartung summieren, so kann auch für den allgemeinen Fall: Auf die Ereignisse $F, F', \cdots F^{(n)}$, deren Wahrscheinlichkeiten $p, p', \cdots p^{(n)}$ sich zur Einheit ergänzen, sind die Preise $a, a', \cdots a^{(n)}$ ausgesetzt — die auf die s-malige Verwirklichung der allgemeinen Bedingungen gerichtete mathematische Hoffnung angegeben werden; sie ist

$$E = s(pa + p'a' + \cdots + p^{(n)}a^{(n)}).$$

105. Beziehungen zwischen Preis und Einsatz; Gewinnteilungsregel. Eine Person — der Unternehmer — setze auf das Eintreffen eines Ereignisses F von der Wahrscheinlichkeit p einen Preis a aus und gehe diese Verpflichtung s-mal, derselben Person oder verschiedenen Personen — den Spielern — gegenüber, ein. Dann ist spa die wahrscheinlichste Zahlung, welche sie zu leisten haben wird. Soll ihr daraus weder ein Nutzen noch ein Schaden erwachsen,

so wird die gleiche Summe seitens der Spieler an sie abzuführen sein, d. h. der auf eine Entscheidung zu leistende Einsatz ist mit pa zu bemessen.

Die auf den ausgesetzten Preis bezügliche mathematische Erwartung des Spielers bezeichnet also seinen rechtmäßigen Einsatz.

Hat eine Person die Anwartschaft, den Preis a mit der Wahrscheinlichkeit p zu gewinnen, so repräsentiert diese Anwartschaft vor der Entscheidung einen Besitz, der mit demselben Werte zu bemessen wäre, welchen die Person als Einsatz zu leisten hätte, also mit der mathematischen Erwartung pa; dieser Betrag würde auch den rechtmäßigen Kaufpreis darstellen, um welchen sie die Anwartschaft an eine andere Person abgeben könnte. Nicht aber darf die mathematische Erwartung als derjenige Betrag erklärt werden, den die betreffende Person vor der Entscheidung als *sicheren Besitz* anzusehen hat[1]).

Der Person, welche auf den Preis a den Einsatz pa leistet, fällt, wenn sie den Preis erzielt, ein Gewinn $g = a - pa$ zu, weil sie den gezahlten Einsatz nicht zurückerhält; zwischen Gewinn und Preis besteht somit die Beziehung

$$g = qa;$$

zwischen Gewinn und Einsatz $E = pa$ ergibt sich mithin die Relation

$$\frac{E}{g} = \frac{p}{q}.$$

Dieselbe läßt auch folgende Deutung zu: Zu dem Preise a steuert der Spieler den Einsatz E, der Unternehmer den Gewinn g bei; der Spieler erlangt den Gewinn mit der Wahrscheinlichkeit p, der Unternehmer den Einsatz mit der Wahrscheinlichkeit q. *In einem geordneten Spiele oder einer Wette verhalten sich demnach die Einzahlungen der beiden Partner wie ihre Wahrscheinlichkeiten, das Spiel oder die Wette zu gewinnen.* Nachdem man die Proportion in die Form $pg = qE$ gebracht, kann man auch sagen, daß bei einem geordneten Spiele die mathematischen Erwartungen der Partner einander gleich sind.

Steht in einem Spiele, das eine Person mit der Wahrscheinlichkeit p, ihr Partner mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ zu gewinnen erwartet, die Summe a, und verzichten die Spieler darauf, den Zufall entscheiden zu lassen, so haben sie sich rechtmäßig in die Summe a derart zu teilen, wie sie zu ihr hätten beitragen müssen, d. h. im Verhältnisse der Wahrscheinlichkeiten p, q. Hierin ist einer der ältesten Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie enthalten, der dem Pascalschen Teilungsproblem (Nr. 38) zugrunde liegt.

---

1) Vgl. hiermit Poisson, Recherches sur la probabil., deutsch von H. Schnuse, p. 42.

106. Beispiel LI. Die Bestimmung der mathematischen Erwartung für einen Glücksfall, in welchem mehrere verschiedene Erfolge eintreten können, erfordert nach Nr. 102 die Feststellung dieser Erfolge und die Berechnung ihrer Wahrscheinlichkeiten; gerade in der letzten Forderung liegt mitunter eine erhebliche Schwierigkeit der Aufgabe, die manchmal dadurch umgangen werden kann, daß man den Glücksfall in einen andern, ihm bezüglich der mathematischen Hoffnung äquivalenten umwandelt, der eine einfachere Berechnung zuläßt. Einige Beispiele dieser Art sollen nun vorgeführt werden. Das erste bestehe in folgendem:

Eine Urne enthält n Kugeln, die mit den Nummern $1, 2, \cdots n$ bezeichnet sind. Eine Person, welche die Kugeln nach und nach zieht, erhält jedesmal 1 Frc., wenn die Nummer der Kugel mit der Ordnungszahl des Zuges übereinstimmt. Wie groß ist ihre Hoffnung?

Statt die Wahrscheinlichkeiten zu rechnen, daß dies $1, 2, \cdots n$-mal geschehen werde, mache man sich klar, daß *vor* den Ziehungen jede Kugel die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{n}$ hat, ihrer Nummer entsprechend gezogen zu werden.

In der Tat, die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel 1 an erster Stelle erscheint, beträgt $\frac{1}{n}$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel 2 im zweiten Zuge kommt, wenn die Kugel 1 im ersten erschienen ist, beträgt $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$; und die Wahrscheinlichkeit, daß sie kommt, wenn im ersten Zuge eine andere Kugel als 1 erschienen ist, beträgt $\frac{n-2}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$; demnach ist die Wahrscheinlichkeit, daß Kugel 2 im zweiten Zuge überhaupt getroffen wird, $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} + \frac{n-2}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel 3 im dritten Zuge erscheint, wenn 1 im ersten und 2 im zweiten kam, ist $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2}$; die Wahrscheinlichkeit, daß sie so erscheint, wenn nur eine der vorbenannten Kugeln an ihrem Platze erschienen ist, beträgt

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} + \frac{n-3}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2};$$

die Wahrscheinlichkeit endlich, daß Kugel 3 an dritter Stelle kommt, ohne daß 1 und 2 an ihrem Platze erschienen sind, beträgt

$$\frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2};$$

demnach ist die Wahrscheinlichkeit, daß Kugel 3 an dritter Stelle überhaupt gezogen wird,

$$\frac{1 + n - 2 + n - 3 + (n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{n},$$

ithin ist der obige Fall in Bezug auf mathematische Erwartung ent dem folgenden: Es liegen n Urnen, mit den Nummern ·· n bezeichnet, vor; in jeder derselben befinden sich n Kugeln, enfalls die Nummern 1, 2, ··· n tragen; man zieht aus jeder ine Kugel und erhält, so oft die Nummer der Kugel mit der er der Urne übereinstimmt, 1 Frc. Da nun die Übereinung der Nummern bei jedem Zuge mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ arten ist, so ist die mathematische Erwartung $n \cdot \frac{1}{n} \cdot 1$ Frc. $= 1$ Frc. aß jedoch die beiden Glücksfälle im übrigen nicht identisch geht schon aus folgender Bemerkung hervor. Den größtmög- Erfolg von n Frcs. zu erzielen, hat bei der ersten Modalität ahrscheinlichkeit $\frac{1}{n!}$, bei der zweiten die kleinere Wahrschein- t $\frac{1}{n^n}$.

)7. **Beispiel LII.** *Aus einer Urne, welche weiße und schwarze in solchem Mengenverhältnis enthält, daß für das Ziehen einer die Wahrscheinlichkeit p, für das Ziehen einer schwarzen die cheinlichkeit $q = 1 - p$ besteht, werden n Ziehungen gemacht, lie gezogene Kugel jedesmal zurückgelegt wird. So oft eine weiße erscheint, der eine schwarze vorausging und nachfolgt, erhält der 1 Frc. Wie groß ist die Hoffnung?*

ie Lösung dieser komplizierten Frage wird einfach, sobald man e Überzeugung verschafft hat, daß *vor* Beginn der Ziehungen schriebene Glücksfall an jeder Stelle, die erste und letzte ausnen, zu erwarten ist mit der Wahrscheinlichkeit pq^2. Die le Betrachtung wird es erweisen.

rei Ziehungen führen einen Gewinn herbei, nur wenn ihr Redas folgende ist:

● ○ ●

e Wahrscheinlichkeit hierfür ist pq^2.

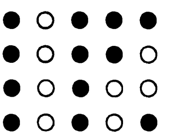
ei vier Ziehungen ergibt sich an der zweiten Stelle ein Gewinn enden Fällen:

● ○ ● ○

● ○ ● ●

inzelwahrscheinlichkeiten sind p^2q^2 und pq^3, die totale Wahrichkeit $p^2q^2 + p^2q^3 = pq^2(p+q) = pq^2$. Für die dritte Stelle sich das nämliche Resultat.

'erden fünf Ziehungen vereinbart, so tritt an zweiter Stelle ein ι ein in nachstehenden Fällen:



die Einzelwahrscheinlichkeiten dieser Kombinationen pq^3, p^2q^3, p^3q^2 vereinigen sich zu der Totalwahrscheinlichkeit $pq^2(q^2+2pq+p^2)=$ Eine ähnliche Zusammenstellung und das gleiche Resultat ergibt für die vierte Stelle. An der dritten Stelle tritt ein Gewinn ei folgenden Konstellationen:

● ● ○ ● ●
○ ● ○ ● ●
● ● ○ ● ○
○ ● ○ ● ○

die vollständige Wahrscheinlichkeit hierfür ist demnach

$$pq^4 + p^2q^3 + p^2q^3 + p^3q^2 = pq^2(q^2 + 2pq + p^2) = pq^2,$$

u. s. w.

In Bezug auf die mathematische Erwartung ist das Spiel äquivalent $n - 2$ Ziehungen aus einer Urne, welche dem Ersch einer weißen Kugel die Wahrscheinlichkeit pq^2 verleiht, wenn au weiße Kugel ein Preis von 1 Frc. ausgesetzt ist. Die hierauf b liche Hoffnung ist aber $(n-2)pq^2$.[1])

Über diesen Punkt geht aber die Übereinstimmung nicht hi während bei der zweiten Modalität $n - 2$ Frcs. als höchster Pre zielbar sind, beträgt bei dem vorgelegten Spiele der höchste $\frac{n-1}{2}$ oder $\frac{n}{2} - 1$, jenachdem n ungerad oder gerad ist.

108. Beispiel LIII. *Peter hat m, Paul n Taler; jeder seine Taler hin, und demjenigen, bei dem Wappen öfter erscheint, alle $m+n$ Taler zu. Entspricht das Spiel dem Grundsatz Billigkeit?*

Von den beiden Zahlen sei m die größere. Es kommt d an, für jeden der beiden Spieler die Wahrscheinlichkeit zu bestin daß er den andern in dem bezeichneten Sinne übertreffen werde

Wirft Peter einmal Wappen, so darf bei Paul kein Taler Wa zeigen; die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit hierfür ist

$$\binom{m}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Wirft Peter zweimal Wappen, so darf Paul höchstens e Wappen treffen, und dies ist mit der Wahrscheinlichkeit

1) Vgl. die abweichende Lösung J. Bertrands in seinem Calcul de babilités, p. 52.

$$\binom{m}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^m\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+\binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

zu erwarten.

Wirft Peter dreimal Wappen, so darf dies bei Paul höchstens zweimal eintreten; die Wahrscheinlichkeit dafür ist

$$\binom{m}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^m\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+\binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\binom{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right].$$

Nach diesem Gesetze hat man fortzuschreiten, bis man zu dem Falle, wo Peter n-mal und Paul höchstens $n-1$-mal Wappen getroffen hat, wofür die Wahrscheinlichkeit

$$\binom{m}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^m\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+\binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots+\binom{n}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

besteht. Von da ab, d. h. wenn Peter mehr als n Wappen erzielt, gewinnt er ohne Rücksicht auf den Erfolg Pauls; demnach ist die totale Wahrscheinlichkeit für Peters Gewinn:

$$p_1=\frac{1}{2^{m+n}}\left[\binom{m}{1}+\binom{m}{2}\left\{1+\binom{n}{1}\right\}+\binom{m}{3}\left\{1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right\}+\cdots\right.$$
$$\left.+\binom{m}{n}\left\{1+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n-1}\right\}\right]$$
$$+\frac{1}{2^m}\left[\binom{m}{n+1}+\binom{m}{n+2}+\cdots+1\right];$$

für Paul ergibt sich durch eine ähnliche Betrachtung die Wahrscheinlichkeit

$$p_2=\frac{1}{2^{m+n}}\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\left\{1+\binom{m}{1}\right\}+\binom{n}{3}\left\{1+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}\right\}+\cdots\right.$$
$$\left.+\binom{n}{n}\left\{1+\binom{m}{1}+\cdots+\binom{m}{n-1}\right\}\right].$$

Ist $\frac{p_1}{p_2}=\frac{m}{n}$, so ist das Spiel billig; ist $\frac{p_1}{p_2}>\frac{m}{n}$, so ist Peter, und im Falle $\frac{p_1}{p_2}<\frac{m}{n}$ Paul im Vorteile.

Wenn $m=3$ und $n=2$, so geben die Formeln

$$p_1=\frac{1}{2},\quad p_2=\frac{3}{16},$$

und weil $\frac{8}{3}>\frac{3}{2}$, so ist Peter im Vorteile.

Wenn $m=4$, $n=3$ ist, so hat man

$$p_1=\frac{1}{2},\quad p_2=\frac{29}{128}$$

und da $\frac{64}{29}>\frac{4}{3}$, so ist auch jetzt Peter im Vorteile.

Wird vereinbart, daß das Spiel, wenn es das erste Mal u
schieden bleiben sollte, fortzusetzen ist bis zur Entscheidung,
kommen die *relativen* Wahrscheinlichkeiten in Betracht, nä
$\frac{p_1}{p_1 + p_2}$ für Peter und $\frac{p_2}{p_1 + p_2}$ für Paul. In betreff des Schlusse
die Billigkeit des Spieles bleibt diese Abänderung ohne Einfluß
mathematische Erwartung erfährt aber eine Änderung. Kann
Spiel auch unentschieden bleiben, in welchem Falle jeder seine
zurücknimmt, so ist Peters Erwartung gleich

$$p_1(m + n) + (1 - p_1 - p_2)m = p_1 n + (1 - p_2)m;$$

wird es fortgesetzt bis zur Entscheidung, so beträgt Peters Erwa
$\frac{p_1}{p_1 + p_2}(m + n)$ Taler; für den letztbehandelten Spezialfall sind
Hoffnungen beziehungsweise $4\frac{19}{32}$ und $4\frac{76}{93}$ Taler, und übertreffen
Peters Einsatz.

109. Die Sätze von Tchebycheff[1]). Tchebycheff hat e
Wahrscheinlichkeitssätze über die Mittelwerte dem Zufall unterwor
Größen abgeleitet, die sich neben der elementaren Begründung d
einen hohen Grad von Allgemeinheit auszeichnen und eben de
geeignet sind, die Lösung vieler Fragen der Wahrscheinlichkeitsth
auf sie zurückzuführen.

Es seien $x, y, z \cdots$ irgend welche Grössen, deren jede me
verschiedene Werte, einen jeden mit bestimmter Wahrscheinlic
annehmen kann, und zwar sei x der Werte

$$x_1, x_2, \cdots x_k$$

mit den Wahrscheinlichkeiten

$$p_1, p_2, \cdots p_k$$

fähig, so daß

$$\sum_1^k p_\varkappa = 1;$$

ferner y der Werte

$$y_1, y_2, \cdots y_l$$

mit den Wahrscheinlichkeiten

$$q_1, q_2, \cdots q_l,$$

wobei wieder

$$\sum_1^l q_\lambda = 1;$$

dann z der Werte

$$z_1, z_2, \cdots z_m$$

1) Journ. Liouv. (2) XII, 1867, p. 177.

mit den Wahrscheinlichkeiten

$$r_1, r_2, \cdots r_m,$$

so daß

$$\sum_1^m r_\mu = 1, \tag{3}$$

u. s. w.

Dann sind

$$\sum_1^k p_\varkappa x_\varkappa = a, \quad \sum_1^l q_\lambda y_\lambda = b, \quad \sum_1^m r_\mu z_\mu = c, \cdots \tag{4}$$

die auf $x, y, z, \cdots$ bezüglichen mathematischen Erwartungen oder die Mittelwerte dieser Größen,

$$\sum_1^k p_\varkappa x_\varkappa^2 = a_1, \quad \sum_1^l q_\lambda y_\lambda^2 = b_1, \quad \sum_1^m r_\mu z_\mu^2 = c_1, \cdots \tag{5}$$

die Mittelwerte ihrer Quadrate.

Daß die Realisierung der Bedingungen die Wertkombination $x_\varkappa, y_\lambda, z_\mu, \cdots$ von $x, y, z, \cdots$ und daher den Wert $x_\varkappa + y_\lambda + z_\mu + \cdots$ für die Summe $x + y + z + \cdots$ herbeiführen werde, ist mit der Wahrscheinlichkeit $p_\varkappa q_\lambda r_\mu \cdots$ zu erwarten, und dieselbe Wahrscheinlichkeit besteht auch für das Stattfinden der Differenz

$$x_\varkappa + y_\lambda + z_\mu + \cdots - a - b - c - \cdots$$

zwischen der beobachteten Summe und der Summe der Mittelwerte. Demnach ist der Mittelwert des Quadrates dieser Differenz durch die vielfache Summe

$$\sum (x_\varkappa + y_\lambda + z_\mu + \cdots - a - b - c - \cdots)^2 p_\varkappa q_\lambda z_\mu \cdots \qquad \begin{cases} \varkappa = 1, 2, \ldots k \\ \lambda = 1, 2, \ldots l \\ \mu = 1, 2, \ldots m \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

ausgedrückt. Schreibt man die Differenz in der Form

$$(x_\varkappa - a) + (y_\lambda - b) + (z_\mu - c) + \cdots,$$

so gibt ihr Quadrat zweierlei Glieder: quadratische und produktförmige.

Die Summierung auf das erste quadratische Glied

$$(x_\varkappa - a)^2 = x_\varkappa^2 - 2 a x_\varkappa + a^2$$

zunächst in Bezug auf den Zeiger $\varkappa$ ausgeführt gibt

$$\sum_1^k (x_\varkappa^2 - 2 a x_\varkappa + a^2) p_\varkappa = \sum p_\varkappa x_\varkappa^2 - 2a \sum p_\varkappa x_\varkappa + a^2 \sum p_\varkappa$$
$$= a_1 - 2a^2 + a^2 = a_1 - a^2;$$

die Summierung in Bezug auf die andern Zeiger ändert an diesen Werte nichts, weil vermöge (2), (3), $\cdots$

$$\sum q_\lambda r_\mu \cdots = 1 \text{ für } (\lambda = 1, 2, \cdots m;\ \mu = 1, 2 \cdots m;\ \cdots).$$

Ebenso ergibt das zweite quadratische Glied $b_1 - b^2$, das dritt $c_1 - c^2$, u. s. w.

Bei dem ersten produktförmigen Gliede

$$2(x_\varkappa - a)(y_\lambda - b) = 2(x_\varkappa y_\lambda - b x_\varkappa - a y_\lambda + ab)$$

ergibt die Summierung in bezug auf den Zeiger $\varkappa$

$$2(y_\lambda \sum p_\varkappa x_\varkappa - b \sum p_\varkappa x_\varkappa - a y_\lambda \sum p_\varkappa + ab \sum p_\varkappa)$$
$$= 2(a y_\lambda - ab - a y_\lambda + ab) = 0,$$

und die weiteren Summierungen können an diesem Werte nicht ändern; in gleicher Weise verschwinden die aus den übrigen produk förmigen Gliedern entspringenden Anteile der Summe.

Somit ist

$$\sum (x_\varkappa + y_\lambda + z_\mu + \cdots - a - b - c - \cdots)^2 p_\varkappa q_\lambda z_\mu \cdots$$
$$= a_1 + b_1 + c_1 + \cdots - a^2 - b^2 - c^2 - \cdots; \qquad (\;$$

daraus folgt aber, daß

$$\frac{\sum (x_\varkappa + y_\lambda + z_\mu + \cdots - a - b - c - \cdots)^2 p_\varkappa q_\lambda z_\mu \cdots}{\alpha^2 (a_1 + b_1 + c_1 + \cdots - a^2 - b^2 - c^2 - \cdots)} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Läßt man in der Summe, welche den Zähler bildet, alle Glieder fo für welche

$$\frac{(x_\varkappa + y_\lambda + z_\mu + \cdots - a - b - c - \cdots)^2}{\alpha^2 (a_1 + b_1 + c_1 + \cdots - a^2 - b^2 - c^2 - \cdots)} < 1 \qquad (\;$$

ist, und ersetzt den linksstehenden Quotienten, so oft er größer als 1, durch die Einheit, so ist durch beide Prozesse die linke Se vermindert worden, mithin das Verbleibende, d. i.

$$\sum p_\varkappa q_\lambda z_\mu \cdots < \frac{1}{\alpha^2},$$

wobei sich, dem Ausgeführten zufolge, die Summierung nur auf solc Kombinationen von $\varkappa$, λ, μ, $\cdots$ erstreckt, für welche

$$\frac{(x_\varkappa + y_\lambda + z_\mu + \cdots - a - b - c - \cdots)^2}{\alpha^2 (a_1 + b_1 + c_1 + \cdots - a^2 - b^2 - c^2 - \cdots)} \geqq 1. \qquad (\;$$

Die so eingeschränkte Summe $\sum p_\varkappa q_\lambda z_\mu \cdots$ bedeutet aber die Wah scheinlichkeit $1 - P$ für das Stattfinden eben dieser Relation (so daß P die Wahrscheinlichkeit für das Stattfinden von (7) vorstel

Da nun $1 - P < \frac{1}{\alpha^2}$, so ist $P > 1 - \frac{1}{\alpha^2}$. Hiernach ergibt sich der Satz:

I. *Die Wahrscheinlichkeit P, daß die Differenz*

$$x_\varkappa + y_\lambda + z_\mu + \cdots - a - b - c - \cdots$$

zwischen den Grenzen

$$-\alpha\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \cdots - a^2 - b^2 - c^2 - \cdots}$$

und

$$\alpha\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \cdots - a^2 - b^2 - c^2 - \cdots},$$

oder die Summe

$$x_\varkappa + y_\lambda + z_\mu + \cdots$$

zwischen den Grenzen

$$a + b + c + \cdots - \alpha\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \cdots - a^2 - b^2 - c^2 - \cdots}$$

und

$$a + b + c + \cdots + \alpha\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \cdots - a^2 - b^2 - c^2 - \cdots}$$

enthalten sei, ist größer als $1 - \frac{1}{\alpha^2}$.

Die Zahl α ist nur an die Bedingung gebunden, daß sie größer sein muß als 1.

Ist n die Anzahl der Größen $x, y, z, \cdots$ und setzt man

$$\alpha = \frac{\sqrt{n}}{t},$$

so ergibt sich als eine Folgerung des Satzes I unmittelbar der folgende:

II. *Die Wahrscheinlichkeit P, daß das arithmetische Mittel*

$$\frac{x_\varkappa + y_\lambda + z_\mu + \cdots}{n}$$

aus den beobachteten Werten von x, y, z, $\cdots$ enthalten sei zwischen den Grenzen

$$\frac{a + b + c + \cdots}{n} - \frac{1}{t}\sqrt{\frac{a_1 + b_1 + c_1 + \cdots}{n} - \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \cdots}{n}}$$

und

$$\frac{a + b + c + \cdots}{n} + \frac{1}{t}\sqrt{\frac{a_1 + b_1 + c_1 + \cdots}{n} - \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \cdots}{n}},$$

ist größer als $1 - \frac{t^2}{n}$.

Wenn die Mittelwerte $a, b, c, \cdots a_1, b_1, c_1, \cdots$ eine feste Grenze nicht überschreiten, so bleiben auch die arithmetischen Mittel $\frac{a_1 + b_1 + c_1 + \cdots}{n}$, $\frac{a^2 + b^2 + c^2 + \cdots}{n}$, wie groß auch n sein möge, unter

einer festen Grenze, somit auch die Wurzelgröße, welche in Satze II vorkommt. Daraus folgt, daß man die letztgenannten Gre durch Wahl von t allein beliebig eng ziehen kann; und da be liebig großem t die Differenz $1 - \frac{t^2}{n}$ mit beständig wachsendem Einheit als Grenze sich nähert, so ist der folgende Satz erwiese

III. *Wenn die Mittelwerte von $x, y, z, \cdots$ und die ihrer Qua über eine gewisse feste Grenze nicht hinausgehen, so nähert sicl Wahrscheinlichkeit P, daß der Unterschied zwischen dem arithmeti Mittel von n beobachteten Werten der $x, y, z, \cdots$ und dem a metischen Mittel ihrer Mittelwerte $a, b, c, \cdots$ kleiner sei als ein liebige klein festgesetzte Größe, mit wachsendem n der Einheit.*

110. Folgerungen aus diesen Sätzen. Das Poissons und das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen. E Person falle mit dem Eintreffen des Ereignisses F, das mit der W scheinlichkeit p zu erwarten ist, der Preis A zu, während das N eintreffen von F ohne Folgen bleibt. Es werden s Realisieru vorgenommen. Von den Erfolgen $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots x^{(s)}$, welche sich c einstellen, kann jeder einen der beiden Werte A und 0 mit der W scheinlichkeit p, beziehungsweise $q = 1 - p$ annehmen. Demnacl der mittlere Wert eines jeden $x^{(i)}$

$$a = pA,$$

der Mittelwert seines Quadrates

$$a_1 = pA^2.$$

Nach dem Satze I ist mit einer Wahrscheinlichkeit

$$P > 1 - \frac{1}{\alpha^2}$$

zu erwarten, daß die erzielte Summe $x^{(1)} + x^{(2)} + \cdots + x^{(s)}$ enth sein werde zwischen den Grenzen

$$spA - \alpha\sqrt{spA^2 - sp^2A^2} \quad \text{und} \quad spA + \alpha\sqrt{spA^2 - sp^2A^2}$$

oder zwischen

$$spA - \alpha A\sqrt{spq} \quad \text{und} \quad spA + \alpha A\sqrt{spq};$$

und nach dem Satze II besteht eine Wahrscheinlichkeit

$$P > 1 - \frac{t^2}{s}$$

dafür, daß der durchschnittlich auf eine Realisierung entfallende folg eingeschlossen sei zwischen die Grenzen

$$pA - \frac{A}{t}\sqrt{pq} \quad \text{und} \quad pA + \frac{A}{t}\sqrt{pq}.$$

Die Grenzen (1) erweitern sich bei gleichbleibender unterer Grenze von P im Verhältnis der Quadratwurzel aus s, die Grenzen (2) hingegen verengen sich unter den gleichen Umständen im Verhältnis der Quadratwurzel aus s, und man kann zu beliebig eng gewählten Grenzen (2) s so groß annehmen, daß die untere Grenze von P sich beliebig wenig von der Einheit unterscheide.

Der in Rede stehenden Person möge wieder für den Fall des Eintreffens von F der Preis A ausgezahlt werden; dagegen sei sie verpflichtet, bei Nichteintreffen von F den Betrag B zu erlegen. Von den Erfolgen $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots x^{(s)}$, welche sich jetzt bei s Realisierungen einstellen können, ist jeder zweier Werte, A und $-B$, mit der Wahrscheinlichkeit p, respektive q fähig, und es ist der mittlere Wert eines jeden $x^{(i)}$ gleich

$$a = pA - qB,$$

er eines jeden $x^{(i)2}$ gleich

$$a_1 = pA^2 + qB^2.$$

Dem Satze I zufolge besteht eine den Betrag $1 - \frac{1}{\alpha^2}$ übersteigende Wahrscheinlichkeit P dafür, daß der erzielte Gesamterfolg zwischen den Grenzen

$$s(pA - qB) - \alpha\sqrt{s(pA^2 + qB^2) - s(pA - qB)^2}$$

und

$$s(pA - qB) + \alpha\sqrt{\cdots}$$

oder zwischen

$$\left.\begin{array}{l} s(pA - qB) - \alpha(A + B)\sqrt{spq} \\ s(pA - qB) + \alpha(A + B)\sqrt{spq} \end{array}\right\} \quad (3)$$

und

enthalten sein werde; und dem Satze II zufolge ist mit einer Wahrscheinlichkeit P, die größer ist als $1 - \frac{t^2}{s}$, zu erwarten, daß der im Durchschnitt auf eine Realisierung entfallende Erfolg nicht über die Grenzen

$$pA - qB - \frac{A+B}{t}\sqrt{pq} \quad \text{und} \quad pA - qB + \frac{A+B}{t}\sqrt{pq} \quad (4)$$

hinausfallen werde.

Aus dem Ansatze (3) geht folgender Sachverhalt hervor: Ist $pA - qB \neq 0$, so läßt sich, wie groß auch α sein, wie nahe also P der Einheit liegen mag, s so bestimmen, daß die untere sowohl als die obere Grenze das Vorzeichen von $pA - qB$ hat. Wenn hingegen die Beträge A, B so geregelt sind, daß $pA - qB = 0$ ist, dann kann der Gesamterfolg, wie groß auch s sein mag, ebensowohl einen Gewinn wie auch einen Verlust bedeuten.

Würde beispielsweise die Person $5\frac{1}{2}$ Frcs. erhalten, wenn bei Würfeln Aß fällt, und 1 Frcs. zu zahlen haben, wenn eine ande Würfelseite erscheint, und wollte man mit einer Wahrscheinlichke die $1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$ übertrifft, erwarten dürfen, daß aus s-maliger Wied holung des Spieles der Person ein Gewinn erwachse, so müßte $s>84.5$(festgesetzt werden; denn soll

$$s\left(\frac{1}{6}\cdot 5\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\cdot 1\right)-10\cdot 6\frac{1}{2}\sqrt{s\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}>0$$

sein, so muß

$$s>84.500$$

genommen werden.

Von seinem III. Satze hat Tchebycheff Gebrauch gemacht, u das Gesetz der großen Zahlen zu erweisen.

Es habe $x^{(1)}$ den Wert 1 oder 0, jenachdem ein Ereignis F i ersten Versuche eintrifft oder nicht, und die Wahrscheinlichkeit hierfür seien p_1, $q_1=1-p_1$; $x^{(2)}$ nehme einen der Werte 1 oder an, jenachdem dasselbe Ereignis im zweiten Versuche eintrifft od nicht, wofür die Wahrscheinlichkeiten p_2, $q_2=1-p_2$ bestehen mög u. s. f.; endlich bedeute $x^{(n)}$ einen der Werte 1 oder 0, jenachdem d Ereignis F im n-ten Versuche eintrifft oder nicht, wofür p_n u $q_n=1-p_n$ die bezüglichen Wahrscheinlichkeiten sein mögen. Da bedeutet der beobachtete Wert von

$$\frac{x^{(1)}+x^{(2)}+\cdots+x^{(n)}}{n}$$

das Verhältnis der Wiederholungszahl des Ereignisses F in den n V suchen zur Zahl der Versuche selbst; ferner sind die Mittelwerte v $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $\cdots$ $x^{(n)}$ gleich

$$a^{(1)}=p_1\cdot 1+q_1\cdot 0=p_1,\quad a^{(2)}=p_2,\quad\cdots\quad a^{(n)}=p_n,$$

die Mittelwerte ihrer Quadrate gleich

$$a_1^{(1)}=p_1\cdot 1^2+q_1\cdot 0^2=p_1,\quad a_1^{(2)}=p_2,\quad\cdots\quad a_1^{(n)}=p_n.$$

Es besteht demnach eine Wahrscheinlichkeit $P>1-\frac{t^2}{n}$ dafür, d sich das genannte Verhältnis zwischen den Grenzen

$$\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n}\mp\frac{1}{t}\sqrt{\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n}-\frac{p_1^2+p_2^2+\cdots+p_n^2}{n}}$$

befinden werde; und im Sinne des Satzes III nähert sich P ı wachsendem n der Einheit, wie eng man auch diese Grenzen fe gesetzt haben mag. Dies aber ist der wesentliche Inhalt des Theore von Poisson (s. Nr. 83).

Unter der Annahme, daß die Wahrscheinlichkeit von F konstant bleibt im Laufe der Versuche, daß also $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$ und $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = q = 1 - p$, ergibt sich das Bernoullische Theorem in der folgenden Fassung: Das Verhältnis der Wiederholungszahl von F in n Versuchen zu n selbst liegt mit einer Wahrscheinlichkeit P, die größer ist als $1 - \frac{t^2}{n}$, zwischen den Grenzen

$$p \mp \frac{1}{t} \sqrt{pq}.$$

§ 2. Das mathematische Risiko.

111. Begriff des mathematischen Risiko. Jedes auf den Zufall gegründete Unternehmen, wenn es mathematisch geregelt ist, genügt der Grundforderung, daß die mathematische Erwartung eines jeden Teilnehmers gleich Null ist.

Trotz dieses gemeinsamen Merkmals unterscheiden sich aber verschiedene Unternehmungen von einander je nach dem Verhältnis der dabei in Betracht kommenden Wahrscheinlichkeiten und nach der Höhe der auf dem Spiele stehenden Summen, und zwar in Bezug auf die Aussicht auf Erzielung eines Reingewinnes oder in Bezug auf die Gefahr eines Verlustes.

Ein Unternehmer setze auf das Eintreffen eines Ereignisses F, dem die Wahrscheinlichkeit p zukommt, einen Preis A aus und hebe dafür von dem Spieler den rechtmäßigen Einsatz

$$E = pA \tag{1}$$

ein. Nach Abschluß dieses Vertrages steht der Spieler vor zwei Eventualitäten: entweder den Reingewinn $A - E$ zu erzielen, und die hierauf bezügliche *Reingewinnhoffnung* ist

$$R = p(A - E) = p(1 - p)A = pqA = qE; \tag{2}$$

oder den Verlust des Einsatzes E zu erleiden, und die hierauf bezügliche *Verlusterwartung* ist

$$R' = qE; \tag{3}$$

beide sind sonach dem Betrage nach gleich. In einer ähnlichen Lage befindet sich aber auch der Unternehmer: für ihn ist R' der Ausdruck für die Gewinn-, R der Ausdruck für die Verlusterwartung.

Der Betrag R oder der ihm gleiche R' ist als Maßstab für die Gefahr, welche das Unternehmen sowohl der einen wie der andern Seite bringt, unter dem Namen *Risiko* von Tetens[1]) eingeführt wor-

---

1) Johann Nicolaus Tetens, Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften. II. Teil. Leipzig, 1786.

den, während Wittstein[1]) ihn als *mathematisches*, Hausdorff[2]) neuerdings als *durchschnittliches Risiko* bezeichnet.

Der Quotient $\frac{R}{E}$ drückt das Maß der Gewinnerwartung, der ihm gleiche Quotient $\frac{R'}{E}$ das Maß der Verlusterwartung ohne Rücksicht auf die Höhe der Summen aus, die auf dem Spiele stehen. Man nennt jeden dieser Quotienten das *relative Risiko*. Da nach (3)

$$\frac{R'}{E} = q$$

ist, so wächst die relative Verlusterwartung, oder wie man sagen kann, die Gefährlichkeit des Spieles gerade so wie die Wahrscheinlichkeit, zu verlieren.

Den Größen R, R' kommt auch eine unmittelbar verständliche Bedeutung zu. Es ist R' der rechtmäßige Einsatz oder die Prämie, welche der Spieler demselben oder einem andern Unternehmer zu leisten hätte, damit dieser ihm den wirklich eingetretenen Verlust ersetze, und R die Prämie, gegen welche der Unternehmer seinerseits sich gegen einen Verlust sichern könnte.

Durch diesen neuen Vertrag ist aber der Spieler keineswegs gegen *jeglichen* Verlust gesichert[3]); vielmehr hat sich nur seine Reingewinnhoffnung und in gleichem Maße seine Verlusterwartung verändert, und zwar vermindert. Denn seine Einzahlung ist jetzt $E + R'$ seine Reingewinnhoffnung daher

$$R_1 = p(A - E - R') = q^2 E,$$

die Verlusterwartung ebenfalls

$$R_1' = q \cdot qE = q^2 E,$$

weil er im Falle des Verlustes nur die ursprüngliche Einzahlung E, nicht aber auch die Prämie $R' = qE$ zurückerhält.

Es wäre also R_1' die rechtmäßige Prämie, gegen welche sich der Spieler auch gegen diesen Verlust sichern könnte; hätte er dies getan, so wäre seine Reingewinnhoffnung nur mehr

$$R_2 = p(A - E - R' - R_1') = q^3 E$$

und ihr stünde die gleich große Verlusterwartung

$$R_2' = q \cdot q^2 E = q^3 E$$

gegenüber.

1) Theodor Wittstein, Das mathematische Risiko der Versicherungsgesellschaften etc. Hannover, 1885.

2) F. Hausdorff, Das Risiko bei Zufallsspielen. Leipziger Ber. 49, 1897.

3) Diese irrtümliche Auffassung könnte den Ausführungen Wittsteins l. c. entnommen werden.

Auf diese Weise könnte der Spieler durch eine fortlaufende Kette von Versicherungen sein Risiko beliebig verkleinern, und er würde sich dabei dem nichtssagenden Grenzfalle nähern, daß er die Summe A einzahlt und eine gleich große Summe mit Sicherheit zurückerhält; denn seine Einzahlung betrüge an der Grenze

$$E + R' + R_1' + R_2' + \cdots = E(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots) = \frac{E}{1-q} = \frac{E}{p} = A.$$

Man hat die Größen R, R_1, R_2, $\cdots$ oder R', R_1', R_2', $\cdots$ auch als Risiko erster, zweiter, dritter, $\cdots$ Ordnung bezeichnet.

112. Fortsetzung. Ausdehnung auf mehrere Preise. Auf eine Reihe einander ausschließender und von einander unabhängiger Ereignisse F_1, F_2, $\cdots$ F_n, deren Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, $\cdots$ p_n demnach der Bedingung

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

entsprechen, seien Preise A_1, A_2, $\cdots$ A_n ausgesetzt; der für diese Gewinnaussicht von einem Spieler zu leistende Einsatz ist

$$E = p_1 A_1 + p_2 A_2 + \cdots + p_n A_n. \tag{1}$$

Nach Erlag desselben ist seine Reingewinnhoffnung

$$R = \sum p_g (A_g - E),$$

wenn unter A_g alle jene Preise verstanden werden, die größer sind als der Einsatz E; und seine Verlusterwartung ist

$$R' = \sum p_k (E - A_k),$$

wenn unter A_k alle jene Preise verstanden werden, die unter dem Einsatz liegen. Daß beide einander gleich sind, folgt aus

$$R - R' = \sum_1^n p_i A_i - E \sum_1^n p_i = E - E = 0;$$

daher ist auch

$$R = R' = \frac{1}{2} \sum_1^n p_i \, |A_i - E| \,. \tag{2}$$

In gleicher Weise ergibt sich das Risiko zweiter Ordnung

$$R_1 = R_1' = \frac{1}{2} \sum_1^n p_i \, |A_i - E - R'| \,, \tag{3}$$

das der dritten Ordnung

$$R_2 = R_2' = \frac{1}{2} \sum_1^n p_i \, |A_i - E - R - R_1'| \,, \tag{4}$$

u. s. w. Die Summe $E + R' + R_1' + R_2' + \cdots$ nähert sich mit wachsendem Zeiger dem größten Preis als Grenze.

Bei demselben Einsatze E kann das Risiko R sehr verschieden ausfallen je nach der Verteilung der Preise und der Wahrscheinlichkeiten, sie zu erlangen.

Als Beispiel wählen wir denselben Fall, an welchem schon Tetens[1]) den Begriff des Risiko erklärt hat.

Auf jede Seite eines Würfels sei ein Preis von so viel Francs ausgesetzt, als sie Punkte trägt. Der vom Spieler hierfür zu bezahlende Einsatz ist

$$E = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3\frac{1}{2} \text{ Frcs.},$$

das Risiko des Spiels beträgt

$$R = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \text{ Frcs.},$$

das relative Risiko ist $\frac{3}{4} : 3\frac{1}{2} = \frac{3}{14}$, so daß der Spieler $\frac{3}{14}$ oder $21\frac{3}{7}$ % des Einsatzes als Prämie zu zahlen hätte, um sich gegen den Verlust des Einsatzes zu sichern.

Zahlt er diese Prämie, so ist seine gesamte Einzahlung $4\frac{1}{4}$ Frcs., welche nur mehr von den Preisen 5 und 6 Frcs. übertroffen wird; sein nunmehriges Risico ist nur mehr

$$R_1 = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{4} + 1\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{12} \text{ Frcs.},$$

das relative Risico $\frac{5}{12} : 4\frac{1}{4} = \frac{5}{51}$; er hätte also $\frac{5}{51}$ oder $9\frac{41}{51}$ % des erhöhten Einsatzes als Prämie zu zahlen, um sich gegen den Verlust desselben zu versichern.

Hierdurch ginge aber sein Risiko, da die Einzahlung nun $4\frac{2}{3}$ Frcs. beträgt, über in

$$R_2 = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{18} \text{ Frcs.},$$

das relative Risiko betrüge $\frac{5}{18} : 4\frac{2}{3} = \frac{5}{84}$, und er hätte $\frac{5}{84}$ oder $5\frac{20}{21}$ der Einzahlung an Prämie zu erlegen, um sich gegen den Verlust jener Einzahlung sicher zu stellen u. s. w.

Das Risiko nimmt also beständig ab, die zu leistenden Einzahlungen nähern sich aber wachsend dem höchsten Preise von 6 Frcs. als Grenze.

1) l. c.

Wäre auf die Würfelseiten 4, 5, 6 je ein Preis von 7 Frcs., auf die andern kein Preis ausgesetzt worden, so wäre vom Spieler derselbe Einsatz von $3\frac{1}{2}$ Frcs. zu leisten; sein Risiko betrüge aber jetzt

$$R = \frac{1}{6}\left(3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}\right) = 1\frac{3}{4} \text{ Frcs.},$$

das relative $1\frac{3}{4} : 3\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ oder 50% des Einsatzes.

Und hätte der Unternehmer lediglich auf die Würfelseite 6 etwa den Preis von 21 Frcs. ausgesetzt, so wäre bei dem gleichen Einsatze des Spielers, d. i. $3\frac{1}{2}$ Frcs., sein Risiko nunmehr

$$R = \frac{1}{6} \cdot 17\frac{1}{2} = 2\frac{11}{12} \text{ Frcs.},$$

er hätte somit $2\frac{11}{12} : 3\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ oder $83\frac{1}{3}$% des Einsatzes an Prämie zu zahlen, um sich gegen dessen Verlust zu schützen.

Es ist sonach unter den drei Formen des Spiels die erste die mindest, die dritte die am meisten gefährliche.

113. Das Risiko bei einer großen Anzahl von einander unabhängiger, gleichartiger Einzelfälle. Der Unternehmer setze auf das mit der Wahrscheinlichkeit p zu erwartende Eintreffen des Ereignisses F den Preis A aus und hebe dafür von dem Spieler den rechtmäßigen Einsatz $E = pA$ ein. Wie groß ist sein Risiko, wenn er eine sehr große Anzahl s solcher Verträge, entweder mit demselben oder mit verschiedenen Spielern, abschließt?[1])

Die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis F in den s Fällen $(sp + l)$-mal eintreffe und $(sq - l)$-mal ausbleibe, ist näherungsweise ausgedrückt durch (vgl. Nr. 69)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} e^{-\frac{l^2}{2spq}},$$

wenn $q = 1 - p$ ist. Die von dem Unternehmer zu leistende Zahlung ist dann $(sp + l)A$, während seine Einnahme $sE = spA$ beträgt; er erleidet somit einen Verlust vom Betrage lA. Sein Risiko würde also erhalten, wenn man die Produkte

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} \cdot lA e^{-\frac{l^2}{2spq}}$$

---

1) Man kann sich den Hergang etwa durch folgendes Sohema verbildlichen: Von s Personen schreibt jede unabhängig von den andern eine der Nummern 1 bis 6 auf einen Zettel und hinterlegt diesen; der Unternehmer würfelt einmal und zahlt jeder Person, deren Nummer erschienen ist, den Preis. Oder: Jede der s Personen bezeichnet frei eine Nummer, und der Unternehmer würfelt für jede besonders; erscheint die bezeichnete Nummer, so zahlt er den Preis.

für alle zulässigen positiven l bildete und summierte. Diese Su
kann aber (vgl. Nr. 74, Schluß) mit hinreichender Genauigkeit d
das über *alle* positiven Werte von l ausgedehnte Integral der
angeschriebenen Funktion ersetzt werden, so daß man hat:

$$R' = \frac{A}{\sqrt{2\pi spq}} \int_0^\infty l e^{-\frac{l^2}{2spq}} dl;$$

zwecks Ausführung der Integration führe man mittelst der Substitu
$\frac{l}{\sqrt{2\pi spq}} = t$ die neue Variable t ein, und man findet so

$$R' = A \sqrt{\frac{2spq}{\pi}} \int_0^\infty t e^{-t^2} dt = A \sqrt{\frac{spq}{2\pi}}.$$

Daraus folgt das relative Risiko

$$\frac{R'}{spA} = \sqrt{\frac{1}{2\pi s} \frac{q}{p}} = 0{,}39894 \sqrt{\frac{q}{sp}}.$$

Hiernach wächst das absolute Risiko R' proportional mit
Höhe des Preises und proportional mit der Quadratwurzel aus
Anzahl der abgeschlossenen Unternehmungen, hängt aber übe
noch von dem Größenverhältnis der Wahrscheinlichkeiten ab; es
in letzterer Hinsicht am größten für $p = q = \frac{1}{2}$.

Das relative Risiko aber nimmt im Verhältnis der Quadratw
aus der Anzahl der Unternehmungen ab und kann daher durch
größerung dieser Anzahl beliebig klein gemacht werden. Darin
sich der wesentliche Unterschied zwischen einem einzelnen Gl
falle und einem aus einer großen Anzahl gleichartiger Fälle beste
den Unternehmen.

Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel. Der Unternehmer
auf eine bestimmte Würfelseite den Preis von 6 Frcs. aus und
dafür den Einsatz von 1 Frc. ein. Für einen einzelnen Fall bet
das absolute Risiko $\frac{5}{6}$ Frc. oder $83\frac{1}{3}\%$ des Einsatzes; um es
decken, müßte der Unternehmer von dem Partner neben dem Ei
von 1 Frc. noch eine Prämie von $\frac{5}{6}$ Frc. erhalten. Schließt der U
nehmer 500 solcher Fälle ab, so ist sein absolutes Risiko 19,94 F
das relative aber sinkt auf 0,039894 oder etwas weniger als 4%
gesamten Einsatzes, so daß er, um es zu decken, von jedem Pa
nur eine Zuschlagsprämie von $\frac{4}{100}$ Frc. einzuheben brauchte.

Es soll nun noch die Frage nach der Wahrscheinlichkeit erl
werden, daß die von dem Unternehmer zu leistende Auszahlung

von dem wahrscheinlichsten Betrage spA, der zugleich die Summe der von den Partnern gezahlten Einlagen darstellt, nicht mehr als um das k-fache Risiko nach auf- oder abwärts entfernen werde.

Dem Bernoullischen Theorem zufolge kann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich die Wiederholungszahl von F zwischen die Grenzen $sp - l$ und $sp + l$ stellen werde, nahe genug durch

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{l}{\sqrt{2spq}}} e^{-t^2} dt$$

ausgedrückt werden. Die Zahlung des Unternehmers fällt dann zwischen die Grenzen $spA - lA$ und $spA + lA$. Soll nun

$$lA = kR' = kA\sqrt{\frac{spq}{2\pi}}$$

sein, so muß für l die nächste über

$$k\sqrt{\frac{spq}{2\pi}}$$

liegende ganze Zahl genommen werden; nimmt man für l diesen letzten Ausdruck selbst, so wird

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{k}{2\sqrt{\pi}}} e^{-t^2} dt = \Phi\left(\frac{k}{2\sqrt{\pi}}\right), \tag{3}$$

und dies ist die verlangte Wahrscheinlichkeit. Ihr halber Betrag drückt ebensowohl die Wahrscheinlichkeit eines das k-fache Risiko nicht übersteigenden Gewinnes wie die eines gleichgearteten Verlustes aus. Da $\frac{1}{2}$ die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes überhaupt ist, so bedeutet P auch die Wahrscheinlichkeit, daß, wofern ein Verlust eintritt, er unter dem k-fachen Risiko verbleibt.

Mittels der Tafel I findet man, daß für

$k =$	1	2	3	4	5	6
$P =$	0,31006	0,57498	0,76863	0,88945	0,95392	0,98332.

114. Das sogenannte mittlere Risiko. Wenn man jede Differenz zwischen einem Preise A_i und dem Einsatz E des Spielers als eine *Abweichung* bezeichnet, so stellt sich nach den Ausführungen in Nr. 112 das Risiko als der halbe Mittelwert der absoluten Beträge aller Abweichungen; dies ist der Inhalt der dort abgeleiteten Formel (2):

$$R = \frac{1}{2}\sum_1^n p_i \,|\, A_i - E \,|\, ;$$

dagegen ist — bei einem geordneten Unternehmen — der mittlere Wert der Abweichung selbst gleich Null, d. h.

$$\sum_1^n p_i(A_i - E) = 0,$$

wie ebenfalls dort gezeigt ist.

Man kann nun daran denken, zur Charakterisierung eines vom Zufall abhängigen Unternehmens einen andern Mittelwert der Abweichungen zu verwenden; als ein solcher bietet sich schon aus praktischen Erwägungen der folgende dar:

$$M = \sqrt{\sum_1^n p_i(A_i - E)^2}; \tag{1}$$

er hebt den Zeichenunterschied der Abweichungen in einfacher Weise auf und läßt große Abweichungen stärker hervortreten, als wenn deren erste Potenzen in Rechnung gezogen werden, was eine strengere Beurteilung der Verlustgefahr erwarten läßt. Nach einer in einem andern Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung (s. Nr. 130) üblichen Nomenklatur wäre M als die *mittlere Abweichung* zu bezeichnen; es ist dafür auch der Name *mittleres Risiko* vorgeschlagen worden[1]).

Wenn es sich um einen einzelnen Glücksfall handelt, so leistet die Größe M nicht genau dasselbe wie das Risiko; selbstverständlich kommt ihr auch nicht dessen materielle Bedeutung zu. Angenommen, auf das mit der Wahrscheinlichkeit p zu erwartende Eintreffen von F sei der Preis A ausgesetzt, während im Falle des Nichteintreffens der Spieler seinen Einsatz $E = pA$ an den Unternehmer verliert, so ist das Risiko

$$R = qE,$$

das mittlere Risiko

$$M = \sqrt{p(A - E)^2 + qE^2} = E\sqrt{\frac{q}{p}};$$

unter allen Umständen ist also $M > R$. Wenn ferner bei zwei Glücksfällen mit demselben Einsatz die Risiken R', R'' in der Beziehung $R' > R''$ zu einander stehen, so findet auch die Relation $M' > M''$ statt. Aber das Verhältnis $\frac{M'}{M''}$ kann erheblich verschieden sein von $\frac{R'}{R''}$.

Anders gestaltet sich die Sachlage, wenn es sich um eine große Anzahl gleichartiger und von einander unabhängiger Unternehmungen

1) S. die bereits zitierte Arbeit F. Hausdorffs. Dem Wesen nach kommt dieser Begriff schon in C. Bremikers Schrift: Das Risiko bei Lebensversicherungen (Berlin 1859) vor.

handelt; dann steht, wie gezeigt werden wird, das *mittlere* Gesamtrisiko (des Unternehmers oder der Vereinigung aller Spieler) zu dem *eigentlichen* Gesamtrisiko in einem konstanten, von den Wahrscheinlichkeiten unabhängigen Verhältnis, so daß in einem solchen Falle die eine Größe ebenso geeignet ist wie die andere, die Verlustgefahr oder Gewinnaussicht des Unternehmens zu kennzeichnen.

Schließt nämlich der Unternehmer s Verträge von der oben beschriebenen Art ab, wobei s eine sehr große Zahl sein soll, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß seine Leistung $spA - lA$ *oder* $spA + lA$ betragen, die Abweichung also, vom Vorzeichen abgesehen, lA sein werde, näherungsweise durch

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi spq}} e^{-\frac{l^2}{2spq}}$$

ausgedrückt (s. Nr. 69). Man erhielte also M^2 durch Multiplikation dieses Ausdrucks mit $(lA)^2$ und Summierung des Produktes über alle zulässigen Werte von l. Statt dessen kann mit zureichender Genauigkeit das Integral

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi spq}} \int_0^\infty (lA)^2 e^{-\frac{l^2}{2spq}} dl$$

genommen werden; führt man hierin die neue Variable t mittels der Substitution

$$\frac{l}{\sqrt{2spq}} = t$$

ein, so ergibt sich nach Vollziehung der Integration

$$M^2 = spqA^2,$$

woraus dann

$$M = A\sqrt{spq} \tag{2}$$

folgt. Da nun gemäß der Formel (1) der vorigen Nummer das durchschnittliche Risiko für denselben Fall

$$R = A\sqrt{\frac{spq}{2\pi}}$$

beträgt, so ist tatsächlich das Verhältnis $\frac{R}{M}$ konstant und zwar ist $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0{,}39894$ sein Wert, so daß

$$R = M\sqrt{\frac{1}{2\pi}} = 0{,}39894\,M \tag{3}$$

ist.

Das Rechnen mit der mittleren Abweichung bietet den Vorteil, daß man die mittlere Abweichung, welche aus einer Reihe verschie-

denartiger Unternehmungen resultiert, die von einander unabhän|
sind, leicht berechnen kann, sobald die den einzelnen Unternehmun|
entsprechenden mittleren Abweichungen bestimmt sind. Nach (
einleitenden Entwicklungen zu den Tchebycheffschen Sätzen, Nr. 1
ist nämlich der Mittelwert des Quadrates einer Summe von Größ
deren Mittelwerte selbst einzeln Null sind, gleich der Summe
mittleren Quadrate der einzelnen Größen, wie sich dies aus der d
tigen Gleichung (6) ergibt, wenn man darin $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$,
setzt.

Hat demnach jemand mehrere von einander unabhängige Vertr
abgeschlossen, aus welchen die mittleren Abweichungen $M_1, M_2, M_3,$
hervorgehen, so ist die totale mittlere Abweichung oder das mittl
Gesamtrisiko M durch die Gleichung

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + \cdots}$$

gegeben. Über die wirklich beobachtete Totalabweichung aber lä
sich nach dem I. Satze von Tchebycheff das folgende Wahrsche
lichkeitsurteil aufstellen:

Die Wahrscheinlichkeit, daß die aus mehreren Unternehmungen
den mittleren Abweichungen M_1, M_2, M_3, $\cdots$ hervorgehende Gesa
abweichung zwischen die Grenzen

$$-\alpha\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + \cdots} \quad \text{und} \quad \alpha\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + \cdots}$$

falle, ist größer als $1 - \frac{1}{\alpha^2}$.

Besteht jede der Unternehmungen selbst wieder aus einer groß
Anzahl gleichartiger Fälle, so können die M_1, M_2, M_3, $\cdots$ nach
Formel (2) gerechnet werden. Zwischen M und dem Gesamtrisiko
besteht auch dann die durch (3) ausgedrückte Beziehung.

Um dies zu erweisen, denken wir uns zwei Unternehmung
mit s_1, beziehungsweise s_2 Verträgen, mit den Preisen A_1, A_2 u
den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, diese zu erlangen. Die Wahrsche
lichkeit, daß sich die Abweichung $l_1 A_1 + l_2 A_2$ einstelle, ist bestim
durch das Produkt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi s_1 p_1 q_1}} e^{-\frac{l_1^2}{2 s_1 p_1 q_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi s_2 p_2 q_2}} e^{-\frac{l_2^2}{2 s_2 p_2 q_2}};$$

dies Produkt, mit $l_1 A_1 + l_2 A_2$ multipliziert und über alle Werte v
l_1, l_2 integriert, für welche $l_1 A_1 + l_2 A_2$ positiv ist, gibt das Risiko
Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{1}{\sqrt{2 s_1 p_1 q_1}} = h_1, \quad \frac{1}{\sqrt{2 s_2 p_2 q_2}} = h_2,$$

so wird hiernach

$$R = \frac{h_1 h_2}{\pi} \iint e^{-h_1^2 l_1^2 - h_2^2 l_2^2} (l_1 A_1 + l_2 A_2) dl_1 dl_2$$

$$= \frac{h_1 h_2}{\pi} \left\{ A_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h_2^2 l_2^2} dl_2 \int_{-\frac{l_2 A_2}{A_1}}^{\infty} e^{-h_1^2 l_1^2} l_1 dl_1 + A_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h_1^2 l_1^2} dl_1 \int_{-\frac{l_1 A_1}{A_2}}^{\infty} e^{-h_2^2 l_2^2} l_2 dl_2 \right\}$$

$$= \frac{h_1 h_2}{\pi} \left\{ \frac{A_1^2}{2 h_1^2 \sqrt{h_1^2 A_2^2 + h_2^2 A_1^2}} \sqrt{\pi} + \frac{A_2^2}{2 h_2^2 \sqrt{h_1^2 A_2^2 + h_2^2 A_1^2}} \sqrt{\pi} \right\}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{A_1^2}{h_1^2} + \frac{A_2^2}{h_2^2}};$$

ersetzt man h_1, h_2 wieder durch ihre Werte und nimmt Rücksicht auf Formel (2), so wird

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{M_1^2 + M_2^2},$$

d. i. nach (4):

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} M = 0{,}39894\, M, \tag{3*}$$

wie behauptet worden.

Sind also die Risiken der Einzelunternehmungen, deren jede aus einer großen Zahl gleichartiger Einzelfälle besteht, bekannt, so setzt sich das Gesamtrisiko nach demselben Gesetz zusammen, wie es in (4) ausgesprochen ist, daß nämlich

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + \cdots} \tag{5}$$

ist.

Es mag nun noch die Frage nach der Wahrscheinlichkeit beantwortet werden, daß die aus dem Unternehmen, welches durch die Gleichung (2) gekennzeichnet ist, hervorgehende Abweichung das k-fache mittlere Risiko M nicht übersteige, mit andern Worten, daß die von dem Unternehmer zu leistende Zahlung von der wahrscheinlichsten spA dem Betrage nach nicht mehr als um kM abweiche.

Nach dem **Bernoullischen** Theorem fällt die Wiederholungszahl von F mit der Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{l}{\sqrt{2spq}}} e^{-t^2} dt$$

zwischen die Grenzen $sp - l$ und $sp + l$, die zu leistende Zahlung also zwischen $spA - lA$ und $spA + A$; soll nun

$$lA = kM = kA\sqrt{spq}$$

sein, so ist für l der Wert $k\sqrt{spq}$ zu setzen; mithin ist

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{k}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt = \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right) \tag{5}$$

die verlangte Wahrscheinlichkeit.

Mit Hilfe der Tafel I findet man, daß die Werte

$k =$	1	2	3	4
$P =$	0,68267	0,95449	0,99730	0,99994

zusammengehören. Man hat also mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{9973}{10000}$ zu erwarten, daß die Abweichung nicht über $3M$ betragen werde; mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ist zu erwarten, daß, *wenn* ein Verlust eintritt, er diese Grenze nicht überschreitet.

Die Frage, welchen Fond der Unternehmer bereit halten soll, um aus ihm eingetretene Verluste zu decken, läßt eine apodiktische Beantwortung nicht zu; absolute Sicherheit bestünde nur in dem Falle, wenn jener Fond die Höhe des größtmöglichen Verlustes hätte. Sobald er niedriger ist, besteht nur ein gewisses Maß von Wahrscheinlichkeit dafür, daß er ausreichen werde. Mit welchem Maße von Wahrscheinlichkeit man sich begnügen soll, kann aber niemals Gegenstand einer Rechnung sein, hängt vielmehr von dem subjektiven Ermessen ab. Durch Wittsteins Darstellung vom mathematischen Risiko zieht sich der Gedanke, als ob dieses das einzig richtige Maß des Sicherheitsfonds wäre und als ob es zur Deckung *aller* Verluste ausreiche. Aus der Zusammenstellung am Schlusse der vorigen Nummer geht indessen hervor, daß, *wenn* ein Verlust eintritt, er nur mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{31}{100}$ unter dem Risiko verbleibt und daß man den Fond auf das doppelte Risiko erhöhen müßte, um mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{575}{1000}$ erwarten zu dürfen, er werde ausreichen. Um also solche Wahrscheinlichkeitsschlüsse über die Höhe des Fonds oder der einzuhebenden Zuschlagsprämie machen zu können, kann man sich ebenso gut auf das mittlere Risiko stützen und die obenstehende Ziffernreihe benützen[1]).

115. Beispiel LIV. *Ein Unternehmer habe folgende Verträge abgeschlossen:*

300 Vertr. auf den Preis von 2000 Frcs., zahlbar mit der Wahrsch. $\frac{1}{50}$, gegen den Einsatz von 40 Frcs.,

200 Vertr. auf den Preis von 3000 Frcs., zahlbar mit der Wahrsch. $\frac{1}{100}$, gegen den Einsatz von 30 Frcs.,

1) Vgl. hierzu Hausdorff, l. c., p. 515ff.

400 Vertr. auf den Preis von 4000 Frcs., zahlbar mit der Wahrsch. $\frac{1}{200}$, gegen den Einsatz von 20 Frcs.,

600 Vertr. auf den Preis von 5000 Frcs., zahlbar mit der Wahrsch. $\frac{1}{500}$, gegen den Einsatz von 10 Frcs.

Es ist sein mittleres und sein durchschnittliches Risiko zu bestimmen.

Gemäß der Formel (2) der vorigen Nummer sind die *Quadrate* der mittleren Risiken in den vier Gruppen:

$$4\,000\,000 \cdot 300 \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{49}{50} = 23\,520\,000$$

$$9\,000\,000 \cdot 200 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{99}{100} = 17\,820\,000$$

$$16\,000\,000 \cdot 400 \cdot \frac{1}{200} \cdot \frac{199}{200} = 31\,840\,000$$

$$25\,000\,000 \cdot 600 \cdot \frac{1}{500} \cdot \frac{499}{500} = 29\,940\,000$$

$$103\,120\,000;$$

hieraus berechnet sich nach der Formel (4) das mittlere Gesamtrisiko

$$M = \sqrt{103\,120\,000} = 10155 \text{ Frcs.}$$

und daraus nach Formel (3*) das durchschnittliche Gesamtrisiko

$$R = 0{,}39894 \cdot 10155 = 4051 \text{ Frcs.}$$

Da nun die gesamte Einnahme des Unternehmers

$$300 \cdot 40 + 200 \cdot 30 + 400 \cdot 20 + 600 \cdot 10 = 32000 \text{ Frcs.}$$

beträgt, so macht das mittlere Risiko beiläufig $31\frac{3}{4}$, das durchschnittliche $12\frac{7}{10}\%$ der Einnahme aus. Wollte also der Unternehmer einen dem mittleren Risiko gleichkommenden Sicherheitsfond gründen, — und er hätte dann die Wahrscheinlichkeit 0,68267, daß er damit ausreichen werde — so müßte er bei gleichmäßiger Aufteilung auf die Teilnehmer deren Einsätze um je $31\frac{3}{4}\%$ erhöhen.

Bei zehnfacher Anzahl der Verträge in jeder Gruppe würde das mittlere (und das durchschnittliche) Risiko nur $\sqrt{10}$-mal, die Einzahlung aber 10-mal größer; der Prozentsatz verminderte sich dadurch im Verhältnisse $\sqrt{10}:10$ und betrüge bezüglich des mittleren Risiko nur noch 9,6, bezüglich des durchschnittlichen 3,9%.

§ 3. Die moralische Erwartung.

116. Die Hypothese von Daniel Bernoulli. Die Beurteilun vom Zufall abhängiger Unternehmungen auf Grundlage des Prinzip der mathematischen Erwartung richtet sich lediglich nach den mög lichen Gewinnsummen und Verlusten und nach den Wahrscheinlich keiten, mit welchen sie zu erwarten sind, und sieht von den persön lichen Verhältnissen der Beteiligten völlig ab; sie verdient deshal die Bezeichnung einer objektiven Beurteilung.

In der Wirklichkeit jedoch hält jede Person die Gewinnaussichte und Verlusterwartungen ihren Verhältnissen gegenüber, und wi mannigfach diese auch sein mögen, die Vermögenslage der Perso wird dabei immer eine Rolle spielen.

Daniel Bernoulli[1]) war der erste, welcher auf den Unterschie zwischen dem physischen Werte einer Geldsumme und dem mit ih verbundenen Vorteile, dem durch sie geschaffenen Nutzen, den er i Geld ausgedrückt als den relativen oder moralischen Wert der physischen gegenüberstellte, und auf den Einfluß aufmerksam wurd den das Vermögen der Person auf die Bildung dieses Wertes ausüb Er stellte hierüber die folgende Hypothese auf:

Der aus einem beliebig kleinen Vermögenszuwachs resultieren Vorteil, oder sein moralischer Wert, ist dem Zuwachs selbst direkt, de vorhandenen Vermögen umgekehrt proportional.

Erfährt also das momentane Vermögen x einer Person den Zu wachs dx, so ist der moralische Wert dieser Änderung

$$dy = k\frac{dx}{x}, \qquad ($$

wobei k eine von den sonstigen Umständen der Person abhäng Konstante bedeutet. Hat sich das Vermögen von dem Anfangswert durch derlei kleine Änderungen in den Endbetrag x umgewandelt, ist der moralische Wert dieser endlichen Änderung

$$y = k\int_a^x \frac{dx}{x} = kl\cdot\frac{x}{a}\,.$$

Bernoulli hat über die Beurteilung des Vermögens einer Per solche Bestimmungen aufgestellt, welche die Fälle $a = 0$ und $a <$ ausschließen. So erblickt er Vermögen auch in der Fähigkeit ei nichts oder gar nur Schulden besitzenden Menschen, seine Exist

1) Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis. Comm. Ac. Petropol. 1738. Deutsch mit Noten von A. Pringsheim und einer Einleitung v L. Fick. Leipzig, 1896.

durch Arbeit oder selbst durch Betteln zu erhalten; denn ein solcher würde auch gegen eine gewisse Geldsumme, gegen Bezahlung der Schulden und ein darüber hinausgehendes Geschenk auf die Ausübung jener Tätigkeit nicht verzichten wollen.

Die Formel (2) gibt y positiv oder negativ, jenachdem ein Vermögenszuwachs ($x > a$) oder eine Vermögensabnahme ($x < a$) stattgefunden hat.

Zu der Hypothese selbst ist zu bemerken, daß ihr erster Teil, wonach der Vorteil dem Zuwachs selbst proportional ist, wohl nicht angefochten werden kann; auch daß der Vorteil mit der Größe des bereits vorhandenen Vermögens abnehme, dürfte in den meisten Fällen zutreffen; daß er aber dieser Größe geradezu umgekehrt proportional sei, ist ohne Zweifel eine willkürliche Festsetzung, für deren Zulässigkeit nur die Übereinstimmung ins Feld geführt werden kann, welche zwischen den aus der Hypothese abgeleiteten Resultaten und den Eingebungen des gemeinen Verstandes besteht.

Warum er annimmt, daß das Vermögen einer Person immer nur durch successives Hinzutreten unendlich kleiner Elemente stetig sich vermehre, erklärt Bernoulli mit der Rücksichtnahme auf leichteres Verständnis. Die Wirkung dieser Annahme liegt aber hauptsächlich in der Vereinfachnng der Rechnungen.

117. Die moralische Erwartung. Bezüglich der Beurteilung eines vom Zufall abhängigen Unternehmens auf Grund seiner Hypothese stellt Bernoulli die Regel auf, daß man aus den relativen oder moralischen Werten der einzelnen in Aussicht stehenden Gewinne und Verluste mittels der ihnen zukommenden Wahrscheinlichkeiten den Mittelwert zu bilden und sodann die diesem Mittelwert entsprechende Änderung des ursprünglichen Vermögens zu bestimmen habe; diese sei ein Wertmaß für das betreffende Unternehmen in Ansehung der betrachteten Person. Diese Größe ist es, welche später, von Laplace[1]), als *moralische Hoffnung* oder Erwartung bezeichnet worden ist.

Die Durchführung des entwickelten Gedankens stellt sich wie folgt dar.

Einer Person, deren Vermögen den Wert a hat, stehen die Vermögensänderungen $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ mit den bezüglichen Wahrscheinlichkeiten $p, q, r, \cdots$ bevor; Gewinne werden positiv, Verluste negativ in Rechnung gebracht; mit der Festsetzung, daß $p + q + r + \cdots = 1$ sein soll, wird ausgesagt, daß von den Änderungen nur eine wirklich eintreten kann und auch eintreten muß.

Die relativen Werte jener Änderungen sind

$$kl \cdot \frac{a+\alpha}{a}, \quad kl \cdot \frac{a+\beta}{a}, \quad kl \cdot \frac{a+\gamma}{a}, \quad \cdots;$$

1) Théorie analyt. d. prob., p. 432.

der Mittelwert dieser Beträge ist

$$pkl \cdot \frac{a+\alpha}{a} + qkl \cdot \frac{a+\beta}{a} + rkl \cdot \frac{a+\gamma}{a} + \cdots$$

d. i.

$$kl \cdot \frac{(a+\alpha)^p (a+\beta)^q (a+\gamma)^r + \cdots}{a};$$

ist h die Vermögensänderung, die eine diesem Mittelwerte gleiche relative Bedeutung besitzt, so besteht die Gleichung:

$$kl \cdot \frac{a+h}{a} = kl \cdot \frac{(a+\alpha)^p (a+\beta)^q (a+\gamma)^r + \cdots}{a},$$

aus welcher sich die moralische Erwartung

$$h = (a+\alpha)^p (a+\beta)^q (a+\gamma)^r + \cdots - a \tag{3}$$

ergibt.

Sind die Beträge $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ sehr klein im Vergleich zu a, und beschränkt man sich bei der Entwicklung von

$$\frac{h}{a} = \left(1+\frac{\alpha}{a}\right)^p \left(1+\frac{\beta}{a}\right)^q \left(1+\frac{\gamma}{a}\right)^r \cdots - 1$$

auf die ersten Potenzen der sehr kleinen echten Brüche $\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{a}, \frac{\gamma}{a}, \cdots$ so wird

$$\frac{h}{a} = p\frac{\alpha}{a} + q\frac{\beta}{a} + r\frac{\gamma}{a} + \cdots$$

und

$$h = p\alpha + q\beta + r\gamma + \cdots;$$

d. h. je größer das Vermögen der Person im Vergleich zu den erwarteten Gewinnsummen und Verlusten ist, um so näher kommt die moralische Hoffnung der mathematischen.

118. Folgerungen aus dem Begriff der moralischen Erwartung.

1. Auch ein nach den Regeln der mathematischen Hoffnung geregeltes Unternehmen ist für jeden der Beteiligten von moralischem Nachteil.

Betragen in einem Glückspiele oder einer Wette die Einsätze der Partner α, β, sind $p, q = 1-p$ für sie die Wahrscheinlichkeiten zu gewinnen, und ist a das Vermögen des ersten Partners, so ist seine moralische Hoffnung

$$h = (a+\beta)^p (a-\alpha)^q - a.$$

Ist nun das Spiel mathematisch geregelt, also $p\beta = q\alpha$, so kann p durch $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, q durch $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ ersetzt und deshalb

$$h = \left[(a+\beta)^\alpha (a-\alpha)^\beta\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} - a$$

geschrieben werden. Nun ist aber das geometrische Mittel einer Anzahl von Größen kleiner als das arithmetische[1]), folglich

$$[(a+\beta)^\alpha (a-\alpha)^\beta]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} < \frac{\alpha(a+\beta)+\beta(a-\alpha)}{\alpha+\beta} = a,$$

daher

$$h < 0.$$

2. Ein Kaufmann, dessen Vermögen a ist, realisiert eine Summe α, wenn ein Warenschiff glücklich einläuft, was mit der Wahrscheinlichkeit p zu erwarten sein möge. Seine Verlusterwartung ist $(1-p)\alpha$, und gegen eine ihr gleiche Prämie möge er sich bei einer Anstalt gegen den Verlust versichern. Daß diese Versicherung für ihn von Vorteil ist, zeigt folgende Überlegung.

Schließt er sie ab, so ist der Vermögenszuwachs

$$\alpha - (1-p)\alpha = p\alpha$$

sicher, und dieser hat für ihn den moralischen Wert

$$kl \cdot \frac{a+p\alpha}{a};$$

schließt er die Versicherung nicht ab, so hat er den Vermögenszuwachs α mit der Wahrscheinlichkeit p zu erwarten, und der moralische Wert hiervon ist

$$pkl \cdot \frac{a+\alpha}{a};$$

nun ist aber

$$\frac{a+p\alpha}{a} > \left(\frac{a+\alpha}{a}\right)^p,$$

---

1) Man denke sich eine Zahl S in n Teile $x, y, z, \cdots$ geteilt und bilde deren Produkt $xyz\cdots$; sobald in diesem zwei Faktoren ungleich sind, etwa x, y, kann man es dadurch vergrößern, daß man diese ungleichen Faktoren jeden durch ihr arithmetisches Mittel $\frac{x+y}{2}$ ersetzt, weil $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 > xy$ ist; man kann so mit der Vergrößerung des Produktes fortfahren, so lange zwei ungleiche Faktoren darin vorkommen; den größten Wert nimmt daher das Produkt an, wenn alle Faktoren gleich und $= \frac{x+y+z+\cdots}{n}$ werden; somit ist

$$xyz\cdots < \left(\frac{x+y+z+\cdots}{n}\right)^n$$

und daraus

$$(xyz\cdots)^{\frac{1}{n}} < \frac{x+y+z+\cdots}{n}. \qquad (4)$$

Im obigen Falle besteht das Produkt aus α Faktoren $a+\beta$ und β Faktoren $a-\alpha$.

weil[1])

$$a + p\alpha > (a + \alpha)^p a^{1-p}$$

ist; die Versicherung ist also tatsächlich von Vorteil.

Sie bleibt es auch dann noch, wenn zu der Versicherungsp $(1 - p)\alpha$ ein Zuschlag z kommt, so lange dieser eine gewisse G nicht überschreitet. Diese Grenze bestimmt sich aus der Glei

$$\frac{a + p\alpha - z}{a} = \left(\frac{a + \alpha}{a}\right)^p,$$

welche erfüllt sein muß, damit die nunmehr geltenden relativen

$$kl\frac{a + p\alpha - z}{a} \quad \text{und} \quad pkl\frac{a + \alpha}{a}$$

einander gleich seien; sie gibt

$$z = a + p\alpha - (a + \alpha)^p a^{1-p}.$$

Hätte z. B. ein Kaufmann, dessen Vermögen $a = 5043$ Frc trägt, eine Schiffsladung im Werte $\alpha = 10000$ Frcs. unterwegs betrüge die Wahrscheinlichkeit, mit welcher Schiffe der betreff Linie glücklich einlaufen, $\frac{19}{20}$, so wäre die mathematische Ver rungsprämie $\frac{1}{20} \cdot 10000 = 500$ Frcs.; ohne daß die Versicherun ralisch nachteilig wird, verträgt diese Prämie einen Zuschla zur Höhe

$$z = 5043 + \frac{19}{20} \cdot 10000 - 15043^{\frac{19}{20}} \cdot 5043^{\frac{1}{20}},$$

d. i.

$$z = 300 \text{ Frcs. oder } 60\% \text{ der Prämie}^{2)}.$$

3. Es ist moralisch vorteilhafter, eine gefährdete Summ mehrere gleichartige Gefahren zu verteilen, statt sie ungeteilt solchen Gefahr auszusetzen[3]).

Wir begnügen uns, dies für die gleichmäßige Aufteilung au Gefahren nachzuweisen.

---

1) Macht man in (4) m Faktoren gleich $a + \alpha$, $n - m$ Faktoren gl und richtet die Zahlen m, n so ein, daß $\frac{m}{n} = p$ wird, so ergibt sich

$$\left[(a + \alpha)^m a^{n-m}\right]^{\frac{1}{n}} < \frac{m(a + \alpha) + (n - m)a}{n},$$

d. h.

$$(a + \alpha)^p a^{1-p} < a + p\alpha.$$

2) Vgl. § 15 des Specimen.

3) Crofton (Encycl. Brit. XIX, 1885, Art. 25) bemerkt, die Sentenz nicht gut, alle Eier in ein Nest zu legen" sei eine sprichwörtliche Anerk dieses Prinzips.

Erwartet ein Kaufmann, dessen Vermögen a ist, ein Gut von dem Werte α mit einem Schiff, dessen glückliches Eintreffen mit der Wahrscheinlichkeit p zu erhoffen ist, so ist der moralische Wert dieser Erwartung proportional

$$l \cdot (a+\alpha)^p a^q;$$

hätte er die Ladung auf zwei Schiffe dieser Art zu gleichen Teilen verteilt, so hätte er mit der Wahrscheinlichkeit p^2 das Eintreffen des ganzen Gutes, mit der Wahrscheinlichkeit $2pq$ das Eintreffen der Hälfte und mit der Wahrscheinlichkeit q^2 den Verlust des Ganzen zu erwarten; der moralische Wert dieser Erwartung ist proportional dem

$$l \cdot (a+\alpha)^{p^2}\left(a+\frac{\alpha}{2}\right)^{2pq} a^{q^2}.$$

Nun ist tatsächlich

$$(a+\alpha)^{p^2}\left(a+\frac{\alpha}{2}\right)^{2pq} a^{q^2} > (a+\alpha)^p a^q;$$

denn aus diesem Ansatze folgt

$$(a+\alpha)^{p^2-p}\left(a+\frac{\alpha}{2}\right)^{2pq} a^{q^2-q} > 1$$

oder

$$(a+\alpha)^{-pq}\left(a+\frac{\alpha}{2}\right)^{2pq} a^{-pq} > 1$$

oder

$$\frac{\left(a+\frac{\alpha}{2}\right)^{2pq}}{(a+\alpha)^{pq} a^{pq}} > 1$$

und dies ist richtig, weil wegen

$$\left(a+\frac{\alpha}{2}\right)^2 > (a+\alpha)\,a$$

auch

$$\frac{\left(a+\frac{\alpha}{2}\right)^2}{(a+\alpha)\,a} > 1$$

ist[1]).

119. Das Petersburger Problem. Daniel Bernoulli wurde zur Aufstellung der Lehre von der moralischen Hoffnung durch eine spezielle Aufgabe geführt, die ihm sein Oheim Nicolaus Bernoulli vorlegte, nachdem er sie früher schon (1713) Montmort[2]) gestellt hatte. Es ist dies das *Petersburger Problem*, so genannt wegen seiner

---

1) Laplace, Théor. analyt. d. prob., p. 435 ff., hat den Nachweis für eine beliebige Anzahl gleicher Teile gegeben.

2) Essai d'analyse sur les jeux de hazard (1714), p. 402.

Veröffentlichung in den Akten der Petersburger Akademie, das wi folgt lautet: „Peter wirft eine Münze so lange, bis sie Wappen zeigt geschieht dies beim ersten Wurfe, so hat er Paul 1 Dukaten zu geben; wenn erst beim zweiten Wurfe, 2 Dukaten; wenn erst beim dritten Wurfe, 4 Dukaten, und so bei jedem späteren Wurfe doppel so viel, als wenn es im vorangehenden geschehen wäre. Wie groß ist die mathematische Erwartung Pauls?"

Die Rechnung gibt, da die Wahrscheinlichkeit der bezeichnete Fälle $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$ ist, für die Erwartung Pauls

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \cdots,$$

wenn, wie es dem Wortlaute der Aufgabe entspricht, das Spiel un begrenzt fortsetzbar gedacht wird, einen unendlichen Wert, forder daher auch einen unendlich großen Einsatz von Paul, und dies steht wenn es überhaupt einen vernünftigen Sinn hat, mit der Erkenntni im Widerspruche, daß niemand auf die Gewinnaussicht, welche da Spiel eröffnet, einen nur einigermaßen erheblichen Einsatz leiste möchte.

D. Bernoulli suchte nun diesen Widerspruch durch die An wendung des Begriffes der moralischen Hoffnung zu lösen, indem e zeigte, daß diese bei einem noch so großen Vermögen Pauls eine endlichen Wert besitzt und daher nur einen beschränkten Einsatz a vernünftig erscheinen läßt.

Die moralische Hoffnung Pauls, wenn sein Vermögen a ist, drüc sich nämlich aus durch

$$h = (a+1)^{\frac{1}{2}} (a+2)^{\frac{1}{4}} (a+4)^{\frac{1}{8}} \cdots - a,$$

und dieser Wert ist endlich, weil das unendliche Produkt

$$P(a) = \prod_{1}^{\infty} (a + 2^{n-1})^{\frac{1}{2^n}}$$

für jeden Wert von a konvergiert. Zunächst gilt dies von

$$P(0) = \prod_{1}^{\infty} 2^{\frac{n-1}{2^n}},$$

weil

$$l \cdot P(0) = l \cdot 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} = \frac{l \cdot 2}{2^2} \left(1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots\right) = l \cdot 2,$$

wenn man bemerkt, daß die Reihe die Entwicklung von $\left(1 - \frac{1}{2}\right)$ vorstellt. Da weiter

$$\frac{P(a)}{P(0)} = \frac{1}{2}P(a) = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{a}{2^{n-1}}\right)^{\frac{1}{2^n}} < \prod_1^\infty (1+a)^{\frac{1}{2^n}}$$

$$= (1+a)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots} = 1 + a$$

ist, so hat man $P(a) < 2(1+a)$, wodurch die Konvergenz bewiesen ist[1]).

Bezeichnet man mit x die Grenze, bis zu welcher Paul mit seinem Einsatz gehen darf, ohne einen moralischen Nachteil zu haben, so bestimmt sich x aus der Gleichung

$$(a-x+1)^{\frac{1}{2}}(a-x+2)^{\frac{1}{4}}(a-x+4)^{\frac{1}{8}}\cdots - a = 0;$$

setzt man $a - x = a'$, so wird

$$x = (a'+1)^{\frac{1}{2}}(a'+2)^{\frac{1}{4}}(a'+4)^{\frac{1}{8}}\cdots - a';$$

da aber bei einigermaßen großem a' das Verhältnis von x zu a' klein ausfällt, a' also wenig verschieden ist von a, so ist genau genug

$$x = (a+1)^{\frac{1}{2}}(a+2)^{\frac{1}{4}}(a+4)^{\frac{1}{8}}\cdots - a$$

oder für die Rechnung zweckmäßiger

$$\frac{x}{a} = \left(1+\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{4}{a}\right)^{\frac{1}{8}}\cdots - 1.$$

Man findet beispielsweise, wenn $a = 100$, für x den Wert 4,36 (es genügen die 15 ersten Faktoren), und wenn $a = 1000$, $x = 6$.

Es entsteht aber die Frage, ob es erst der Theorie der moralischen Hoffnung bedurfte, um das Paradoxe an der Lösung zu beheben. Diese Frage ist zu verneinen. Der Grund des sinnlosen Resultates: ein unendlich großer Einsatz — liegt schon in der Stellung der Aufgabe, welche ein Spiel betrifft, das möglicherweise niemals endet und möglicherweise von Peter die Auszahlung einer Gewinnsumme fordert, die größer als jeder noch so große Betrag, die in der Sprache der Analysis unendlich ist; das aber sind bloße Worte ohne realen Sinn. Die Aufgabe enthält also von Hause aus eine Bestimmung, die in ihren Konsequenzen zu Ungereimtheiten führt.

Soll das Spiel einen vernünftigen Sinn haben, so muß es auf eine Maximalzahl von Würfen beschränkt werden, und diese Beschränkung muß vernünftigerweise so getroffen werden, daß Peter imstande sei, alle Gewinnsummen, die sich ergeben können, auch

1) Pringsheim l. c., Note 12.

wirklich auszuzahlen. Dann aber verliert sich alles Auffällige und ergeben sich Einsätze, gegen die nichts einzuwenden ist.

Ist n die Maximalzahl der Würfe, so ist 2^{n-1} der Gewinn, wenn Wappen erst im letzten Wurfe fallen sollte; geschähe es auch da nicht, so hätte Peter im Sinne der Spielregeln Paul den Betrag 2^n zu geben als den kleinsten Gewinn, den dieser erlangen müßte; folglich wäre Pauls Einsatz

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2+\cdots+\frac{1}{2^n}\cdot 2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\cdot 2^n=\frac{n}{2}+1.$$

Angenommen, Peter besäße 1 Million Dukaten, so wäre der höchste Gewinn, den er auszahlen kann, $524068 = 2^{19}$, und es hätte keinen Sinn, mehr als 20 Würfe zu vereinbaren; Pauls Einsatz aber bemißt sich dann mit $10\frac{1}{2}$ Dukaten[1]).

120. Über die Bedeutung der Bernoullischen Hypothese. Die Lehre von der moralischen Hoffnung ist gewiß nicht geeignet, Unternehmungen, die auf zufälligen Ereignissen aufgebaut sind, zu regeln; dazu gibt das Prinzip der mathematischen Hoffnung die allein richtige Grundlage. Wenn es sich aber darum handelt, verschiedene Unternehmungen in ihren Wirkungen auf die Vermögenslage *einer* Person zu vergleichen, kann von ihr Gebrauch gemacht werden, und da führt sie, wie gezeigt worden, zu Resultaten, welche mit den Eingebungen des gemeinen Verstandes harmonieren; wäre ihre Leistung keine andere, als das mathematisch zu begründen, was die gesunde Überlegung an die Hand gibt, so hätte sie schon einen unbestreitbaren Wert.

Aber die Bedeutung der Theorie, insbesondere der ihr zu grunde liegenden Hypothese, reicht weiter. Diese Hypothese ist zur *Grundlage der modernen Wertlehre* geworden[2]).

Die ältere Wertlehre betrachtete den Wert eines Gutes als eine ihm innewohnende Eigenschaft. Diese Auffassung stammte daher, daß man sich bloß an den Tauschwert hielt und annahm, Güter, welche gegen einander vertauscht werden, müßten gleichwertig sein, eine irrige Anschauung, da ja bei wirklicher Gleichwertigkeit kein Anlaß zum Tausche vorhanden wäre.

Die moderne Wertlehre, fast gleichzeitig begründet durch Jevons, Menger und Walras, betrachtet den Wert eines Gutes als eine Beziehung zwischen einem einzelnen wirtschaftenden Subjekt und dem Gute; nach dieser Auffassung läßt sich der Wertbegriff von der Vorstellung einer bestimmten Menge des Gutes nicht loslösen. Aus

1) Vgl. Pringsheim l. c., Note 10. — Weiteres zur Geschichte des Petersburger Problems s. d. Verf.s Abhandl. in Grunerts Arch. 77 (1881).

2) S. Ficks Einleitung zur deutschen Ausgabe des Specimen.

diesem Zusammenhange geht aber der für diese Theorie grundlegende Begriff des *Grenznutzens* hervor. Hierunter wird jener Nutzen verstanden, den der letzte zur Verfügung stehende Teil des Vorrates an einem Gute für ein bestimmtes wirtschaftendes Subjekt hat, und nach ihm bemißt sich der Wert einer Mengeneinheit des Gutes für das betreffende Subjekt.

Der Grundgedanke der neuen Auffassung, wonach der Wert einer neu hinzutretenden Einheit eines Gutes als eine abnehmende Funktion der Anzahl der bereits im Besitze befindlichen Einheiten sich darstellt, ist in der Bernoullischen Hypothese enthalten und hier zum ersten Male ausgesprochen worden; Bernoulli ging noch weiter, indem er über die Natur dieser Funktion eine bestimmte Annahme machte, die sich vielfach als zutreffend erwiesen hat. Hermann[1]) war wohl der erste Nationalökonom, der auf diese Bedeutung der Hypothese hingewiesen hat.

Sie ist indessen auch auf andere Gebiete übertragen worden, so von Fechner[2]) auf das Gebiet der Psychophysik, auf die Lehre von den Reizen und den durch sie hervorgerufenen Empfindungen; Friedr. Alb. Lange[3]) hat ihre Anwendbarkeit auf die Behandlung sozialer und politischer Probleme gezeigt.

1) Staatswirtschaftliche Untersuchungen. München 1832, p. 73.
2) Elemente der Psychophysik. Leipzig 1860, I, p. 230; II, p. 10.
3) Die Arbeiterfrage. Winterthur 1875, p. 113.

Zweiter Teil.

Ausgleichungsrechnung.

I. Abschnitt. Theorie der Beobachtungsfehler.

§ 1. Das Fehlergesetz.

121. Ziel der Ausgleichungsrechnung. Wenn zur Bestimmung einer oder mehrerer unbekannter Größen Messungen in der gerade notwendigen Anzahl ausgeführt werden, so bieten die Ergebnisse kein Mittel dar, um zu beurteilen, wie weit die aus ihnen abgeleiteten Werte der Unbekannten von den Beobachtungsfehlern beeinflußt sein können.

Sobald die Menge der ausgeführten Messungen das Maß des Notwendigen überschreitet, machen sich zwischen ihrem Ergebnisse *Widersprüche* bemerkbar, die ihren Grund in den Beobachtungsfehlern haben. Will man *alle* Beobachtungen zur Bestimmung der Unbekannten heranziehen, so stellt sich ein eigenartiges Problem ein: Die Ergebnisse der Messungen so zu kombinieren, daß die Bestimmung der Unbekannten eindeutig werde; dies erfordert, damit die Widersprüche zu bestehen aufhören, Abänderungen an den Beobachtungsresultaten oder, wie man dies zu bezeichnen pflegt, eine *Ausgleichung der Beobachtungen*.

Zur Erläuterung mögen die folgenden Beispiele dienen.

Sind zur Bestimmung einer physischen Größe mehrere unmittelbare oder *direkte* Messungen gemacht worden, so äußert sich der Widerspruch in der Ungleichheit der einzelnen Ergebnisse. Hat man diese Ergebnisse zur Gewinnung eines Wertes jener Größe irgendwie kombiniert, so erfordert die Aufhebung der Widersprüche, daß man an jedem Messungsresultate eine Korrektur anbringe, welche es dem aus der Kombination gewonnenen Werte der Unbekannten gleich macht.

Sind, um einen andern Fall zu betrachten, zwischen n von einem Punkte ausgehenden horizontalen Richtungen mehr als $n - 1$ Winkel gemessen worden, so werden sich einzelne der Winkel aus den ge-

messenen Winkeln auf verschiedene Weise ableiten lassen, und in der Nichtübereinstimmung der Resultate äußern sich die Widersprüche. Wieder wird es sich darum handeln, alle Messungen zu einer eindeutigen Bestimmung der gegenseitigen Lage der n Strahlen zu kombinieren, und dies wieder wird mit einer Ausgleichung der Messungsergebnisse einhergehen.

Wurden in einem ebenen Dreieck alle drei Winkel gemessen, so werden die Ergebnisse der Messung vermöge der ihnen anhaftenden Fehler die von der Theorie geforderte Bedingung, zu 180° sich zu ergänzen, im allgemeinen nicht erfüllen; damit dieser Widerspruch mit der Theorie aufhöre, werden an den Messungsergebnissen Änderungen anzubringen sein, welche ihnen die Eigenschaft, die Winkel eines Dreiecks darstellen zu können, erst verleihen.

Wir kehren nun zur allgemeinen Betrachtung zurück. Die in dem Problem verlangte Kombination der Beobachtungen hat zunächst nur die eine Forderung zu erfüllen, daß sie zu einer eindeutigen Bestimmung der Unbekannten führe. Dadurch ist aber die Methode ihrer Durchführung nach noch nicht gegeben, wird es auch dann nicht, wenn man die weitere Forderung hinzufügt, es sei unter allen Kombinationen die *vorteilhafteste* zu wählen. Denn dazu wäre ein mathematisch verwendbares Maß für die Beurteilung der Vorteilhaftigkeit einer Kombination erforderlich; ein solches aber läßt sich a priori nicht angeben.

Es liegt nahe, zu sagen, die vorteilhafteste unter allen Kombinationen sei diejenige, welche die Unbekannten mit den kleinstmöglichen Fehlern behaftet gibt. Da aber der Fehler einer Beobachtung selbst unbekannt ist, so wird man wenigstens Kenntnis darüber zu erlangen suchen, mit welcher Wahrscheinlichkeit er innerhalb bezeichneter Grenzen enthalten ist, um dann das Urteil über die größere oder geringere Vorteilhaftigkeit einer Methode auf die größere oder kleinere Wahrscheinlichkeit stützen zu können, daß der Fehler der Unbekannten, wenn sie nach dieser Methode abgeleitet wird, zwischen gewissen Grenzen eingeschlossen sei. Dadurch wäre das Problem auf das Gebiet der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* übergeführt und es bedürfte nur noch einer apriorischen Festsetzung über die Beziehung zwischen der Güte eines Messungsresultates und dem System der Fehler, welchen es unterworfen sein *kann*.

Dieser Gedankengang würde aber zu seiner strengen Durchführung erfordern, daß man die einzelnen störenden Ursachen auf ihre Wirksamkeit derart erforsche, um die Wahrscheinlichkeit angeben zu können, daß einer Beobachtung ein Fehler von bestimmter Größe zukomme. Eine solche Einsicht in die Entstehung der Fehler zu erlangen erweist sich aber als unmöglich; daher ist auch eine exakte Begründung der Theorie der Kombination von Beobachtungen in dem

gedachten Sinne, nämlich aus dem *genauen* Gesetz der Wahrsche lichkeit der Beobachtungsfehler, untunlich.

Wohl aber ist es möglich, eine solche Theorie auf ein allgemei *approximatives* Fehlergesetz zu stützen.

Neben der Bestimmung der Werte der unbekannten Größen g noch eine andere Aufgabe der Ausgleichungsrechnung einher, nämlich, aus den aufgetretenen Widersprüchen oder aus den an Beobachtungsergebnissen zum Zwecke ihrer Ausgleichung anzubring den Korrektionen auf die *Genauigkeit* der Beobachtungen selbst der aus ihnen abgeleiteten Resultate zu schließen.

122. Entstehung der Fehler und ihre Einteilung. Üb die Entstehung der Beobachtungsfehler läßt sich zunächst mit Sich heit nur aussagen, daß sie aus dem Zusammenwirken vieler Ursach hervorgehen, die, wenigstens zum großen Teil, unabhängig von e ander sind. Je komplizierter der zur Messung verwendete Appa je mehr Einzelvorgänge zur Ausführung einer Beobachtung notwen sind, um so größer die Anzahl der störenden Einflüsse.

Bei jeder Gattung von Beobachtungen wird sich eine Gruppe v Ursachen erkennen lassen, welche das Resultat in *systematischer* We beeinflussen, derart, daß ihre Wirkung in angebbarer Weise von wissen Umständen abhängt. Solche Ursachen erzeugen *regelmäß* oder *systematische Fehler*. So wird bei der Messung einer gera Linie durch successives Auftragen eines Maßstabes ein systematisc Fehler daraus entspringen, daß der Maßstab nicht genau in die Ri tung der Geraden gebracht wird, die Länge der Geraden wird dadu immer zu groß gefunden; die wechselnde Temperatur des Meßstal während der Messung zieht gleichfalls einen regelmäßigen Fehler na sich, weil der Einfluß dieser Ursache sich mit der Temperatur sys matisch ändert. An einem Winkelmeßinstrumente (Theodolith) w jede bleibende Abweichung der einzelnen Bestandteile von den theo tischen Voraussetzungen die Quelle systematischer Fehler sein. Es Sache des Beobachters, derlei systematisch wirkende Fehlerursach sei es durch Berichtigung des Instruments, sei es durch entspreche Anordnung der Beobachtungen oder durch Berechnung des Einflus wenigstens bis auf kleine, der Wahrnehmung sich entziehende Re unschädlich zu machen.

Dann bleibt immer noch eine meist große Anzahl von Ursach teils in den verwendeten Beobachtungsmitteln, teils in Mängeln Wahrnehmungsvermögens, teils in äußern die Messung begleiten Umständen gelegen, deren Wirksamkeit insofern das Merkmal *Zufälligen* an sich trägt, als sich über die jeweilige Größe des E flusses und darüber, ob er in dem einen oder andern Sinne von Wahrheit ablenkt, eine bestimmte Aussage nicht machen läßt. aus solchen Ursachen entspringenden Fehler werden als *unregelmäß*

oder *zufällige Fehler* bezeichnet. Sie sind es, welche den Gegenstand der allgemeinen Fehlertheorie bilden.

Über das Auftreten der zufälligen Fehler lehrt die *Erfahrung* in großen Zügen zweierlei: daß positive und negative Fehler nahe gleich häufig und kleine Fehler häufiger auftreten als die größeren, so daß bei jeder Art von Beobachtungen Fehler über eine gewisse Größe hinaus — wenn man von groben *Irrungen* absieht — nicht zu erwarten sind.

Diese Tatsachen lassen sich aus der Annahme des Zusammenwirkens mehrerer unabhängiger Fehlerursachen unschwer erklären[1]).

Angenommen, es würden bei einer Art von Beobachtungen drei Ursachen tätig sein, welche mit gleicher Leichtigkeit folgende Fehler erzeugen:

1. Ursache: $-2, \; -1, \; 0$
2. Ursache: $-1, \; 0, \; 1$
3. Ursache: $-1, \; 0, \; 1, \; 2, \; 3.$

Durch ihre Kombination können die Fehler

$$-4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \qquad (\alpha)$$

im Resultate entstehen und zwar beziehungsweise auf

$$1 \quad 3 \quad 6 \quad 8 \quad 9 \quad 8 \quad 6 \quad 3 \quad 1$$

verschiedene Arten; so kommt z. B. der Fehler 0 auf folgende Arten zustande:

$$\begin{array}{rrr} -2, & -1, & 3 \\ -2, & 0, & 2 \\ -2, & 1, & 1 \\ -1, & -1, & 2 \\ -1, & 0, & 1 \\ -1, & 1, & 0 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & -1. \end{array}$$

Schon hier erkennt man die rasche Abnahme der Wahrscheinlichkeit und daher auch der zu erwartenden relativen Häufigkeit der Fehler mit der Zunahme des Betrages der letzteren.

Wären bei einer Gattung von Beobachtungen acht unabhängige Ursachen wirksam, deren jede einen Fehler aus der Reihe (α)

1) P. Pizzetti, I fondamenti matematici per la critica dei risultati sperimentali. Atti della R. Università di Genova 1892, p. 121.

mit gleicher Leichtigkeit hervorbringen kann, so würden sich die $9^8 = 43046721$ möglichen Verbindungen der Einzelfehler auf die nun möglichen Werte des Resultatsfehlers von -32 bis $+32$ beiläufig wie folgt verteilen:

rund 2300000	auf den Fehler 0					
1500000	auf jeden der Fehler	-5	und	$+5$,
950000	„ „ „ „	-10	„	$+10$,
300000	„ „ „ „	-15	„	$+15$,
50000	„ „ „ „	-20	„	$+20$,
3500	„ „ „ „	-25	„	$+25$,
36	„ „ „ „	-30	„	$+30$,
1	„ „ „ „	-32	„	$+32$.

Die große Anzahl der Entstehungsarten der kleinen Fehler gegenüber der geringen Menge bei den großen Fehlern erklärt sich daraus, daß jene nicht blos aus kleinen Einzelfehlern, sondern auch aus den größeren und großen hervorgehen können, wenn diese sich vermöge ihrer Vorzeichen zum großen Teil tilgen, während die großen Resultatsfehler nur aus großen Einzelfehlern vorherrschend gleichen Zeichens entstehen können.

Aus dieser Betrachtung geht die Erkenntnis hervor, daß die *relative Häufigkeit*, mit welcher Fehler eines gewissen Größenintervalls in einer großen Anzahl von Beobachtungen zu erwarten sind, mit der Größe der Fehler in einem Zusammenhange steht.

Wir gehen nun daran, diesen Zusammenhang, das *Fehlergesetz*, approximativ darzustellen aus der Annahme, daß der Beobachtungsfehler sich aus einer großen Anzahl von *Elementarfehlern*, entspringend aus verschiedenen unabhängigen Ursachen, zusammensetze, deren jeder nur sehr kleiner absoluter Beträge fähig ist. Wir folgen dabei im wesentlichen dem Gedankengange M. W. Croftons[1]).

123. Ableitung des Fehlergesetzes aus der Hypothese der Elementarfehler. Es sei der Beobachtungsfehler x zusammengesetzt aus den Elementarfehlern

$$\varepsilon', \quad \varepsilon'', \quad \varepsilon''', \cdots,$$

welche der Reihe nach

$$n', \quad n'', \quad n''', \cdots$$

1) „On the proof of the law of errors of observations", Lond. Trans. 159 (1869) und „Probability", Encycl. Brit. 19 (1885). — Zur Geschichte der andern Ableitungen des Fehlergesetzes auf dieser Grundlage vgl. des Verf.s „Theorie der Beobachtungsfehler", 1891, p. 61—97, sowie dessen „Bericht" im Jahresber. d. deutschen Mathematiker-Vereinigung, VII (1899), p. 163 ff.

verschiedene Werte annehmen können. Dann ist

$$x = \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' + \cdots$$

selbst $n'n''n'''\cdots$ verschiedener Werte fähig. Statt dieses Produktes wollen wir eine für die ganze Untersuchung festbleibende Zahl N nehmen, jedoch so, daß die relative Häufigkeit der verschiedenen Werte von x dadurch nicht verändert wird.

Diese relative Häufigkeit sei durch

$$z = f(x) \tag{1}$$

ausgedrückt in dem Sinne, daß $z\,dx$ die Menge der Fehler bedeutet, welche in das Intervall $(x,\ x + dx)$ fallen. Dabei werde $f(x)$ als eine *analytische* Funktion vorausgesetzt.

Diese Voraussetzung entspricht allerdings nicht der Wirklichkeit; denn diese schließt es in jedem besonderen Falle aus, daß die Fehlergröße x als eine *stetige* Variable angesehen werde, da wir vermöge unseres begrenzten Wahrnehmungsvermögens und der begrenzten Teilung an den Instrumenten das Messungsresultat nur in gewissen Abstufungen zu *konstatieren* imstande sind. Soll aber eine alle Fälle umfassende Theorie aufgestellt werden, so bleibt nichts übrig, als sich mit gewissen Annahmen zufrieden zu geben, welche die Durchführung der Rechnung ermöglichen, und zu diesen Annahmen gehört auch die, daß nicht nur x eine stetige Variable, sondern auch $f(x)$ eine stetige nach der Taylorschen Formel entwickelbare Funktion sei.

Für N ergibt sich der analytische Ausdruck

$$N = \int_g^G f(x)\,dx\,,$$

wenn g die Summe der unteren, G die Summe der oberen Grenzen aller $\varepsilon^{(i)}$ vorstellt.

Es komme nun ein weiterer Elementarfehler ε hinzu, der fähig sein möge der n Werte $e',\ e'',\ \cdots$. Alle Fehler, welche aus Werten von x des Intervalls $(x,\ x + dx)$ durch Hinzufügung eines jeden Wertes von ε erzeugt werden, fallen in ein gewisses Intervall $(X,\ X + dX)$, wobei allgemein $X = x + \varepsilon$ ist; ihre Anzahl ist darstellbar durch

$$\{f(X - e') + f(X - e'') + \cdots\}\,dx,$$

ihre relative Häufigkeit, wenn man wieder auf die frühere Gesamtzahl N reduziert, durch

$$Z = \frac{1}{n}\,\{f(X - e') + f(X - e'') + \cdots\}\cdot$$

Beschränkt man sich bei der Entwicklung in der Klammer mit Rücksicht darauf, daß die Beträge der Elementarfehler als sehr klein

vorausgesetzt werden, auf die ersten und zweiten Potenzen von $e', e'', \cdots$, so stellt sich die relative Häufigkeit des Gesamtfehlers x nunmehr dar wie folgt:

$$Z = z - \frac{e' + e'' + e''' + \cdots}{n} z' + \frac{e'^2 + e''^2 + e'''^2 + \cdots}{2n} z'', \tag{2}$$

wobei z', z'' die erste und zweite Ableitung von $f(x)$ bedeuten.

Setzt man den mittleren Wert von ε:

$$\frac{e' + e'' + e''' + \cdots}{n} = \alpha, \tag{3}$$

den mittleren Wert seines Quadrates:

$$\frac{e'^2 + e''^2 + e'''^2 + \cdots}{n} = \beta, \tag{4}$$

so ist kürzer

$$Z = z - \alpha z' + \frac{\beta}{2} z''. \tag{2*}$$

Tritt ein weiterer Elementarfehler mit den charakteristischen Größen α_1, β_1 hinzu, so verwandelt er die relative Häufigkeit des Fehlers x in

$$Z_1 = Z - \alpha_1 Z' + \frac{\beta_1}{2} Z'';$$

da nun

$$\begin{aligned} Z &= z - \alpha z' + \frac{\beta}{2} z'' \\ Z' &= \quad\; z' - \alpha z'' \cdots \\ Z'' &= \quad\quad\; z'' \cdots, \end{aligned}$$

so ist, wenn man bei Größen der zweiten Kleinheitsordnung stehen bleibt,

$$Z_1 = z - (\alpha + \alpha_1) z' + \frac{\beta + \beta_1 + 2\alpha\alpha_1}{2} z''$$

oder

$$Z_1 = z - (\alpha + \alpha_1) z' + \frac{\beta + \beta_1 - \alpha^2 - \alpha_1^2 + (\alpha + \alpha_1)^2}{2} z''. \tag{5}$$

Es gehen also *irgend zwei* Elementarfehler in das Gesetz des zusammengesetzten Fehlers nur in den Verbindungen $\alpha + \alpha_1$, $\beta + \beta_1$, $\alpha^2 + \alpha_1^2$ ein; folglich werden *alle* Elementarfehler in dem Häufigkeitsgesetz des resultierenden Fehlers nur in den Verbindungen

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots &= a \\ \beta + \beta_1 + \beta_2 + \cdots &= b \\ \alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots &= c \end{aligned} \tag{6}$$

erscheinen, dieses Gesetz also die Form

$$z = F(x, a, b - c) \tag{7}$$

—

haben, da, wie in (5) zu bemerken, die Aggregate $\beta + \beta_1$ und $\alpha^2 + \alpha_1^2$ als Differenz auftreten.

Um zur Kenntnis der Funktion F zu gelangen, lasse man einen Elementarfehler hinzukommen, dessen Mittelwert da sei, während das mittlere Quadrat neben diesem außer Acht gelassen werden könne. Dann ist einerseits die Änderung der Häufigkeit von x:

$$d_a z = \frac{\partial z}{\partial a} da,$$

andererseits laut (2*):

$$d_a z = -\frac{\partial z}{\partial x} da;$$

folglich

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\partial a}, \tag{8}$$

woraus hervorgeht, daß x und a in z nur in der Verbindung $x - a$ erscheinen, so daß z die Struktur haben wird:

$$z = F(x - a,\ b - c). \tag{7*}$$

Tritt ferner ein Elementarfehler hinzu, dessen mittlerer Wert Null ist, während sein mittleres Quadrat db beträgt, so drückt sich die Änderung der Häufigkeit von x einerseits durch:

$$d_b z = \frac{\partial z}{\partial b} db,$$

andererseits vermöge (2*) durch:

$$d_b z = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} db$$

aus; daraus folgt, daß

$$\frac{\partial z}{\partial b} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \tag{9}$$

Man denke sich weiter alle Werte der Elementarfehler in dem Verhältnisse $1 : r$ verändert; dann verändern sich in gleichem Verhältnisse auch die Werte von x und a, während sich b und c im Verhältnis $1 : r^2$ verändern; drückt man die Tatsache aus, daß nun in dem Intervall $[rx,\ r(x + dx)]$ ebenso viel Fehlerwerte liegen als früher in dem Intervall $(x,\ x + dx)$ gelegen sind, so entsteht die Gleichung

$$F(x - a,\ b - c)dx = F[r(x - a),\ r^3(b - a)]r dx,$$

oder mit den Abkürzungen:

$$x - a = \xi, \quad b - c = \eta$$

geschrieben:

$$F(r\xi,\ r^2\eta) = \frac{1}{r} F(\xi,\ \eta).$$

Mit $r = 1 + \delta$, unter δ eine sehr kleine Zahl verstanden, gibt die Entwicklung bis auf Größen der Ordnung δ:

$$z + \frac{\partial z}{\partial \xi}\,\delta\xi + 2\,\frac{\partial z}{\partial \eta}\,\delta\eta = z - \delta z,$$

woraus sich

$$\xi\,\frac{\partial z}{\partial \xi} + 2\eta\,\frac{\partial z}{\partial \eta} = -z \tag{10}$$

ergibt. Das allgemeine Integral dieser linearen partiellen Differentialgleichung lautet

$$z = \eta^{-\frac{1}{2}}\,\psi(\xi^2\eta^{-1}). \tag{11}$$

Nun folgt aber aus $\eta = b - c$, daß

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial b},$$

und weiter aus (9) und $\xi = x - a$, daß

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2};$$

setzt man dies in (10) ein, so wird

$$\eta\,\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \xi\,\frac{\partial z}{\partial \xi} + z = 0;$$

die linke Seite dieser Gleichung ist aber der partielle Differentialquotient von $\eta\frac{\partial z}{\partial \xi} + \xi z$ inbezug auf ξ; folglich kann

$$\eta\,\frac{\partial z}{\partial \xi} + \xi z = \chi(\eta)$$

lediglich eine Funktion von η sein. Führt man hierin die allgemeine Lösung (11) ein, so ergibt sich

$$2\xi\eta^{-\frac{1}{2}}\,\psi'(\xi^2\eta^{-1}) + \xi\eta^{-\frac{1}{2}}\,\psi(\xi^2\eta^{-1}) = \chi(\eta).$$

Hiernach sollte eine Funktion von $\xi^2\eta^{-1}$ identisch sein einer Funktion von η; das kann nur stattfinden, wenn beide konstant sind, wenn also

$$\chi(\eta) = \eta\,\frac{\partial z}{\partial \xi} + \xi z = \text{const.};$$

da aber nach (11) ξ und $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ zugleich verschwinden, muß auch const. $= 0$, also

$$\eta\,\frac{\partial z}{\partial \xi} + \xi z = 0 \tag{12}$$

sein.

Demnach hat man, mit der Abkürzung $\xi^2\eta^{-1} = u$, vermöge (11) und (12) zur Bestimmung von ψ die Gleichung:

$$2\psi'(u) + \psi(u) = 0,$$

aus welcher

$$\psi(u) = Ce^{-\frac{u}{2}}$$

folgt. Geht man nun von u auf ξ, η und von diesen auf die ursprünglichen Argumente x, a, b, c zurück, so ergibt sich als approximatives Gesetz der Häufigkeit des Fehlers x das folgende:

$$z = \frac{C}{\sqrt{b-c}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2(b-c)}}. \tag{13}$$

Durch Division von $z\,dx$ mit der Anzahl N aller Fehlerwerte, welche sich durch das über diese Werte ausgedehnte Integral

$$\int z\,dx$$

darstellt, erhält man die Wahrscheinlichkeit eines in das Intervall $(x,\ x + dx)$ fallenden Fehlers; mit Rücksicht auf die außerordentlich rasche Abnahme von z mit wachsendem Betrage von x dürfen die Grenzen der Integration mit $-\infty$ und $+\infty$ angesetzt werden; dadurch ergibt sich

$$N = \frac{C}{\sqrt{b-c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2(b-c)}}\,dx = C\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = C\sqrt{2\pi}$$

und für die erwähnte Wahrscheinlichkeit der Ausdruck:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(b-c)}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2(b-c)}}\,dx. \tag{14}$$

Den Koeffizienten von dx, d. i. die Funktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(b-c)}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2(b-c)}}, \tag{15}$$

bezeichnet man als das *Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeit* oder kurz als *Fehlergesetz*.

Bemerkt sei, daß die Differenz $b - c$ wesentlich positiv ist; denn nach (3) und (4) ist

$$\begin{aligned}\beta - \alpha^2 &= \frac{e'^2 + e''^2 + e'''^2 + \cdots}{n} - \frac{(e' + e'' + e''' + \cdots)^2}{n^2} \\ &= \frac{(1 + 1 + 1 + \cdots)(e'^2 + e''^2 + e'''^2 + \cdots) - (e' + e'' + e''' + \cdots)^2}{n^2} \\ &= \frac{(e' - e'')^2 + (e' - e''')^2 + \cdots + (e'' - e''')^2 + \cdots}{n^2} > 0,\end{aligned}$$

daher nach (6) auch

$$b - c > 0.$$

Setzt man daher zur Abkürzung

$$\frac{1}{2(b-c)} = h^2, \tag{1(}$$

so wird in einfacherer Schreibweise

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-a)^2}. \tag{15'}$$

Die Größe a bedeutet den mittleren Wert von x; denn, weil

$$x = \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots$$

und $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$ die mittleren Werte von $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ sind, so i

$$a = \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots$$

der mittlere Wert von x. Für $x = a$ wird $\varphi(x)$ ein Maximum; a i somit der relativ wahrscheinlichste Beobachtungsfehler.

Die Wahrscheinlichkeit, daß der Beobachtungsfehler von diese wahrscheinlichsten Betrage höchstens um δ nach auf- oder abwär abweiche, drückt sich durch

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{a-\delta}^{a+\delta} e^{-h^2(x-a)^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\delta} e^{-t^2} dt = \Phi(h\delta) \tag{1}$$

aus und kann bei bekanntem h mit Hilfe der Tafel I bestimmt werde

Über die Bedeutung des Parameters h wird später gesproch werden.

124. Ableitung des Fehlergesetzes aus der Hypothe des arithmetischen Mittels. Es sei $\varphi(v)dv$ die apriorische Wal scheinlichkeit, einen Fehler zwischen den Grenzen v und $v + dv$ begehen.

Wir betrachten nun den praktisch einfachsten und wegen sei häufigen Vorkommens wichtigen Fall, daß eine unbekannte physisc Größe, X, n-mal unter — soweit die Wahrnehmung zu urteilen : stattet — gleichen Umständen (von demselben Beobachter, mit gleic Sorgfalt, mit denselben Instrumenten u. dgl.) beobachtet worden : und daß man für sie die Werte $l_1, l_2, \cdots l_n$ erhalten habe.

Die Wahrscheinlichkeit a priori, daß n unabhängige Beoba tungen die Werte $l_1, l_2, \cdots l_n$ ergeben werden, ist proportional d Produkte

$$\varphi(X - l_1)\,\varphi(X - l_2) \cdots \varphi(X - l_n); \qquad ($$

dem analogen Produkte

$$\varphi(x - l_1)\,\varphi(x - l_2) \cdots \varphi(x - l_n) \qquad (2$$

proportional ist nach dem Satze von Bayes (Nr. 93) auch die Wah scheinlichkeit a posteriori, daß, wenn die Messung wirklich die Wer $l_1, l_2, \cdots l_n$ ergab, x der wahre Wert der gemessenen Größe sei.

Es entsteht nun die Frage: Welche Annahme über x ist auf dieser Erfahrungsgrundlage die vorteilhafteste?

Darüber kann aber erst entschieden werden, nachdem man ein theoretisches Prinzip aufgestellt hat. Eines der ältesten Prinzipe, von denen Gebrauch gemacht worden ist, besteht darin, jenen Wert der Unbekannten als den vorteilhaftesten zu erklären, der den Ausdruck (2) zum Maximum macht, mit andern Worten: *denjenigen Wert, welcher den bekannten Messungsergebnissen Fehler zuschreibt, für deren Existenz die größte aposteriorische Wahrscheinlichkeit besteht.* Diesen Gedanken hat Daniel Bernoulli[1]) zuerst ausgesprochen und Gauß[2]) in seiner ersten Publikation über den Gegenstand verwendet. Man kann den aus diesem Prinzip abgeleiteten Wert als den *wahrscheinlichsten Wert* der Unbekannten bezeichnen.

Hiernach wäre bei bekannten φ dieser Wert aus der Gleichung

$$\frac{\varphi'(x-l_1)}{\varphi(x-l_1)} + \frac{\varphi'(x-l_2)}{\varphi(x-l_2)} + \cdots + \frac{\varphi'(x-l_n)}{\varphi(x-l_n)} = 0 \tag{3}$$

zu berechnen, die sich durch Nullsetzen des logarithmischen Differentialquotienten von (2) nach x ergibt.

Soll jedoch diese Gleichung zur Bestimmung der Funktion φ verwendet werden, so ist eine Annahme über x erforderlich. Als solche hat Gauß (l. c.) die zugrunde gelegt, *daß unter den hier vorausgesetzten Umständen das arithmetische Mittel der Beobachtungsresultate der vorteilhafteste, also der wahrscheinlichste Wert sei.*

Dann muß also die Gleichung

$$x = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n} \tag{4}$$

oder die durch Umformung aus ihr abgeleitete

$$(x - l_1) + (x - l_2) + \cdots + (x - l_n) = 0 \tag{5}$$

eine Folge von (3) sein.

Setzt man

$$x - l_i = \lambda_i, \qquad \frac{\varphi'(\lambda_i)}{\varphi(\lambda_i)} = \psi(\lambda_i),$$

so kommt dies darauf zurück, die Funktion ψ so zu bestimmen, daß mit

$$\psi(\lambda_1) + \psi(\lambda_2) + \cdots + \psi(\lambda_n) = 0$$

zugleich

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0$$

bestehe.

1) Dijudicatio maxime probabilis plurium observationium discrepantium etc. Acta Ac. Petrop. 1778. 2) Theoria motus etc. 1809.

Bildet man aus diesen Gleichungen, nachdem man sie differentiiert hat, mittels des unbestimmten Multiplikators $2k$ die *eine* Gleichung:

$$[\psi'(\lambda_1) - 2k]d\lambda_1 + [\psi'(\lambda_2) - 2k]d\lambda_2 + \cdots + [\psi'(\lambda_n) - 2k]d\lambda_n = 0,$$

in welcher die Differentiale von einander unabhängig sind, so ergibt sich, daß jede der eingeklammerten Differenzen verschwinden, daß also ψ der Differentialgleichung

$$\psi'(\lambda) = 2k$$

genügen müsse. Daraus folgt

$$\psi(\lambda) = 2k\lambda,$$

also

$$\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = 2k\lambda,$$

woraus durch neuerliche Integration

$$l \cdot \varphi(\lambda) = l \cdot C + k\lambda^2$$

und

$$\varphi(\lambda) = Ce^{k\lambda^2}.$$

erhalten wird.

Da nach allgemeiner Erfahrung φ eine abnehmende Funktion ist, ist k notwendig negativ; ersetzt man es durch $-h^2$, so wird

$$\varphi(\lambda) = Ce^{-h^2\lambda^2}.$$

Das über alle möglichen Werte des Fehlers ausgedehnte Integral von $\varphi(\lambda)d\lambda$ hat als Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Fehler einen dieser Werte annehme, den Wert 1; folglich ist

$$C\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\lambda^2} d\lambda = \frac{C}{h}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{C\sqrt{\pi}}{h} = 1,$$

woraus $C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$.

Hiermit ist endgiltig das Fehlergesetz

$$\varphi(\lambda) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\lambda^2} \tag{6}$$

gefunden.

Gegenüber der in der vorigen Nummer unter (15*) gefundenen Form zeigt diese zwei Unterschiede: dort war x der *wahre* Fehler, also die Abweichung vom wahren Werte — hier ist λ die Abweichung von dem vorteilhaftesten Werte, also vom arithmetischen Mittel, der sogenannte *plausible* oder *scheinbare* Fehler; dort war x um a, d. i. um den mittleren Wert von x, vermindert; hier entfällt dies, weil vermöge (5) die Summe der λ, also auch der mittlere Wert von λ = Null ist.

Die Ableitung hat die Beweiskraft, welche ihr aus der Hypothese des arithmetischen Mittels entspringt. Daß das arithmetische Mittel der vorteilhafteste, insbesondere daß es der wahrscheinlichste Wert sei, ist unbeweisbar; aber es lassen sich mannigfache innere und äußere Gründe anführen, welche für die Wahl dieses Wertes sprechen[1]).

125. Das Präzisionsmaß. Setzt man in dem Fehlergesetz

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-a)^2}$$

$a = 0$, so bedeutet das in (17) der vorigen Nummer gerechnete

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\delta} e^{-t^2} dt = \Phi(h\delta)$$

die Wahrscheinlichkeit, daß einer Beobachtung ein zwischen $-\delta$ und $+\delta$ liegender Fehler zukomme. Das Intervall 2δ verengt sich bei festem P in demselben Verhältnisse, als h wächst; je enger aber das Intervall, innerhalb dessen der Beobachtungsfehler mit gegebener Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist, für desto genauer wird man die Art der Beobachtungen erklären.

Der Parameter h hängt also mit der Genauigkeit der Beobachtungen zusammen, deren Fehlerfrequenz durch das Gesetz dargestellt ist. Gauß hat die *Genauigkeit* der Größe h geradezu proportional gesetzt und diese darum als *Präzisionsmaß* bezeichnet.

Die erste Ableitung des Fehlergesetzes hat gezeigt, wie das Präzisionsmaß mit den Elementarfehlern zusammenhängt; nach Gleichung (16) ist

$$h = \frac{1}{\sqrt{2(b-c)}},$$

und darin ist b die Summe der mittleren Quadrate, c die Summe der Quadrate der mittleren Werte der einzelnen Elementarfehler.

126. Gesetz, welchem eine lineare Funktion unabhängiger Beobachtungsfehler folgt. Es sei

$$F = k + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n \tag{1}$$

eine lineare Funktion der direkt beobachteten Größen $X_1, X_2, \cdots X_n$; die Beobachtungsresultate $l_1, l_2, \cdots l_n$ mögen aus Messungsvorgängen stammen, deren Fehler dem allgemeinen Gesetze

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-a)^2}$$

folgen und deren Präzisionsmaße $h_1, h_2, \cdots h_n$ sind. Rechnet man statt F den Ausdruck

1) Vgl. des Verf.s „Theorie der Beobachtungsfehler", 1891, p. 16—47.

$$f = k + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \cdots + \alpha_n l_n, \tag{2}$$

so entsteht die Frage, welchem Gesetz der dadurch begangene Fehler

$$F - f = \alpha_1 (X_1 - l_1) + \alpha_2 (X_2 - l_2) + \cdots + \alpha_n (X_n - l_n)$$

oder

$$\mathsf{E} = \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \cdots + \alpha_n \varepsilon_n \tag{3}$$

folgt. Dies kommt darauf hinaus, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß E zwischen den Grenzen z und $z + dz$ liege; diese aber ist gegeben durch das Integral

$$\int\limits_{(n)} \frac{h_1 h_2 \cdots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-[h_1^2(\varepsilon_1 - a_1)^2 + h_2^2(\varepsilon_2 - a_2)^2 + \cdots + h_n^2(\varepsilon_n - a_n)^2]} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \cdots d\varepsilon_n,$$

ausgedehnt über dasjenige Gebiet, das durch die Relation

$$z \leqq \mathsf{E} \leqq z + dz$$

begrenzt wird.

Um während der Integration von dieser Grenzbeziehung unabhängig zu bleiben, wendet man den Kunstgriff an, den Ausdruck unter dem Integral mit einem Faktor zu multiplizieren, der für $\mathsf{E} = z$ den Wert 1 hat und in allen andern Fällen verschwindet; zu einem solchen *Diskontinuitätsfaktor* führt das Integral

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{mu\sqrt{-1}} du,$$

welches für jedes ganzzahlige m verschwindet und für $m = 0$ den Wert 2π gibt. Setzt man

$$\frac{u}{\delta} = \theta,$$

unter δ eine sehr kleine Größe, unter θ eine neue Variable verstanden, so wird hiernach

$$\frac{\delta}{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{\delta}}^{\frac{\pi}{\delta}} e^{m\delta \cdot \theta\sqrt{-1}} d\theta$$

1 oder 0, je nachdem $m\delta$ Null oder nicht Null ist. Für $\delta = dz$ und $m\delta = \mathsf{E} - z$ ergibt sich der für den vorliegenden Fall taugliche Diskontinuitätsfaktor

$$\frac{dz}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(\mathsf{E} - z)\theta\sqrt{-1}} d\theta;$$

nach seiner Anbringung darf in bezug auf alle ε zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ integriert werden. Der Ausdruck für die verlangte Wahrscheinlichkeit wird dann:

$$\frac{dz}{2\pi}\frac{h_1 h_2 \cdots h_n}{(\sqrt{\pi})^n}\int_{-\infty}^{\infty}d\theta\int_{-\infty}^{\infty}d\varepsilon_1\int_{-\infty}^{\infty}d\varepsilon_2\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sum h_i^2(\varepsilon_i-a_i)^2+\left(\sum \alpha_i\varepsilon_i-z\right)\theta\sqrt{-1}}d\varepsilon_n. \quad (4)$$

Die auf ε_i bezügliche Integration:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-h_i^2(\varepsilon_i-a_i)^2+\alpha_i\varepsilon_i\theta\sqrt{-1}}\,d\varepsilon_i,$$

wenn man den Exponenten in

$$-\left[h_i(\varepsilon_i-a_i)-\frac{\alpha_i\theta}{2h_i}\sqrt{-1}\right]^2+\alpha_i\theta\sqrt{-1}-\frac{\alpha_i^2\theta^2}{4h_i^2}$$

umformt, gibt

$$\frac{\sqrt{\pi}}{h_i}e^{a_i\alpha_i\theta\sqrt{-1}-\frac{\alpha_i^2\theta^2}{4h_i^2}};$$

folglich wird aus (4) nach Ausführung der Integrationen in bezug auf alle ε:

$$\frac{dz}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta\sqrt{-1}\sum a_i\alpha_i-\frac{\theta^2}{4}\sum\frac{\alpha_i^2}{h_i^2}-z\theta\sqrt{-1}}d\theta.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\sum a_i\alpha_i = A,$$
$$\sum\frac{\alpha_i^2}{h_i^2}=\frac{1}{H^2}, \quad (5)$$

und formt hierauf den Exponenten wie folgt um:

$$-\left[\frac{\theta}{2H}+H(z-A)\sqrt{-1}\right]^2-H^2(z-A)^2,$$

so ergibt sich schließlich

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}}e^{-H^2(z-A)^2}dz \quad (6)$$

als Ausdruck für die eingangs bezeichnete Wahrscheinlichkeit.

Es folgt also der Fehler von f einem Gesetze von derselben Form, wie die Fehler der zur Berechnung von f verwendeten Beobachtungen.

Sind diese gleich genau, so daß $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = h$ ist, so ist nach (5) die Präzision in der Bestimmung von f:

$$H=\frac{h}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2}}. \quad (7)$$

Ein besonderer Fall, der praktische Verwendung findet, soll hier angemerkt werden. Setzt man in (1)

$$k = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = \cdots = \alpha_n = 0,$$
$$X_1 = X_2 = X,$$

so geht F in Null, f und E in die Differenz zweier gleich genauen unabhängigen Beobachtungen einer und derselben Größe; Formel (7) gibt für H den Wert $\frac{h}{\sqrt{2}}$.

Die Differenzen gleich genauer Beobachtungen von der Präzision h verhalten sich also in ihrer Frequenz so, wie Beobachtungsfehler von der Präzision $\frac{h}{\sqrt{2}}$.

Das durch (6) ausgedrückte Gesetz hat auch für eine *beliebige* Funktion $F(X_1, X_2, \cdots X_n)$ bedingte Geltung, unter der Voraussetzung nämlich, daß die $l_1, l_2, \cdots$ anhaftenden Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ so klein seien, daß man Potenzen und Produkte derselben gegenüber den ersten Potenzen vernachlässigen, also mit genügender Schärfe

$$F = F(l_1 + \varepsilon_1, l_2 + \varepsilon_2, \cdots l_n + \varepsilon_n) = k + \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \cdots + \alpha_n \varepsilon_n \quad (8)$$

setzen darf, wobei

$$\begin{aligned} k &= F(l_1, l_2, \cdots l_n), \\ \alpha_i &= F'_{X_i}(l_1, l_2, \cdots l_n). \end{aligned} \quad (9)$$

Demnach bilden die Formeln (5) bis (9) die Grundlage für die Beurteilung der Genauigkeit in der Bestimmung einer Funktion direkt beobachteter unabhängiger Größen.

127. Der wahre Wert einer physischen Größe[1]**.** Man spricht von dem *wahren Werte* einer physischen Größe in der stillschweigenden Voraussetzung, daß ein solcher in einer jede Unbestimmtheit ausschließenden Weise definiert sei. Dies wird in manchen Fällen *innerhalb der Grenzen unseres Wahrnehmungsvermögens* auch zutreffen; in *absolutem* Sinne, d. h. bei unbegrenzter Schärfe dieses Vermögens, wird eine physische Größe niemals vollkommen definiert sein.

Die Basis einer großen Triangulierung mag noch so sorgfältig festgelegt sein, geometrisch streng definiert ist sie nicht, weil ihre Endpunkte nicht Punkte im eigentlichen Sinne, sondern sichtbare Marken sind.

Der Winkel der Richtungen, welche von einem „Punkte" der Erdoberfläche nach zwei andern „Punkten" gehen, ist nicht unzweideutig definiert, weil sowohl der Ausgangspunkt, wie auch die Zielpunkte Objekte von endlicher Ausdehnung sind; auch das Einstellen auf ihre „Mitte" läßt noch eine Unbestimmtheit übrig.

Die zwischen den Endflächen eines Meßstabes enthaltene Länge entbehrt bei genauem Zusehen auch der strengen Definition; mögen

1) Vgl. P. Pizzetti, l. c., p. 146 ff.

die Endflächen noch so fein bearbeitet sein, vollkommene und parallele Ebenen im geometrischen Sinne stellen sie schon vermöge der Diskontinuität der Masse nicht dar.

Man spricht von der Zenitdistanz eines Sternes an einem bestimmten Orte und stellt sich dabei vor, daß die Lotrichtung an diesem vollkommen definiert sei; bedenkt man aber, daß die Lotrichtung im Zusammenhange steht mit der Verteilung der Massen, so wird man bei der beständigen Veränderlichkeit dieser Verteilung streng genommen nur von der Lotrichtung in einem bestimmten Augenblicke sprechen können.

Bei der begrenzten Schärfe unserer Beobachtungsmittel, der natürlichen wie der künstlichen, entziehen sich aber Unsicherheiten in der Definition der zu messenden Größe und zeitliche Änderungen derselben, sobald sie unter ein gewisses Maß herabsinken, der Wahrnehmung vollständig, und es bleibt die Möglichkeit, für den wahren Wert eine auf die Erfahrung gegründete Definition aufzustellen. Es soll darunter *die Grenze* verstanden werden, *welcher sich der aus einer großen Zahl von Beobachtungen abgeleitete Mittelwert*[1]) *nähert, wenn die Zahl der Beobachtungen beständig wächst.*

Diese Definition setzt voraus, daß der mathematische Ausdruck des Mittelwertes aus n Beobachtungen mit wachsendem n tatsächlich gegen eine bestimmte Grenze konvergiere, der dadurch, daß sie lediglich von der physischen Größe und nicht auch von dem Beobachter, den Instrumenten abhängt, eine *absolute* Bedeutung zukommt.

Das Vorhandensein eines Grenzwertes allein wäre nicht ausreichend zur Definition des wahren Wertes. Denn unterlägen die Beobachtungen einer konstant wirkenden Fehlerquelle, so ergäbe sich nach deren Ausscheidung (z. B. nach Berichtigung des Instrumentes oder Wahl eines andern) sofort ein von dem früheren verschiedener Grenzwert, gegen die zuletzt ausgesprochene Forderung.

Für die Methode der Kombination der Beobachtungen ergibt sich aus diesen Betrachtungen das folgende Postulat: *„Der Ausdruck, welcher den vorteilhaftesten Wert einer physischen Größe aus einer Anzahl ausgeführter Beobachtungen bestimmt, muß so beschaffen sein, daß er mit beständigem Wachsen dieser Anzahl dem wahren Werte der Größe als Grenze sich nähert."*

Dies erfordert, daß in dem allgemeinen Fehlergesetz

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(\varepsilon - a)^2}$$

die Größe a, von Gauß[2]) der *konstante Teil des Fehlers* genannt, ent-

1) Unter „Mittelwert" wird hier der nach einer Methode gewonnene vorteilhafteste Wert der unbekannten Größe verstanden.

2) Theoria combinationis I (1821), Art. 5.

weder im voraus, vor Anstellung der Beobachtungen, bekannt od gleich Null sei.

Angenommen nämlich, zur Bestimmung einer unbekannten Größe seien n Beobachtungen, deren Fehler dem obigen Gesetze folgen, au geführt worden und hätten die Resultate $l_1, l_2, \cdots l_n$ ergeben. Durc $f(l_1, l_2, \cdots l_n)$ sei die Rechnungsvorschrift dargestellt, welche den vo teilhaftesten Wert der Unbekannten liefern soll, so daß

$$x = f(l_1, l_2, \cdots l_n)$$

sei. Die erste Forderung, welche die Funktion f zu erfüllen hat, die, daß ihr Wert X sei, wenn man für die fehlerhaften Beoba tungsergebnisse X selbst einsetzt, daß also

$$X = f(l_1 + \varepsilon_1, l_2 + \varepsilon_2, \cdots l_n + \varepsilon_n). \;.\;.$$

Entwickelt man die rechte Seite unter Voraussetzung sehr kleine (vgl. Schluß der vorigen Nummer), so ergibt sich für den Fehler der Bestimmung x die Darstellung:

$$X - x = \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \cdots + \alpha_n \varepsilon_n$$

und dieser Fehler befolgt das Gesetz

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H(z-A)^2},$$

wobei

$$H = \frac{h}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}}, \qquad A = a(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n).$$

Soll mit wachsendem n sich x der Grenze X nähern, so m notwendig der Fehler 0 die größte Häufigkeit haben; dies ist al nur dann der Fall, wenn $A = 0$, was wiederum die Gleichung $a =$ nach sich zieht, weil das Nullwerden von $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ ni vorausgesetzt werden darf[1]). Des weiteren ist erforderlich, daß mit n beständig wachse, daß also die Summe $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots +$ beständig abnehme und sich der Null als Grenze nähere.

Der Fall, daß a nicht Null, aber bekannt sei, kann auf früheren zurückgeführt werden. Schreibt man X in der Form:

$$X = f(l_1 - a + \varepsilon_1 + a, \; l_2 - a + \varepsilon_2 + a, \; \cdots \; l_n - a + \varepsilon_n + a),$$

---

1) Es ist nämlich für ein sehr kleines δ bis auf die Ordnung dieser ($f(l_1 + \delta, l_2 + \delta, \cdots l_n + \delta) = x + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\delta$; wäre es $\alpha_1 + \alpha_2$ $+ \alpha_n = 0$, so hätte man

$$f(l_1, l_2, \cdots l_n) = x = f(l_1 + \delta, l_2 + \delta, \cdots l_n + \delta),$$

d. h. an dem vorteilhaftesten Werte würde durch Abänderung sämtlich obachtungen um δ keine Änderung hervorgebracht.

entwickelt nach den als sehr klein vorausgesetzten Größen $\varepsilon_1 + a, \varepsilon_2 + a, \cdots$ und setzt

$$f(l_1 - a,\ l_2 - a,\ \cdots\ l_n - a) = x',$$

so wird

$$X - x' = \alpha_1'\varepsilon_1 + \alpha_2'\varepsilon_2 + \cdots + \alpha_n'\varepsilon_n + A',$$

wo A' wie vorhin die Bedeutung $a(\alpha_1' + \alpha_2' + \cdots + \alpha_n')$ hat; der Fehler in x' befolgt nun das Gesetz

$$\frac{H'}{\sqrt{\pi}} e^{-H'^2(\varepsilon + A' - A')^2}$$

d. i.

$$\frac{H'}{\sqrt{\pi}} e^{-H'^2\varepsilon^2},$$

was mit der früheren Voraussetzung $A = 0$ übereinstimmt. Die Rechnungsvorschrift, welche für $a = 0$ zu dem wahren Werte als Grenze führt, leistet dies also auch bei $a \neq 0$, wenn man das als bekannt vorausgesetzte a von jeder Beobachtung subtrahiert.

§ 2. Genauigkeitsmaße.

128. Das Fehlerrisiko. Man kann die Bestimmung einer Größe durch Beobachtungen einem Spiele vergleichen, bei dem nur Verluste möglich sind; denn jeder Fehler, ob positiv oder negativ, bedeutet als Abweichung von der Wahrheit einen Verlust. Der mit einem Spiele verbundenen Verlustgefahr entspricht hier die Befürchtung eines Fehlers in dem Resultate, von deren Ausmaß die *Genauigkeit* abhängen wird, die man der gewonnenen Bestimmung zuschreibt.

Wie nun bei dem Spiele in dem Risiko ein Maß für die Gefährlichkeit desselben erkannt worden ist, kann eine in analoger Weise gebildete Größe bei Beobachtungen als Maß für deren Genauigkeit verwendet werden. Während jedoch zur Bildung des *Spielrisikos* bei einem mathematisch geordneten Spiele entweder nur die Verluste oder nur die Gewinne herangezogen zu werden brauchen (s. Nr. 111), sind bei der Bildung des *Fehlerrisikos* alle möglichen Fehler in Rechnung zu nehmen. Dagegen entsteht die Frage, wonach man die Bedeutung eines Fehlers, den mit ihm verbundenen Nachteil, beurteilen soll. Wird zunächst allgemein die Bedeutung eines Fehlers ε als Funktion seines Wertes aufgefaßt und mit $\psi(\varepsilon)$ bezeichnet, so ergibt sich für das Fehlerrisiko[1]) die Definition: *es sei die Summe der Produkte aus den Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Fehler mit den ihnen entsprechenden Funktionswerten* $\psi(\varepsilon)$. Ist $\varphi(\varepsilon)$ das Fehlergesetz, so drückt sich das Fehlerrisiko R durch die Formel aus:

1) Vielfach auch als „totales Fehlerrisiko" bezeichnet.

$$R = \int \psi(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)d\varepsilon,$$

die Integration über alle Werte von ε ausgedehnt.

Es liegt in der Natur der Sache, dem Fehler eine von se Zeichen unabhängige und mit seinem Betrage wachsende Bedeu beizulegen, d. h. die Funktion $\psi(\varepsilon)$ so zu wählen, daß

$$\psi(\varepsilon) = \psi(-\varepsilon), \quad \text{und} \quad \psi(\varepsilon') > \psi(\varepsilon), \quad \text{wenn} \quad |\varepsilon'| > |\varepsilon|.$$

Bleibt man bei diesen allgemeinen Festsetzungen stehen, so sich zunächst nachweisen, daß, sofern der einer experimenteller stimmung anhaftende Fehler das Gesetz

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(\varepsilon - a)^2}$$

befolgt, das mit jener Bestimmung verbundene Fehlerrisiko am *klei* sei, wenn $a = 0$ ist.

Aus

$$R = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\varepsilon) e^{-h^2(\varepsilon - a)^2} d\varepsilon$$

folgt nämlich

$$\frac{dR}{da} = \frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\varepsilon)(\varepsilon - a) e^{-h^2(\varepsilon - a)^2} d\varepsilon$$

$$= \frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t + a)\, t e^{-h^2 t^2} dt;$$

zerlegt man das Integrationsgebiet durch die Null in zwei T ändert in dem ersten Teile des Integrals das Vorzeichen der riabeln t, so ergibt sich vermöge (2) für den Differentialquotie die Darstellung:

$$\frac{dR}{da} = \frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} [\psi(t + a) - \psi(t - a)]\, t e^{-h^2 t^2} dt.$$

Hier nimmt t nur positive Werte an; ist daher $a > 0$, so ist nacl

$$\psi(t + a) - \psi(t - a) > 0, \quad \text{also auch} \quad \frac{dR}{da} > 0;$$

dagegen bestehen für $a < 0$ die umgekehrten Beziehungen. Es also $\frac{dR}{da}$ immer gleiches Vorzeichen mit a, folglich erlangt R $a = 0$ sein Minimum.

Das Fehlerrisiko wird ferner um so kleiner, je größer h vorausgesetzt, daß $a = 0$ ist. Denn es ist dann

$$R = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\varepsilon) e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \psi\left(\frac{t}{h}\right) e^{-t^2} dt,$$

folglich das zu einem Werte von t gehörige Element des Integrals und daher R selbst um so kleiner, je größer h ist.

Durch diese Beziehung des Fehlerrisikos zum Präzisionsmaß ist erwiesen, daß jedes Fehlerrisiko, welches mit Einhaltung der Relationen (2) gerechnet ist, sich zur *Beurteilung der Genauigkeit* eignet.

Es ist wichtig zu bemerken, daß das Fehlerrisiko R gleichbedeutend ist mit dem *Mittelwerte der Funktion* $\psi(\varepsilon)$ (s. Nr. 50). Läge demnach eine Reihe von Werten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ des Fehlers vor, wie sie der Zufall zusammengetragen hat, d. h. wie sie sich bei einer Reihe von Beobachtungen ergaben, so darf dem Bernoullischen Theorem zufolge

$$\frac{1}{n}\{\psi(\varepsilon_1) + \psi(\varepsilon_2) + \cdots + \psi(\varepsilon_n)\}$$

um so sicherer als ein Näherungswert von R angesehen werden, je größer n ist; denn mit beständig wachsendem n nähert sich dieser Ausdruck der Grenze R.

129. Der Durchschnittsfehler. Der aus der Wahl

$$\psi(\varepsilon) = |\varepsilon|,$$

die den Bedingungen (2) der vorigen Nummer entspricht, hervorgehende Wert von R wird als *Durchschnittsfehler* bezeichnet. Seine Bedeutung ist die des Mittelwertes der Fehlerbeträge. Liegt demnach eine Reihe von n Fehlern: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ vor, so ist[1])

$$\frac{[|\varepsilon|]}{n} \tag{1}$$

der aus ihr abgeleitete Näherungswert des Durchschnittsfehlers ϑ.

Befolgen die Fehler das Gesetz

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2},$$

so ist

$$\vartheta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon| e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t e^{-t^2} dt,$$

und da $\frac{1}{2}$ der Wert des Integrals,

$$\vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}. \tag{2}$$

1) Die eckige Klammer soll hier und im folgenden als *Summenzeichen* für gleichartige Größen zur Verwendung kommen.

Hiernach ist der Durchschnittsfehler dem Präzisionsmaß umge kehrt, nach der in Nr. 125 getroffenen Festsetzung *der Genauigke* ebenfalls *umgekehrt* proportional.

Bei bekanntem ϑ gibt die Formel (2) ein Mittel zur Bestimmun des Präzisionsmaßes.

130. Der mittlere Fehler. Die Quadratwurzel aus demjenige Fehlerrisiko, das aus der Wahl

$$\psi(\varepsilon) = \varepsilon^2$$

hervorgeht, ist von Gauß[1]) unter dem Namen des *mittleren Fehler* in die Theorie eingeführt worden. Der mittlere Fehler ist hiernacl die Quadratwurzel aus dem Mittelwert des Fehlerquadrates und wir aus einer Reihe von Fehlerwerten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ gefunden, indem ma aus dem Quotienten

$$\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}$$

die Quadratwurzel zieht.

Befolgen die Fehler das Gesetz

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2},$$

so ergibt sich für das Quadrat des mittleren Fehlers μ die Form

$$\mu^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{h^2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2h^2},$$

woraus

$$\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}}$$

folgt.

Auch der mittlere Fehler ist dem Präzisionsmaß und daher d Genauigkeit umgekehrt proportional, eignet sich also wie der Dur schnittsfehler zu einem Genauigkeitsmaß.

Der mittlere Fehler entspricht dem sogenannten mittleren Ris bei vom Zufall abhängigen Unternehmungen (s. Nr. 114).

131. Der wahrscheinliche Fehler. Dieser ist nicht auf d Begriff des Fehlerrisikos aufgebaut. Man versteht darunter j Fehler*grenze* r, für deren Überschreitung wie Nichtüberschreitung Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ besteht[2]). Die Giltigkeit des Fehlergesetze

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}$$

---

1) Theoria combinationis, Art. 7.

2) Gauß, Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen. Zeitsch Astron. I, 1816.

vorausgesetzt, ergibt sich r aus der Gleichung

$$\frac{1}{2} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{rh} e^{-t^2} dt,$$

deren Lösung nach Nr. 73, Gleichung (10),

$$rh = 0{,}476936 = \varrho_0 \tag{1}$$

ist. Es eignet sich demnach r, als dem Präzisionsmaß umgekehrt proportional, theoretisch in gleicher Weise als Genauigkeitsmaß wie ϑ und μ.

Liegt eine durch den Zufall erzeugte Reihe von n Fehlern vor, und ist sie nach den absoluten Beträgen steigend geordnet, so bezeichnet bei ungeradem n der mittelste, bei geradem n ein zwischen den beiden mittelsten angenommener Zahlwert eine angenäherte Bestimmung von r.

132. Vergleichende Betrachtung der Genauigkeitsmaße. Mit den drei in den letzten Nummern besprochenen ist die Zahl der *möglichen* Genauigkeitsmaße nicht erschöpft. Aus dem allgemeinen Begriffe des Fehlerrisikos ließe sich vielmehr durch Spezialisierung der Funktion $\psi(\varepsilon)$ noch eine unabsehbare Reihe geeigneter Maße ableiten.

Unter diesen sind diejenigen, welche nach Art des Durchschnitts- und des mittleren Fehlers aus *Mittelwerten der Fehlerpotenzen* hervorgehen, Gegenstand eingehender Untersuchungen geworden. Wählt man nämlich

$$\psi(\varepsilon) = |\varepsilon^m|$$

und bezeichnet den zugehörigen Wert von R mit R_m, so ist bei Geltung des exponentiellen Gesetzes

$$R_m = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^m e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{h^m\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^m e^{-t^2} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{h^m\sqrt{\pi}}, \quad (1)^{1)}$$

folglich die Größe $\sqrt[m]{R_m}$ dem Präzisionsmaß umgekehrt proportional und daher ebenso zu einem Präzisionsmaß geeignet wie ϑ und μ.

Bei Entscheidung der Frage, welches von all diesen Genauigkeitsmaßen zu wählen sei, hat — den praktischen Gesichtspunkt

---

1) Die Gammafunktion, welche den Zähler des Bruches bildet, hat für

	$m = 1$	2	3	4	5	6	...
den Wert $\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) =$	1,	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$,	1,	$\frac{1\cdot 3}{2^2}\sqrt{\pi}$,	$1\cdot 2$,	$\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}\sqrt{\pi}$,	...

zunächst bei Seite gelassen — die folgende theoretische Erw mitzusprechen. In Wirklichkeit wird für R_m immer nur aus vorgelegten Reihe von Einzelwerten des ε: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$, ein rungswert zu erzielen sein durch Ausrechnung der Formel

$$\frac{[\varepsilon^m]}{n}, \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{[|\varepsilon|^m]}{n},$$

jenachdem m gerad oder ungerad ist. Nun erweist eine eing Untersuchung[1]), daß der Ausdruck (2) nicht für jedes m gleich dem theoretischen Werte R_m als Grenze sich nähert, mit Worten, daß bei gegebenem (großen) n die Grenzen, innerhalb w die Differenz

$$R_m - \frac{[\varepsilon^m]}{n}$$

mit gegebener Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist, von m abl und am engsten sind für $m = 2$, *daß* also *die Beurteilung d nauigkeit nach dem Mittelwerte der Fehlerquadrate oder nac mittleren Fehler die sicherste ist.*

Die Sicherheit, welche die Wahl $m = 1$ — der Durchsc fehler — gewährt, kommt nach jenen Untersuchungen der von sehr nahe. Trotzdem und trotz der einfacheren Rechnung, we gegenüber μ erfordert, ist doch der mittlere Fehler das üblich nauigkeitsmaß geworden.

Aus der Zusammenstellung der Formeln für ϑ, μ, r:

$$\vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}, \quad \mu = \frac{1}{h\sqrt{2}}, \quad r = \frac{\varrho_0}{h}$$

geht übrigens hervor, daß mit einer der drei Größen auch die andern und h bestimmt sind; es ergeben sich nämlich die Bezieh

$$\mu = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\vartheta = 1{,}25331\,\vartheta$$

$$r = \varrho_0\sqrt{2}\,\mu = 0{,}67449\,\mu$$

$$r = \varrho_0\sqrt{\pi}\,\vartheta = 0{,}84533\,\vartheta$$

$$h = \frac{1}{\vartheta\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} = \frac{\varrho_0}{r}$$

$$= \frac{0{,}56419}{\vartheta} = \frac{0{,}70710}{\mu} = \frac{0{,}47936}{r}.$$

Hat man zwei oder mehrere der Größen unabhängig von ei bestimmt, so liefert ihre Prüfung an den vorstehenden Beziel

1) Vgl. hierzu Helmert, Über die Wahrscheinlichkeit der summen etc. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 21 (1876); Pizzetti l. c., p. des Verf.s „Theorie der Beobachtungsfehler", p. 130ff.

eine *generelle Probe* dafür, ob die zugrunde gelegten Fehler nahe genug dem Fehlergesetz entsprechen, aus welchem jene Beziehungen hervorgegangen sind.

Eine *eingehende Probe* hätte sich auf die Verteilung der Fehler nach Vorzeichen und absoluter Größe unter Benützung eines, etwa aus μ, gerechneten Präzisionsmaßes zu erstrecken. Unter n Fehlern ist die Hälfte positiver und die andere Hälfte negativer, ferner sind

$$n \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2} dt = n \Phi(ah)$$

Fehler zwischen $-a$ und $+a$ zu erwarten. Diese Angaben entsprechen der *wahrscheinlichsten* Verteilung (s. Nr. 80). Umfangreiche Untersuchungen, welche in dieser Richtung ausgeführt worden sind, haben das Fehlergesetz

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$$

als eine gute approximative Darstellung der Fehlerfrequenz bestätigt[1]).

Häufigen Gebrauches wegen ist nachstehend eine Tabelle mitgeteilt, aus welcher die Wahrscheinlichkeit zu entnehmen ist, daß der einer Beobachtung oder Bestimmung anhaftende Fehler dem Betrage nach zwischen 0 und dem k-fachen Durchschnitts-, mittleren oder wahrscheinlichen Fehler gelegen sei. Der Ausdruck für diese Wahrscheinlichkeit ist nach den Formeln (3) bezüglich des Durchschnittsfehlers:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{kh\vartheta} e^{-t^2} dt = \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right),$$

bezüglich des mittleren Fehlers:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{kh\mu} e^{-t^2} dt = \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right),$$

bezüglich des wahrscheinlichen Fehlers:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{khr} e^{-t^2} dt = \Phi(k\varrho_0).$$

1) Näheres hierüber vgl. in Verf.s „Theorie der Beobachtungsfehler“, p. 188—202; C. S. Peirce, On the theory of errors of observations. Coast and Geod. Survey 1870.

Wahrscheinlichkeit P, daß der Fehler einer Bestimmung den k-fachen (schnittlichen, mittleren und wahrscheinlichen Fehler nicht überschrei

k	$(0, k\vartheta)$	$(0, k\mu)$	$(0, kr)$
	P	P	P
0,2	0,12696	0,16809	0,10731
0,4	0,25072	0,31100	0,21268
0,6	0,42645	0,45122	0,31430
0,8	0,47640	0,57653	0,41052
1,0	0,57489	0,68260	0,50000
1,2	0,66163	0,76956	0,58171
1,4	0,73610	0,83851	0,65498
1,6	0,79789	0,89028	0,71949
1,8	0,85201	0,92818	0,77528
2,0	0,88933	0,95346	0,82261
2,2	0,92074	0,97114	0,86216
2,4	0,94448	0,98763	0,89450
2,6	0,96184	0,99065	0,92051
2,8	0,97445	0,99489	0,94105
3,0	0,98328	0,99729	0,95698
3,2	0,98932	0,99873	0,96910
3,4	0,99331	0,99932	0,97817
3,6	0,99591	0,99968	0,98482
3,8	0,99755	0,99985	0,98962
4,0	0,99857	0,99994	0,99302

An diese Tabelle soll die Frage nach dem mutmaßlichen g *Fehler* in einer Beobachtungsreihe angeschlossen werden. Bei Gattung von Beobachtungen bekannter Genauigkeit von einem g Fehler schlechtweg zu sprechen, geht nicht an; denn bis zu w Größe Fehler auftreten, wenn man die dem Gesetze entspre Verteilung voraussetzt, hängt von dem Umfange der ausgef Beobachtungsreihe ab. Ist n die Anzahl der Beobachtungen, Wahrscheinlichkeit, daß der absolute Betrag eines Fehlers $k\mu$ überschreite, so ist $n(1-P)$ die erwartungsmäßige Anzahl der jenseits dieser Grenze; und nur wenn diese Anzahl 1 oder d ist, sind Fehler zu erwarten, die über den Betrag $k\mu$ hinaus Man kann daher durch Auflösung der Gleichung

$$n(1-P) = 1$$

nach n dem Umfang der Beobachtungsreihe feststellen, bei w $k\mu$ als größter Fehler zu erwarten ist. Mit Benützung der ob sammengestellten Werte von P ergibt sich:

für $k =$	2	2,4	2,8	3	3,4	3,8	4
$n =$	21,	81,	196,	389,	1471,	6667,	16667.

Man ersieht daraus, wie rasch n im Vergleiche zu k wächst u nur bei sehr umfangreichen Beobachtungsreihen ein Fehler

wärtigen ist, der den dreifachen mittleren Fehler übersteigt. Selbst bei 100 Beobachtungen wird der größte Fehler voraussichtlich nicht über das $2\frac{1}{2}$ fache des mittleren Fehlers betragen.

133. Verwendung von Beobachtungsdifferenzen zur Genauigkeitsbestimmung. Es liegt nahe, Differenzen von Beobachtungen einer Größe zur Beurteilung der Genauigkeit zu verwenden, weil sie, unabhängig von der Kenntnis des wahren Wertes der beobachteten Größe, Differenzen von Beobachtungsfehlern darstellen. Liegen nämlich für eine unbekannte Größe X zwei Beobachtungsresultate l_1, l_2 vor, so ist

$$X = l_1 + \varepsilon_1 = l_2 + \varepsilon_2,$$

daher

$$\Delta = l_1 - l_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1.$$

Befolgen die Einzelfehler das Gesetz $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$, so unterliegen die Differenzen (s. Nr. 126 Schluß) dem Gesetz

$$\frac{h}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h^2}{2}\Delta^2};$$

hiernach ist der Mittelwert von Δ gleich $\frac{\sqrt{2}}{h\sqrt{\pi}}$ (s. Nr. 129), also auch gleich $\vartheta\sqrt{2}$, und der Mittelwert von Δ^2 gleich $\frac{1}{h^2}$ (s. Nr. 130), mithin gleich $2\mu^2$. Stehen also s (unabhängige) Beobachtungsdifferenzen $\Delta_1, \Delta_2, \cdots \Delta_s$ zur Verfügung, so kann man, je größer s, um so sicherer setzen:

$$\vartheta\sqrt{2} = \frac{[|\Delta|]}{s}$$

$$2\mu^2 = \frac{[\Delta\Delta]}{s},$$

woraus sich für ϑ und μ die Bestimmungen ergeben:

$$\vartheta = \frac{[|\Delta|]}{s\sqrt{2}}, \tag{1}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{2s}}. \tag{2}$$

Aus n Beobachtungswerten $l_1, l_2, \cdots l_n$ von X lassen sich $s = \frac{n(n-1)}{2}$ Beobachtungsdifferenzen bilden, die indessen nicht sämtlich unabhängig von einander sind; vielmehr lassen sich nur $n-1$ unabhängige aus-

wählen; trotzdem gelten, wie Andrae[1]) und Helmert[2]) nachgewi haben, bei Verwendung aller die Formeln:

$$\vartheta = \frac{[|\Delta|]\sqrt{2}}{n(n-1)},$$

$$\mu = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n(n-1)}}.$$

II. Abschnitt. Kombination von Beobachtungen.

§ 1. Direkte Beobachtungen.

134. Direkte Beobachtungen gleicher Genauigkeit. arithmetische Mittel als die mit dem kleinsten Fehlerri verbundene Bestimmung. Man spricht von direkten Beob tungen, wenn die Messung an der zu bestimmenden Größe s vorgenommen wird.

An einer unbekannten physischen Größe X seien n *gleich ge* Beobachtungen mit den Resultaten $l_1, l_2, \cdots l_n$ vorgenommen wo Wir nehmen an, es lasse sich im voraus eine Kombinationsregel geben, durch deren Anwendung sich aus den Beobachtungsergebni der vorteilhafteste Wert der Unbekannten x ergibt; sie laute:

$$x = f(l_1, l_2, \cdots l_n).$$

Vorausgesetzt, daß die Fehler der Beobachtungen dem Gesetze

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}$$

folgen, soll jener Wert als der vorteilhafteste gelten, der das klei Fehlerrisiko nach sich zieht.

Dies sind die Grundlagen für die folgende Untersuchung.

Bezeichnet man die Ableitung von f in bezug auf l_i mit α_i hat man folgende Entwicklung für $f(X, X, \cdots X)$:

$$f(X, X, \cdots X) = f(l_1 + X - l_1,\ l_2 + X - l_2, \cdots l_n + X - l_n)$$
$$= x + \alpha_1(X - l_1) + \alpha_2(X - l_2) + \cdots + \alpha_n(X - l_n) +$$

wobei Ω die Zusammenfassung der Glieder höherer Ordnung in b auf die Differenzen $X - l_1,\ X - l_2, \cdots$ bezeichnet. Setzt man Differenzen als sehr klein voraus und unterdrückt in Rücksicht da Ω, so wird weiter:

$$f(X, X, \cdots X) = x + X[\alpha] - \alpha_1 l_1 - \alpha_2 l_2 - \cdots - \alpha_n l_n,$$

1) Astron. Nachr. LXXIV (1869). 2) Ibid. LXXXVIII (1876).

und daraus ergibt sich, wenn man sich der Abkürzung

$$f(X, X, \cdots X) - X[\alpha] = k \tag{2}$$

bedient:

$$x = k + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \cdots + \alpha_n l_n. \tag{3}$$

Damit x durch die Beobachtungsergebnisse allein bestimmt sei, muß k eine von X unabhängige Größe bedeuten.

Schreibt man (2) in der Form

$$f(X, X, \cdots X) = k + \alpha_1 X + \alpha_2 X + \cdots + \alpha_n X, \tag{2*}$$

so folgt aus (2*) und (3) durch Subtraktion:

$$f(X, X, \cdots X) - x = \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \cdots + \alpha_n \varepsilon_n.$$

Diese lineare Funktion der Beobachtungsfehler befolgt nach Nr. 126 das Gesetz

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 z^2},$$

wobei

$$H^2 = \frac{h^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}$$

ist.

Setzt man also

$$f(X, X, \cdots X) - x = z,$$

so wird

$$\begin{aligned} X - x &= X - f(X, X, \cdots X) + z \\ &= X - X[\alpha] - k + z \\ &= X(1 - [\alpha]) - k + z \end{aligned}$$

und mit der Abkürzung

$$X(1 - [\alpha]) - k = A$$

weiter

$$X - x = A + z;$$

wird demnach der Fehler in der Bestimmung x, d. i. $X - x$, mit t bezeichnet, so ist vermöge $z = t - A$ und $dz = dt$:

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2(t-A)^2} dt$$

die Wahrscheinlichkeit, daß x innerhalb der Grenzen t und $t + dt$ von X abweiche.

Nach den Ergebnissen der Untersuchung in Nr. 128 wird das der Bestimmung von x anhaftende Fehlerrisiko am kleinsten sein, wenn

$$A = 0 \qquad \text{und} \qquad H \text{ ein Maximum}$$

ist.

Die erste Forderung führt zu der Gleichung

$$X(1 - [\alpha]) - k = 0,$$

bei der Unabhängigkeit zwischen k und X nur erfü

$$k = 0 \qquad \text{und} \qquad [\alpha] = 1.$$

Hiernach sind die Koeffizienten α des Ausdrucks

$$x = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \cdots + \alpha_n l_n,$$

lamit er den vorteilhaftesten Wert darstelle, gemäß den

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 \text{ ein } 1$$

zu bestimmen. Dies aber führt auf

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \frac{1}{n};$$

demnach ist

$$x = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n};$$

d. h. *das arithmetische Mittel aus den Beobachtungsergeb mit dem kleinsten Fehlerrisiko behaftete Bestimmung der*

Das Gesetz, welchem die Fehler dieser Bestimmung den vorstehenden Entwicklungen zufolge

$$\frac{h\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} e^{-nh^2 z^2},$$

ihr Präzisionsmaß ist

$$H = h\sqrt{n},$$

ihr mittlerer Fehler

$$\mu_x = \frac{1}{H\sqrt{2}} = \frac{1}{h\sqrt{2n}} = \frac{\mu}{\sqrt{n}},$$

wenn μ den mittleren Fehler einer Beobachtung bed

Die Genauigkeit des arithmetischen Mittels aus Beobachtungen ist demnach $\sqrt{n}$-mal größer als die G obachtungen selbst.

135. Fortsetzung. *Das arithmetische Mit lichster Wert der Unbekannten.* Zur Bestimmung Größe X liegen n gleich genaue Beobachtungen l_1, wahre Fehler

$$\varepsilon_1 = -l_1 + X$$
$$\varepsilon_2 = -l_2 + X$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\varepsilon_n = -l_n + X$$

das Gesetz

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$$

befolgen mögen. Dann ist die Wahrscheinlich

anzustellende Beobachtungen mit den Fehlern $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ behaftet sein werden, proportional dem Ausdruck

$$e^{-h^2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots+\varepsilon_n^2)};$$

nachdem die Beobachtungen vorliegen, hat die Annahme, x sei der wahre Wert der beobachteten Größe, eine dem Ausdruck

$$e^{-h^2[(-l_1+x)^2+(-l_2+x)^2+\cdots+(-l_n+x)^2]}$$

proportionale Wahrscheinlichkeit; diese wird am größten, wenn

$$(-l_1+x)^2+(-l_2+x)^2+\cdots+(-l_n+x)^2 \text{ ein Minimum} \quad (3)$$

wird. Daraus ergibt sich für x die Bestimmung:

$$x = \frac{l_1+l_2+\cdots+l_n}{n}. \quad (4)$$

Das arithmetische Mittel ist also, die Geltung von (2) vorausgesetzt, derjenige Wert der Unbekannten, welcher der wahrscheinlichsten Hypothese entspricht, der *wahrscheinlichste Wert* derselben.

In der Bedingung (3) spricht sich jenes Prinzip in seiner einfachsten Form aus, das die Grundlage des Ausgleichungsverfahrens „nach der *Methode der kleinsten Quadrate*“ bildet. Dieses Prinzip lautet dahin, *daß der vorteilhafteste Wert der Unbekannten derjenige sei, für welchen die Summe der Quadrate der den Beobachtungen zugeschriebenen (scheinbaren) Fehler ein Minimum ist*[1]).

136. Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen und ihres arithmetischen Mittels. Zur Erledigung dieser Auf-

---

1) Zur Geschichte der Erfindung und Begründung der Methode der kleinsten Quadrate genüge die folgende kurze Notiz. Die erste Veröffentlichung und auch der Name stammt von A. M. Legendre und ist in dem vom 6. März 1805 datierten, 1806 gedruckten, 9 Seiten umfassenden „Appendice“ zu der Schrift: „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes“ enthalten. Der Zeitfolge der Publikation nach kommt der Amerikaner R. Adrain mit seiner 1808 im I. Bande der von ihm selbst herausgegebenen Zeitschrift „The analyste“ niedergelegten Abhandlung „Research concerning the probabilities of the errors etc.“, der wohl unzweifelhaft unabhängig von andern zu der Methode gelangt war. Das Prioritätsrecht der Erfindung gebührt aber C. F. Gauß, der nach mehrfachen eigenen Angaben (s. den 1900 erschienenen Band VIII seiner Werke, p. 136—141) sich seit 1794 im Besitze der Methode befand; er gab ihr auch die erste wissenschaftliche Begründung in der „Theoria motus corporum coelestium“, Hamburg 1809. Auf ihn folgte P. S. de Laplace mit seinen tiefgehenden Untersuchungen über den Gegenstand im IV. Kapitel seiner 1812 zum ersten Male erschienenen „Théorie analytique des probabilités“. Einen gewissen Abschluß in der theoretischen Entwicklung bedeutet die große 1821—1826 in den Schriften der Göttinger gel. Gesellschaft von C. F. Gauß veröffentlichte Abhandlung: „Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae“. — Näheres zur geschichtlichen Seite s. in des Verf.s „Theorie der Beobachtungsfehler“.

gabe legen wir uns folgende Frage vor: Wenn die wahren Fehler der Beobachtungen $l_1, l_2, \cdots l_n$, d. i.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -l_1 + X \\ \varepsilon_2 &= -l_2 + X \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varepsilon_n &= -l_n + X, \end{aligned} \tag{1}$$

das Gesetz

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} \tag{2}$$

befolgen; welchem Gesetze sind dann ihre Abweichungen vom arithmetischen Mittel, die scheinbaren Fehler

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + x \\ \lambda_2 &= -l_2 + x \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \lambda_n &= -l_n + x, \end{aligned} \tag{3}$$

unterworfen?

Zunächst ergibt sich aus der Summierung von (3) mit Rücksicht auf den Wert von x, daß

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0 \tag{4}$$

ist.

Weiter gibt die Subtraktion homologer Gleichungen aus den Systemen (1) und (3):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 - \lambda_1 &= X - x \\ \varepsilon_2 - \lambda_2 &= X - x \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varepsilon_n - \lambda_n &= X - x; \end{aligned} \tag{5}$$

die Summe dieser Gleichungen ist vermöge (4)

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n = n(X - x). \tag{6}$$

Mit Hilfe von (5) und (6) lassen sich die scheinbaren Fehler durch die wahren ausdrücken wie folgt:

$$\lambda_1 = \frac{n-1}{n} \varepsilon_1 - \frac{1}{n} \varepsilon_2 - \frac{1}{n} \varepsilon_3 - \cdots - \frac{1}{n} \varepsilon_n$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{n} \varepsilon_1 + \frac{n-1}{n} \varepsilon_2 - \frac{1}{n} \varepsilon_3 - \cdots - \frac{1}{n} \varepsilon_n.$$

Es stellt sich also jeder scheinbare Fehler als lineare Funktion der wahren Fehler dar, befolgt also auch ein Gesetz von der Form (2), jedoch mit einem andern Präzisionsmaß, das für alle λ dasselbe und nach Gleichung (7), Nr. 126 gleich ist

$$h' = \frac{h}{\sqrt{(n-1)\frac{1}{n^2} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\, h.$$

Die Abweichungen vom arithmetischen Mittel befolgen also das Gesetz

$$\frac{\sqrt{\frac{n}{n-1}}\,h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{n}{n-1}h^2\lambda^2}, \tag{7}$$

das sich von (2) durch ein im Verhältnis $\sqrt{n} : \sqrt{n-1}$ größeres Präzisionsmaß unterscheidet.

Der Durchschnittswert von $|\lambda|$ ist also nach Nr. 129

$$\frac{1}{h\sqrt{\pi\frac{n}{n-1}}},$$

findet sich aber aus der vorhandenen Reihe von Einzelwerten $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ annähernd gleich

$$\frac{[|\lambda|]}{n};$$

setzt man beide Ausdrücke einander gleich und beachtet, daß $\frac{1}{h\sqrt{\pi}}$ der *Durchschnittsfehler* ϑ *einer Beobachtung* ist, so ergibt sich für diesen die Formel:

$$\vartheta = \frac{[|\lambda|]}{\sqrt{n(n-1)}}. \tag{8}$$

Mit Hilfe von (7) erhält man ferner als mittleren Wert von λ^2 nach Nr. 130 den Ausdruck

$$\frac{1}{2\frac{n}{n-1}h^2};$$

aus den zu Gebote stehenden Einzelwerten $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ ergibt er sich annähernd zu

$$\frac{[\lambda\lambda]}{n};$$

setzt man beide Ausdrücke einander gleich und berücksichtigt, daß $\frac{1}{h\sqrt{2}}$ der *mittlere Fehler* μ *einer Beobachtung* ist, so erhält man für diesen die praktisch verwendbare Formel

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}. \tag{9}$$

Der *wahrscheinliche Fehler* r *einer Beobachtung* läßt sich nun aus μ oder ϑ durch einfache Multiplikation mit einem Zahlenkoeffizienten (s. Nr. 132) ableiten.

Nach dem am Schlusse von Nr. 134 gefundenen Resultate steht der *mittlere Fehler* μ_x *des arithmetischen Mittels* zu dem mittleren

Fehler μ einer Beobachtung in der Beziehung, daß $\mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{n}}$; nac
Formel (9) ist also

$$\mu_x = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n(n-1)}}. \qquad (1C$$

137. Direkte Beobachtungen ungleicher Genauigke Begriff des Gewichtes. Eine unbekannte Größe X sei n-m jedoch nicht unter gleichen Umständen beobachtet worden, so d den Beobachtungsergebnissen $l_1, l_2, \cdots l_n$, deren Fehler einzeln d Exponentialgesetz unterworfen sein mögen, verschiedene Genauigk zukommt; die Präzisionsmaße $h_1, h_2, \cdots h_n$ werden als beka vorausgesetzt.

Die Durchführung des in Nr. 134 befolgten Gedankenganges fü zu dem Ergebnis, daß

$$x = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \cdots + \alpha_n l_n$$

den vorteilhaftesten Wert der Unbekannten darstellt, wenn die Ko zienten den Bedingungen:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1, \quad \frac{\alpha_1^2}{h_1^2} + \frac{\alpha_2^2}{h_2^2} + \cdots + \frac{\alpha_n^2}{h_n^2} \text{ ein Minimum}$$

gemäß bestimmt werden; diese Bedingungen ergeben aber:

$$\alpha_1 = \frac{h_1^2}{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2}, \quad \alpha_2 = \frac{h_2^2}{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2}, \quad \cdots.$$

Demnach ist

$$x = \frac{h_1^2 l_1 + h_2^2 l_2 + \cdots + h_n^2 l_n}{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2}$$

der vorteilhafteste, d. i. der mit dem kleinsten Fehlerrisiko verbund Wert der Unbekannten. Es ist dies unter den gemachten Vora setzungen auch der wahrscheinlichste Wert, weil er den Ausdruck

$$e^{-[h_1^2(-l_1+x)^2 + h_2^2(-l_2+x)^2 + \cdots + h_n^2(-l_n+x)^2]}$$

zu einem Maximum macht; denn für den Wert (1) von x wird

$$h_1^2(-l_1+x)^2 + h_2^2(-l_2+x)^2 + \cdots + h_n^2(-l_n+x)^2 \qquad (2$$

ein Minimum.

Man kann die einzelnen Beobachtungen statt durch das Pr zisionsmaß durch den mittleren Fehler charakterisieren; ist μ_1 d mittlere Fehler von l_1, so ist

$$h_1^2 = \frac{1}{2\mu_1^2}$$

zu setzen u. s. w.; dann geht (1) über in

$$x = \frac{\frac{l_1}{\mu_1^2} + \frac{l_2}{\mu_2^2} + \cdots + \frac{l_n}{\mu_n^2}}{\frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2} + \cdots + \frac{1}{\mu_n^2}}.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit der beliebig gewählten positiven Zahl μ^2 und setzt

$$\frac{\mu^2}{\mu_i^2} = p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{3}$$

so wird auch

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{[pl]}{[p]}. \tag{4}$$

Die positiven Zahlen $p_1, p_2, \cdots p_n$, welche dem Gange der Rechnung nach *proportional* sind *den Quadraten der Genauigkeit* der Beobachtungen, bezeichnet man als deren *Gewichte*. Man kann durch entsprechende Wahl von μ^2 bewirken, daß die Gewichte ganze Zahlen werden oder wenigstens bis auf zu vernachlässigende Bruchteile durch ganze Zahlen ersetzt werden können.

Für $\mu_i = \mu$ wird $p_i = 1$; es hat also die eingeführte Zahl μ die Bedeutung des mittleren Fehlers einer fingierten Beobachtung, der das Gewicht 1 zukommt; man nennt aus diesem Grunde μ den *mittleren Fehler der Gewichtseinheit.*

Hätte man $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ Beobachtungen von der Art der fingierten, also vom Gewichte 1, angestellt und hätten p_1 davon das Resultat l_1, p_2 das Resultat l_2, $\cdots$ p_n das Resultat l_n ergeben, so ergäbe sich aus diesen gleich genauen Beobachtungen auch der Mittelwert (4). *Es wiegt demnach eine Beobachtung, deren Gewicht p ist, p Beobachtungen vom Gewichte 1 auf,* zunächst in bezug auf die Bildung des Mittelwertes.

Das Gewicht tritt zu den bisher betrachteten Präzisionsmaßen als neues hinzu.

Sowie die Form (1) des Resultates aus der Bedingung (2), so kann die Form (4) aus der Bedingung:

$$p_1(-l_1 + x)^2 + p_2(-l_2 + x)^2 + \cdots + p_n(-l_n + x)^2 \text{ ein Minimum,} \tag{2*}$$

abgeleitet werden.

Im Falle ungleich genauer Beobachtungen erweitert sich also das am Schlusse von Nr. 135 erkannte Prinzip dahin, daß *die Summe der mit den Gewichten multiplizierten Quadrate der (scheinbaren) Fehler zu einem Minimum zu machen* sei, um den vorteilhaftesten Wert der Unbekannten zu erhalten.

Die Formel (4) kommt auch zur Anwendung, wenn die $l_1, l_2, \cdots l_n$ nicht unmittelbare Beobachtungsresultate, sondern arithmetische Mittel aus Beobachtungsreihen darstellen; $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_n$ bedeuten dann die mittleren Fehler dieser arithmetischen Mittel. Sind letztere aus gleich

genauen Beobachtungen vom mittleren Fehler μ, in den Anzahl $\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_n$ entstanden, so ist

$$\mu_i^2 = \frac{\mu^2}{\nu_i};$$

wählt man also die einzelne Beobachtung als Gewichtseinheit, wird das Gewicht der „Beobachtung" l_i:

$$p_i = \frac{\mu^2}{\mu_i^2} = \nu_i.$$

Für die wahren und scheinbaren Fehler der Beobachtungen l stehen die Gleichungen:

$$\begin{array}{lcl} \varepsilon_1 = -l_1 + X & & \lambda_1 = -l_1 + x \\ \varepsilon_2 = -l_2 + X & (5) & \lambda_2 = -l_2 + x \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varepsilon_n = -l_n + X & & \lambda_n = -l_n + x. \end{array}$$

Aus dem zweiten System folgt mit Rücksicht auf (4):

$$p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \cdots + p_n\lambda_n = [p\lambda] = 0.$$

Durch Verbindung beider Systeme ergibt sich wegen (7):

$$[p\varepsilon] = [p]\,(X - x),$$

woraus

$$X - x = \frac{p_1}{[p]}\varepsilon_1 + \frac{p_2}{[p]}\varepsilon_2 + \cdots + \frac{p_n}{[p]}\varepsilon_n;$$

demnach befolgt der Fehler in der Bestimmung x das Gesetz:

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 z^2},$$

worin

$$\frac{1}{H^2} = \frac{\frac{p_1^2}{[p]^2}}{h_1^2} + \frac{\frac{p_2^2}{[p]^2}}{h_2^2} + \cdots + \frac{\frac{p_n^2}{[p]^2}}{h_n^2};$$

nun ist aber $h_i^2 = \frac{1}{2\mu_i^2} = \frac{p_i}{2\mu^2}$, folglich

$$H^2 = \frac{[p]}{2\mu^2};$$

daraus aber ergibt sich der *mittlere Fehler des Mittels* x:

$$\mu_x = \frac{1}{H\sqrt{2}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}. \qquad (8$$

Mit der Formel (6) in Nr. 134 verglichen zeigt dies, daß das gegenwärtige Mittel äquivalent ist einem gewöhnlichen arithmetischen Mittel aus $[p]$ Beobachtungen vom Gewichte 1.

Setzt man in (8) für die einzelnen p ihre Ausdrücke aus (3), so kommt man zu einer Formel, welche den mittleren Fehler von x durch die mittleren Fehler der zu seiner Berechnung verwendeten l ausdrückt, nämlich:

$$\mu_x = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2} + \cdots + \frac{1}{\mu_n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{\mu\mu}\right]}}. \qquad (9)$$

Noch handelt es sich darum, mit Hilfe der bekannten Gewichte nd der scheinbaren Fehler die Genauigkeitsbestimmung durchzuführen, ämlich den mittleren Fehler der Gewichtseinheit und des Mittels x u berechnen.

Zwischen dem mittleren Fehler μ_i einer Beobachtung vom Geichte p_i und dem mittleren Fehler μ einer Beobachtung vom Geichte 1 besteht nach (3) die Beziehung:

$$\mu = \mu_i \sqrt{p_i}.$$

Überträgt man diese Beziehung auf die einzelnen Abweichungen vom Mittel, so wird der Abweichung λ_i einer Beobachtung vom Gewichte p_i bei einer Beobachtung vom Gewichte 1 die Abweichung

$$\lambda_i' = \lambda_i \sqrt{p_i}$$

ntsprechen. Aus den transformierten Abweichungen $\lambda_1', \lambda_2', \cdots \lambda_n'$ ber bestimmt sich der *mittlere Fehler der Gewichtseinheit* gemäß der ormel (9) der vorigen Nummer

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda'\lambda']}{n-1}};$$

hrt man die scheinbaren Fehler λ [nach (6)] selbst ein, so wird o endgiltig

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{n-1}}. \qquad (10)$$

tels derselben Schlüsse erhält man für den *durchschnittlichen Fehler Gewichtseinheit* die Formel:

$$\vartheta = \frac{[|\sqrt{p}\lambda|]}{\sqrt{n(n-1)}}. \qquad (11)$$

Mit Benützung von (8) ergibt sich nun für den *mittleren Fehler Mittels* der Ausdruck:

$$\mu_x = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{(n-1)[p]}}. \qquad (12)$$

ie Formeln (9) und (12) werden im allgemeinen nicht übereinende Werte liefern, weil die erste mit den mittleren Fehlern, die mit den wirklichen Abweichungen der Beobachtungen rechnet.

138. Zusammenstellung der Resultate. a) Beobachtunge gleicher Genauigkeit.

Man rechnet aus $l_1, l_2, \cdots l_n$:

$$x = \frac{[l]}{n},$$

daraus die

$$\lambda_i = -l_i + x \qquad (i = 1, 2, \ldots$$

deren richtige Berechnung mittels der Gleichung $[\lambda] = 0$ kontrolli werden kann; weiter

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}$$

und hieraus

$$\mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{n}};$$

das Resultat der Ausgleichung stellt man kurz durch

$$x \mp \mu_x$$

dar.

Die Summe $[\lambda\lambda]$ rechnet man aus den einzelnen λ mit Hilfe Quadrattafeln. Man kann sie zur Kontrolle auch aus den l rech auf Grund der Gleichung:

$$[\lambda\lambda] = [ll] - \frac{[l]^2}{n},$$

die sich leicht aus den beiden ersten Ansätzen ableiten läßt.

b) Beobachtungen ungleicher Genauigkeit. Sind außer $l_1, l_2, \cdots l_n$ deren Gewichte $p_1, p_2, \cdots p_n$ gegeben, so rechne man

$$x = \frac{[pl]}{[p]},$$

daraus die

$$\lambda_i = -l_i + x,$$

welche bei richtiger Ausführung der Rechnung die Kontrolle $[p\lambda] = 0$ bestehen müssen; dann

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{n-1}}$$

und

$$\mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}};$$

das Resultat ist wieder in der Form

$$x \mp \mu_x$$

zu geben.

Waren die mittleren Fehler der l gegeben, so hat die Gewich

echnung voranzugehen; man wählt für die p_i in passender We
alen, die den $\frac{1}{\mu_i^2}$ proportional sind.

Die Summe $[p\lambda\lambda]$ kann außer aus den λ auch aus den l na
Formel

$$[p\lambda\lambda] = [pll] - \frac{[pl]^2}{[p]}$$

echnet werden, die sich aus den zwei ersten Ansätzen ergibt.

Die Zusammenstellung nimmt lediglich auf die Genauigkeits-
timmung durch den mittleren Fehler Rücksicht. Für weiter-
ende Untersuchungen sind die nötigen Formeln den vorangehenden
mmern zu entnehmen.

139. Beispiel LV. *Experimentelle Bestimmung der konstanten ahrscheinlichkeit eines Ereignisses.*

Wir stellen dieses Beispiel aus mehrfachen Gründen an die Spitze.
mal handelt es sich um Beobachtungen, deren Fehler im strengen
ne den Charakter des Zufälligen besitzen. Ferner ist die un-
kannte Größe nicht eine physische, sondern eine Zahlengröße und
solche streng definiert. Schließlich sind Untersuchungen von der
r durchgeführten Art grundlegend für die Behandlung von Fragen
theoretischen Statistik.

a) Aus einer Urne mit sechs mit den Nummern 1 bis 6 be-
hneten Kügelchen sind Ziehungen je eines Kügelchens mit Zurück-
ng des jeweilen gezogenen ausgeführt worden, und zwar in
37 Reihen zu je $s = 100$ Ziehungen; die gezogenen Nummern
den notiert[1]).

Das Ereignis E sei das *Erscheinen einer ungeraden Nummer.*
t man sich auf den Standpunkt, die Zusammensetzung des Urnen-
tes sei unbekannt, so liefert jede Reihe in dem Quotienten $\frac{m}{100}$,
Zähler die Anzahl der erschienenen ungeraden Nummern be-
eine Beobachtung l der unbekannten Wahrscheinlichkeit X für
scheinen einer solchen Nummer, und die 37 so erhaltenen Be-
ngen sind als gleich genau zu betrachten, weil sie aus Ziehungs-
gleichen Umfanges hervorgegangen sind (s. Nr. 79).

im vorliegenden Falle der wahre Wert X bekannt, nämlich
o ist es möglich, auch die wahren Fehler zu bestimmen und
etischen Resultate an dem Beobachtungsmaterial in mannig-
chtung zu prüfen.

Beobachtungsmaterial sowie die zu dieser Prüfung erforder-
lenreihen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

---

[1]) Versuche sind von meinen Hörern im Wintersemester 1900 aus-
len.

Nr.	Beobachtung l	Scheinb. Fehler λ	Wahre Fehler ε	$\lambda\lambda$	$\varepsilon\varepsilon$	λ, geordnet n. d. absoluten Beträge	ε, geordnet n. d. absoluten Beträge
1	0,56	— 0,059	— 0,06	0,003481	0,0036	0,001	0,00
2	0,47	+ 0,031	+ 0,03	0,000961	0,0009	0,001	0,00
3	0,49	+ 0,011	+ 0,01	0,000121	0,0001	0,001	0,00
4	0,46	+ 0,041	+ 0,04	0,001681	0,0016	0,001	0,00
5	0,52	— 0,019	— 0,02	0,000361	0,0004	0,009	0,01
6	0,53	— 0,029	— 0,03	0,000841	0,0009	0,009	0,01
7	0,58	— 0,079	— 0,08	0,006241	0,0064	0,011	0,01
8	0,46	+ 0,041	+ 0,04	0,001681	0,0016	0,011	0,01
9	0,50	+ 0,001	0,00	0,000001	0,0000	0,011	0,01
10	0,42	+ 0,081	+ 0,08	0,006561	0,0064	0,011	0,01
11	0,54	— 0,039	— 0,04	0,001521	0,0016	0,019	0,02
12	0,52	— 0,019	— 0,02	0,000361	0,0004	0,019	0,02
13	0,56	— 0,059	— 0,06	0,003481	0,0036	0,019	0,02
14	0,50	+ 0,001	0,00	0,000001	0,0000	0,019	0,02
15	0,44	+ 0,061	+ 0,06	0,003721	0,0036	0,021	0,02
16	0,49	+ 0,011	+ 0,01	0,000121	0,0001	0,029	0,03
17	0,56	— 0,059	— 0,06	0,003481	0,0036	0,031	0,03
18	0,50	+ 0,001	0,00	0,000001	0,0000	0,031	0,03
19	0,56	— 0,059	— 0,06	0,003481	0,0036	0,031	0,03
20	0,47	+ 0,031	+ 0,03	0,000961	0,0009	0,031	0,03
21	0,47	+ 0,031	+ 0,03	0,000961	0,0009	0,039	0,04
22	0,51	— 0,009	— 0,01	0,000081	0,0001	0,039	0,04
23	0,52	— 0,019	— 0,02	0,000361	0,0004	0,041	0,04
24	0,48	+ 0,021	+ 0,02	0,000441	0,0004	0,041	0,04
25	0,56	— 0,059	— 0,06	0,003481	0,0036	0,051	0,05
26	0,43	+ 0,071	+ 0,07	0,005041	0,0049	0,051	0,05
27	0,58	— 0,079	— 0,08	0,006241	0,0064	0,059	0,06
28	0,52	— 0,019	— 0,02	0,000361	0,0004	0,059	0,06
29	0,49	+ 0,011	+ 0,01	0,000121	0,0001	0,059	0,06
30	0,49	+ 0,011	+ 0,01	0,000121	0,0001	0,059	0,06
31	0,44	+ 0,061	+ 0,06	0,003721	0,0036	0,059	0,06
32	0,50	+ 0,001	0,00	0,000001	0,0000	0,061	0,06
33	0,54	— 0,039	— 0,04	0,001521	0,0016	0,061	0,06
34	0,51	— 0,009	— 0,01	0,000081	0,0001	0,071	0,07
35	0,45	+ 0,051	+ 0,05	0,002601	0,0025	0,079	0,08
36	0,47	+ 0,031	+ 0,03	0,000961	0,0009	0,079	0,08
37	0,45	+ 0,051	+ 0,05	0,002601	0,0025	0,081	0,08
	18,54 [l]	+ 0,651 — 0,654	+ 0,63 — 0,67	0,067757 [λλ]	0,0678 [εε]	1,305 [|λ|]	1,30 [|ε|]
		— 0,003 [λ]	— 0,04 [ε]				

Nach Addition der ersten Kolonne berechnet man das arithmetische Mittel

$$x = \frac{18,54}{37} = 0,501,$$

mit Hilfe desselben die λ; davon fallen 21 positiv, 16 negativ au (gegenüber der wahrscheinlichsten Verteilung 19, 18 oder 18, 19)

ihre Summe ist $-0{,}00\dot{3}$ statt 0, was von der Abkürzung des Wertes von x herrührt.

Mit dem wahren Werte $X = \frac{1}{2}$ sind die wahren Fehler ε gerechnet worden.

Für den mittleren Fehler einer Beobachtung ergeben sich die beiden Bestimmungen:

$$\mu = \sqrt{\frac{0{,}067757}{36}} = 0{,}0434,$$

$$\mu = \sqrt{\frac{0{,}0678}{37}} = 0{,}0428,$$

aus diesen das Präzisionsmaß:

$$h = \frac{1}{0{,}0434\sqrt{2}} = 16{,}32,$$

$$h = \frac{1}{0{,}0428\sqrt{2}} = 16{,}53.$$

Ebenso erhält man für den durchschnittlichen Fehler zwei Bestimmungen:

$$\vartheta = \frac{1{,}305}{\sqrt{37 \cdot 36}} = 0{,}0358,$$

$$\vartheta = \frac{1{,}30}{37} = 0{,}0351$$

und aus diesen für das Präzisionsmaß die Werte:

$$h = \frac{1}{0{,}0358\sqrt{\pi}} = 15{,}75,$$

$$h = \frac{1}{0{,}0351\sqrt{\pi}} = 16{,}05.$$

Diesen aus den Abweichungen berechneten Werten des Präzisionsmaßes steht derjenige Wert gegenüber, der sich aus der Theorie selbst ergibt (s. Nr. 79), nämlich

$$h = \sqrt{\frac{100}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = 14{,}14.$$

Aus dem ersten Werte von μ berechnet sich der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung:

$$r = 0{,}4769 \cdot 0{,}0434 = 0{,}0292,$$

durch Abzählung an den in steigender Größe geordneten λ (wie ε) findet man

$$r = 0{,}031, \text{ beziehungsweise } = 0{,}03.$$

Der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels, aus dem ersten μ gerechnet, ist

$$\mu_x = \frac{0{,}0434}{\sqrt{37}} = 0{,}0072;$$

der wahre Wert 0,5 liegt innerhalb der hierdurch bestimmten Grenzen:

$$0{,}501 \mp 0{,}007.$$

Die Verteilung der λ nach ihrer absoluten Größe, verglichen mit derjenigen, welche sich aus dem Fehlergesetz

$$\frac{16{,}32}{\sqrt{\pi}}\, e^{-16{,}32^2 \lambda^2}$$

ergibt, zeigt sich wie folgt:

$\lvert\lambda\rvert$ zwischen	Anzahl	
	beobachtet	berechnet
0,000 und 0,020	14	13,2
" " 0,040	22	23,8
" " 0,060	31	30,8
" " 0,080	36	34,3
" " 0,100	37	36,2

Man kann also sagen, daß die Beobachtungsreihe, obwohl nur von mäßigem Umfange, die theoretischen Resultate in befriedigender Weise wiedergibt.

b) Das Ereignis E sei das *Erscheinen der Nummer 1.* Aus theoretischen Gründen ist hier eine genauere Beobachtungsreihe zu erwarten; denn der wahre Wert X der Wahrscheinlichkeit von E, $\frac{1}{6}$, gibt mit der entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{6}$ ein kleineres Produkt als im Falle a), wo beide Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{2}$ waren, und daraus entspringt eine größere Präzision. Hauptsächlich um zu zeigen, daß die Erfahrung diese theoretische Erwartung bestätigt, ist die betreffende Beobachtungsreihe hier mitgeteilt; die Rechnung ist jedoch nur mit den λ geführt.

Nr.	Beob-achtung l	Schein-barer Fehler λ	$\lambda\lambda$	λ, geordnet n. d. absoluten Betrage
1	0,17	— 0,0049	0,000024	0,0049
2	0,20	— 0,0349	0,001218	0,0049
3	0,10	+ 0,0651	0,004238	0,0049
4	0,17	— 0,0049	0,000024	0,0049
5	0,12	+ 0,0451	0,002034	0,0049
6	0,15	+ 0,0151	0,000228	0,0049
7	0,19	— 0,0249	0,000620	0,0051
8	0,22	— 0,0549	0,003014	0,0051
9	0,17	— 0,0049	0,000024	0,0051
10	0,19	— 0,0249	0,000620	0,0149
11	0,14	+ 0,0251	0,000630	0,0149
12	0,22	— 0,0549	0,003014	0,0149
13	0,18	— 0,0149	0,000222	0,0149
14	0,17	— 0,0049	0,000024	0,0151
15	0,13	+ 0,0351	0,001232	0,0151
16	0,12	+ 0,0451	0,002034	0,0151
17	0,18	— 0,0149	0,000222	0,0151
18	0,15	+ 0,0151	0,000228	0,0151
19	0,17	— 0,0049	0,000024	0,0151
20	0,16	+ 0,0051	0,000026	0,0249
21	0,15	+ 0,0151	0,000228	0,0249
22	0,15	+ 0,0151	0,000228	0,0249
23	0,18	— 0,0149	0,000222	0,0251
24	0,16	+ 0,0051	0,000026	0,0251
25	0,14	+ 0,0251	0,000630	0,0251
26	0,18	— 0,0149	0,000222	0,0251
27	0,17	— 0,0049	0,000024	0,0251
28	0,14	+ 0,0251	0,000630	0,0349
29	0,13	+ 0,0351	0,001232	0,0351
30	0,15	+ 0,0151	0,000228	0,0351
31	0,22	— 0,0549	0,003014	0,0451
32	0,19	— 0,0249	0,000620	0,0451
33	0,16	+ 0,0051	0,000026	0,0549
34	0,26	— 0,0949	0,009006	0,0549
35	0,14	+ 0,0251	0,000630	0,0549
36	0,15	+ 0,0151	0,000228	0,0651
37	0,14	+ 0,0251	0,000630	0,0949
	6,11 [l]	+ 0,4569 — 0,4582 — 0,0013 [λ]	0,037524 [$\lambda\lambda$]	0,9151 [λ]

Daraus berechnet sich das arithmetische Mittel:

$$x = \frac{6,11}{37} = 0,1651$$

gegenüber dem wahren Werte 0,1666 · · ·; der mittlere Fehler einer Beobachtung:

$$\mu = \sqrt{\frac{0,037524}{36}} = 0,0323;$$

das Präzisionsmaß:

$$h = \frac{1}{0{,}0323\sqrt{2}} = 21{,}46,$$

für das sich nach der theoretischen Formel (Nr. 79) der Wert $\sqrt{\frac{100}{2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}} = 18{,}97$ ergibt; der durchschnittliche Fehler einer Beobachtung:

$$\vartheta = \frac{0{,}9151}{\sqrt{37\cdot 36}} = 0{,}0251;$$

das Verhältnis:

$$\frac{\mu}{\vartheta} = 1{,}287,$$

dessen theoretischer Wert (Nr. 132) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1{,}236$ ist; der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels:

$$\mu_x = \frac{0{,}0323}{\sqrt{37}} = 0{,}0053,$$

so daß der wahre Wert innerhalb der durch x und μ_x bestimmten Grenzen

$$0{,}1651 \mp 0{,}0053$$

enthalten ist. Die beobachtete und die theoretische Verteilung der λ gestaltet sich wie folgt:

$\|\lambda\|$ zwischen	Anzahl	
	beobachtet	berechnet
0,00 und 0,01	9	8,7
„ „ 0,02	19	16,9
„ „ 0,03	27	23,5
„ „ 0,04	30	28,6
„ „ 0,05	32	32,2
„ „ 0,08	36	36,4

Theoretisch war die Genauigkeit dieser zweiten Beobachtungsreihe

$$\sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{36}}} = 1{,}341$$

mal größer zu erwarten als die der ersten; nach den λ beurteilt stellt sie sich

$$21{,}46 : 16{,}32 = 1{,}315$$

mal größer dar.

140. Beispiel LVI. Im Laufe der Jahre 1892—1894 wiederholte Bestimmungen der Polhöhe von Kapstadt haben die aus der

nachfolgenden Tabelle ersichtlichen 15 Werte ergeben, welche als gleich genaue Beobachtungen zu behandeln und auszugleichen sind[1]).

Nr.	l	λ	$\lambda\lambda$
1	— 33° 56′ 3″,48	— 0,22	0,0484
2	3 ,50	— 0,24	0,0576
3	3 ,50	— 0,24	0,0576
4	3 ,32	— 0,06	0,0036
5	3 ,09	+ 0,17	0,0289
6	2 ,98	+ 0,28	0,0784
7	3 ,07	+ 0,19	0,0361
8	3 ,28	— 0,02	0,0004
9	3 ,27	— 0,01	0,0001
10	3 ,20	+ 0,06	0,0036
11	3 ,30	— 0,04	0,0016
12	3 ,25	+ 0,01	0,0001
13	3 ,11	+ 0,15	0,0225
14	3 ,30	— 0,04	0,0016
15	3 ,27	— 0,01	0,0001
	48″,92	+ 0,86	0,3406
		— 0,88	
		— 0,02	

Man rechnet:

$$x = \frac{48'',92}{15} = 3'',26$$

$$\mu = \sqrt{\frac{0,3406}{14}} = 0'',16$$

$$\mu_x = \frac{0'',16}{\sqrt{15}} = 0'',04$$

und kann als Ergebnis der Ausgleichung hinstellen:

$$-\,33^0\,56'\,3'',26 \mp 0'',04.$$

141. Beispiel LVII. Zur Bestimmung der Polhöhe der großen Kuppel des Astrophysikalischen Observatoriums bei Potsdam wurden in den Jahren 1892—1893 wiederholte Beobachtungen nach der Horrebow-Methode an Sternpaaren vorgenommen. Dieselben sind gruppenweise zu Mittelwerten vereinigt worden. Die Mittelwerte der so gebildeten 11 Gruppen nebst den Anzahlen der dabei verwendeten Sternpaare sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Aus denselben ist das Schlußresultat zu ziehen und seine Genauigkeit zu bestimmen[2]).

---

1) Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariation im Dezember 1897, von Th. Albrecht. Berlin 1898, p. 20. — Die l sind hier nicht einfache Beobachtungen, sondern Mittelwerte von Beobachtungsreihen und als solche nicht von völlig gleicher Genauigkeit. Sie sind dem Zwecke entsprechend, dem sie zu dienen hatten, nach der Zeitfolge geordnet.

2) Die Polhöhe von Potsdam. 1. Heft. Veröffentlichung des Königl. Preuß. Geodät Institutes. Berlin 1898, p. 122.

Die Anzahlen der Sternpaare werden als Gewichte zu v sein (s. Nr. 137).

Nr.	l	Paare p	pl	λ	$\lambda\lambda$
1	52° 22′ 53″,98	99	97,02	— 0,02	0,0004
2	53 ,86	118	101,48	+ 0,10	0,0100
3	53 ,95	114	108,30	+ 0,01	0,0001
4	54 ,01	142	143,42	— 0,05	0,0025
5	54 ,06	163	172,78	— 0,10	0,0100
6	53 ,98	192	188,16	— 0,02	0,0004
7	53 ,91	158	143,78	+ 0,05	0,0025
8	53 ,97	102	98,94	— 0,01	0,0001
9	53 ,93	103	95,79	+ 0,03	0,0009
10	53 ,90	131	117,90	+ 0,06	0,0036
11	53 ,91	90	81,90	+ 0,05	0,0025
		1412 [p]	1349,47 [pl]		

Die Kolonne pl ist mit den Resten von l gerechnet, we Abtrennung von 52° 22′ 53″ übrig bleiben.

Man bestimmt nun: das arithmetische Mittel:

$$x = \frac{1349,47}{1412} = 0'',96;$$

den mittleren Fehler der Gewichtseinheit, d. i. der Polhöhenbe aus einem Sternpaare:

$$\mu = \sqrt{\frac{4,3873}{10}} = 0'',66;$$

den mittleren Fehler des Mittels:

$$\mu_x = \frac{0,66}{\sqrt{1412}} = 0'',018.$$

Das Ergebnis der Ausgleichung ist hiernach:

$$52^0\, 22'\, 53'',96 \mp 0'',018.$$

142. Beispiel LVIII. Im Jahre 1880 ist in der N Berlin eine Grundlinie in zehn nahezu gleichen Teilstrecken durchschnittlichen Länge von 234 m gemessen worden. J strecke wurde zweimal, hin und zurück, gemessen. In der na den Tabelle sind die arithmetischen Mittel der beiden Messu nisse und ihre Differenz angegeben[1]). Aus den Differenzen (s ist zunächst die Genauigkeit der Messung einer Teilstrecke a

1) Die Neumessung der Grundlinien bei Strehlen, Berlin und B öffentlichung des Königl. Preuß. Geodät. Institutes, 1897, p. 84 ff.

Strecke	Mittel aus beiden Messungen in m	Differenz Δ in mm	ΔΔ
1	236,459 785	— 0,040	0,001 600
2	236,506 768	— 0,026	0,000 676
3	236,492 006	+ 0,240	0,057 600
4	236,471 427	— 0,031	0,000 961
5	243,428 614	+ 1,573	2,474 329
6	232,548 466	+ 0,102	0,010 404
7	228,625 791	— 0,096	0,009 216
8	228,616 538	— 0,120	0,014 400
9	228,552 732	— 1,363	1,857 769
10	228,710 183	— 0,195	0,038 025
	2 336,412 310		4,464 980 [ΔΔ]

Nach Formel (2), Nr. 133, berechnet sich

$$\mu = \sqrt{\frac{4,464980}{20}} = 0^{mm},473$$

ittlerer Fehler der einmaligen Messung einer Länge von 234 m, ß der relative mittlere Fehler einer solchen Messung

$$\frac{0,473}{234000} \text{ oder } \frac{1}{500000} \text{ der Länge}$$

ıcht. Der mittlere Fehler des Mittels aus zwei Messungen einer ›n Strecke bestimmt sich hieraus zu

$$\mu_1 = \frac{0,473}{\sqrt{2}} = 0^{mm},334,$$

ʒt also $\frac{1}{700000}$ der Länge.

.43. Funktionen direkt beobachteter Größen. Es sei $F(X_1, X_2, \cdots X_n)$ eine beliebige Funktion der unabhängigen ·n $X_1, X_2, \cdots X_n$; für diese seien durch direkte Beobach- die vorteilhaftesten Werte $x_1, x_2, \cdots x_n$ mit ihren mittleren rn $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_n$ gefunden worden. Man soll den vorteilhaftesten f von F und seine Genauigkeit, ausgedrückt durch den mittleren r, bestimmen.

)ie erste dieser Aufgaben ist unmittelbar gelöst; denn die vor- fteste Bestimmung von F ergibt sich aus den vorteilhaftesten ɜn der Elemente; also ist

$$f = F(x_1, x_2, \cdots x_n). \tag{1}$$

Für die Lösung der zweiten Aufgabe ist die Grundlage in Nr. 126 ›en. Sind die wahren Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ der Bestimmungen $_1, \cdots x_n$ sehr klein, so kann mit Außerachtlassung von Gliedern hren Potenzen und Produkten gesetzt werden:

$$F = F(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, \cdots x_n + \varepsilon_n) = f + \frac{\partial f}{\partial x_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\varepsilon_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\varepsilon_n,$$

woraus

$$F - f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\varepsilon_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\varepsilon_n.$$

Befolgen nun die Fehler ε_i $(i = 1, 2, \cdots n)$ das Gesetz

$$\frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 \varepsilon_i^2},$$

so befolgt der Fehler in der Bestimmung f von F das Gesetz

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 \varepsilon^2},$$

wobei

$$\frac{1}{H^2} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2}{h_1^2} + \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}{h_2^2} + \cdots + \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2}{h_n^2};$$

nun ist aber

$$\frac{1}{2h_i^2} = \mu_i^2$$

das Quadrat des mittleren Fehlers von x_1,

$$\frac{1}{2H^2} = \mu_f^2$$

das Quadrat des mittleren Fehlers in der Bestimmung f von F; die obige Gleichung ergibt also:

$$\mu_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \mu_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \mu_n^2}. \tag{2}$$

Damit ist die allgemeine Lösung der gestellten Aufgabe, das Gesetz gefunden, nach welchem sich die Unsicherheit in der Bestimmung der Rechenelemente $x_1, x_2, \cdots x_n$ auf das aus ihnen abgeleitete Resultat f überträgt.

Liegt für jede der Größen $X_1, X_2, \cdots X_n$ nur *eine* Beobachtung $l_1, l_2, \cdots l_n$ vor, so ist $x_1 = l_1$, $x_2 = l_2$, $\cdots$ $x_n = l_n$ zu setzen, und es bedeutet dann μ_i den mittleren Fehler der Beobachtung l_i.

Ist insbesondere

$$F = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \tag{3}$$

so ist

$$f = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

und μ_f, weil die sämtlichen Ableitungen von f den Wert 1 haben, nimmt den Ausdruck an:

$$\mu_f = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_n^2}, \tag{3*}$$

eine Formel, die auch dann zur Anwendung kommt, wenn mehre

abhängige Fehlerquellen, die einzeln durch die mittleren Fehler $, \mu_2, \cdots \mu_n$ charakterisiert sind, sich zu einem Gesamtfehler vernigen.

Sind alle Elemente mit gleicher Genauigkeit bestimmt, so daß $= \mu_2 = \cdots = \mu_n = \mu$ ist, so gilt für den letzten Fall die Formel:

$$\mu_f = \mu \sqrt{n}. \tag{3**}$$

wächst also der mittlere Fehler der Summe gleich genau bemmter Summanden wie die Quadratwurzel aus deren Anzahl.

Ist hingegen

$$F = nX, \tag{4}$$

eine Konstante und x die Bestimmung von X, μ ihr mittlerer hler, so hat man

$$f = nx$$

d

$$\mu_f = n\mu. \tag{4*}$$

r mittlere Fehler eines Vielfachen wächst also wie dieses selbst.

144. Beispiel LIX. a) In Nr. 130 b) ist die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen der Nummer 1 aus einer Urne experimentell timmt worden, und es ergab sich dafür der Wert

$$x = 0{,}1651$$

t dem mittleren Fehler

$$\mu = 0{,}0053.$$

Auf Grund dieses Resultates soll die Wahrscheinlichkeit F und mittlerer Fehler bestimmt werden, daß in 6 Ziehungen die mmer 1 mindestens ein- und höchstens dreimal erscheinen werde.

Es ist

$$F = \binom{6}{3} X^3 (1 - X)^3 + \binom{6}{2} X^2 (1 - X)^4 + \binom{6}{1} X (1 - X)^5;$$

vorteilhafteste Bestimmung hierfür ist

$$\begin{aligned} f &= 20x^3 (1 - x)^3 + 15x^2 (1 - x)^4 + 6x (1 - x)^5 \\ &= x(11x^2 + 3x + 6)(1 - x)^3 = 0{,}6530 \end{aligned}$$

l ihr mittlerer Fehler, da

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = 60x^2 (1 - x)^2 (1 - 2x) + 30x (1 - x)^3 (1 - 3x) \\ + 6 (1 - x)^4 (1 - 6x) = 2{,}232 \end{aligned}$$

kommt gleich

$$\mu_f = \frac{\partial f}{\partial x} \mu = 2{,}232 \cdot 0{,}0053 = 0{,}0119.$$

Das Schlußresultat kann in der Form gegeben werden: Die vergte Wahrscheinlichkeit hat die mittleren Grenzen

$$0{,}6530 \mp 0{,}0119.$$

b) Die in Nr. 142 besprochene Berliner Grundlinie stellt
Summe von zehn Teilstrecken dar; ihre vorteilhafteste Best
ist die Summe der für die Teilstrecken gefundenen Mittelwer

$$2336^m,412310;$$

da jede Teilstrecke bei einmaliger Messung mit dem mittlere
$0^{mm},473$ behaftet ist, so ist der mittlere Fehler einer ein
Messung der ganzen Grundlinie nach (3**) der vorigen Num

$$0^{mm},473\sqrt{10} = 1^{mm},494, \quad \text{d. i. } \frac{1}{1\,560\,000} \text{ der Länge,}$$

und der mittlere Fehler des arithmetischen Mittel beider Me
d. i. des obigen Resultates:

$$\frac{1^{mm},494}{\sqrt{2}} = 1^{mm},057, \quad \text{d. i. } \frac{1}{2\,210\,000} \text{ der Länge.}$$

c) Im Jahre 1892 wurde bei Bonn eine Grundlinie sei
Preußischen Landesaufnahme viermal, je zweimal in jeder R
und seitens des Geodätischen Institutes zweimal, je einmal
Richtung, im Ganzen also sechsmal gemessen; die Messun
ersten und zweiten Anstalt erfolgten mit verschiedenen Ap
Die Grundlinie wurde dabei nicht in einem Zuge, sondern in 1
eingeschaltete Zwischenpunkte hergestellten Abschnitten gem

In der nachstehenden Tabelle sind die Mittelwerte aus
die einzelnen Strecken gefundenen Längen und ihre mittleren
zusammengestellt; gleichzeitig sind die Quadrate dieser letzt
geführt.

Strecke	Mittelwert der Länge in m	μ in mm	$\mu\mu$
1	234,06008	0,44	0,1936
2	155,97226	0,27	0,0729
3	249,78797	0,33	0,1089
4	155,98596	0,09	0,0081
5	156,10429	0,22	0,0484
6	156,05705	0,36	0,1296
7	156,08547	0,27	0,0729
8	155,97206	0,19	0,0361
9	156,16567	0,32	0,1024
10	156,03199	0,21	0,0441
11	156,13442	0,23	0,0529
12	156,12006	0,25	0,0625
13	155,96778	0,17	0,0289
14	156,06933	0,28	0,0784
15	156,45838	0,35	0,1225
	2512,97277		1,1622 $[\mu\mu]$

1) Die [illegible] der Grundlinien bei Strehlen, Berlin und Bon
öffentl[illegible] Preuß. Geod. Inst., 1897, p. 77—78.

Nach Formel (3*) der vorigen Nummer bestimmt sich der mittlere Fehler der Gesamtlänge zu

$$\sqrt{1{,}1622} = 1^{mm}{,}078, \text{ d. i. } \frac{1}{2\,330\,000} \text{ der Länge.}$$

§ 2. Vermittelnde Beobachtungen.

145. Stellung der Aufgabe. Vorteilhafteste Kombination der Beobachtungen nach dem Prinzip des kleinsten Fehlerrisikos. Eine der unmittelbaren Beobachtung zugängliche Größe V stehe mit den Unbekannten $X, Y, Z, \cdots$, deren Anzahl u sei, in der Beziehung:

$$aX + bY + cZ + \cdots - V = 0.$$

Zu jeder Beobachtung l_ν von V gehöre ein System von Werten

$$a_\nu, \quad b_\nu, \quad c_\nu, \quad \cdots$$

der Koeffizienten, entweder a priori bekannt oder auch durch Beobachtung festgestellt und in diesem Falle als frei von Fehlern angesehen. Ist ε_ν der wahre Fehler von l_ν, so gibt diese Beobachtung Anlaß zu der Gleichung:

$$\varepsilon_\nu = -l_\nu + a_\nu X + b_\nu Y + c_\nu Z + \cdots. \tag{1}$$

Werden n von einander unabhängige Beobachtungen angestellt, so ergibt sich ein System von n Gleichungen der Form (1).

Wäre $n = u$ und setzte man die unbekannten Fehler ε_ν sämtlich gleich Null, so ergäbe sich ein zur Bestimmung von Werten der Unbekannten gerade ausreichendes System. Diese Werte wären aber nicht die wahren, und es gäbe auch kein Mittel, ihre Genauigkeit zu beurteilen.

Ist jedoch $n > u$, dann eröffnet sich die Möglichkeit einer mehrfachen Bestimmung von Werten der Unbekannten; man braucht nur auf alle möglichen Arten u Gleichungen auszuwählen, ihre linken Seiten zu annullieren und nach den Unbekannten aufzulösen. In der Nichtübereinstimmung der verschiedenen Lösungen äußert sich der Widerspruch, der von der Fehlerhaftigkeit der Beobachtungsresultate $l_1, l_2, \cdots l_n$ herrührt.

Es entsteht daher die Aufgabe, das ganze überzählige System von Gleichungen derart zu kombinieren, daß sich eine einzige Lösung für die Unbekannten ergibt und gleichzeitig gewissen Anforderungen bezüglich der Beschaffenheit dieser Lösung genügt wird.

Bezeichnet man das vorteilhafteste Wertsystem der Unbekannten mit $x, y, z, \cdots$, so führt dasselbe zu analogen Gleichungen wie das System der wahren Werte, nämlich:

$$\lambda_\nu = -l_\nu + a_\nu x + b_\nu y + c_\nu z + \cdots \tag{2}$$

mit dem Unterschiede, daß die linken Seiten nicht die wahren, sondern scheinbare Fehler der Beobachtungen vorstellen. Das System (2) muß widerspruchsfrei in dem Sinne sein, daß aus irgend u ausgewählten Gleichungen sich dieselben Werte der $x, y, z, \cdots$ ergeben wie aus jedem andern.

Bei den folgenden Ausführungen beschränken wir uns auf drei Unbekannte, weil die Verallgemeinerung der Resultate auf u Unbekannte keine Schwierigkeit darbietet.

Multipliziert man jede Gleichung des Systemes (1) mit einem unbestimmten Multiplikator α_ν $(\nu = 1, 2, \cdots n)$ und bildet die Summe, so entsteht die Gleichung:

$$[\alpha\varepsilon] = -[\alpha l] + [a\alpha]X + [b\alpha]Y + [c\alpha]Z;$$

aus ihr ergibt sich, wenn man die Multiplikatoren den Bedingungen

$$[a\alpha] = 1, \quad [b\alpha] = 0, \quad [c\alpha] = 0 \tag{3}$$

unterwirft:

$$X = [\alpha l] + [\alpha\varepsilon]. \tag{4}$$

Die Anwendung eines zweiten Multiplikatorensystems β_ν und eines dritten γ_ν, wenn sie an die Bedingungen

$$\begin{aligned} [a\beta] &= 0, \quad [b\beta] = 1, \quad [c\beta] = 0 \\ [a\gamma] &= 0, \quad [b\gamma] = 0, \quad [c\gamma] = 1 \end{aligned} \tag{3*}$$

geknüpft werden, führt zu den Gleichungen:

$$\begin{aligned} Y &= [\beta l] + [\beta\varepsilon] \\ Z &= [\gamma l] + [\gamma\varepsilon]. \end{aligned} \tag{4*}$$

Wird dasselbe Verfahren auf das System (2) angewendet, so kommt man zu den Ansätzen:

$$\begin{aligned} x &= [\alpha l] + [\alpha\lambda] \\ y &= [\beta l] + [\beta\lambda] \\ z &= [\gamma l] + [\gamma\lambda]. \end{aligned} \tag{5}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$[\alpha\lambda] = A, \quad [\beta\lambda] = B, \quad [\gamma\lambda] = C, \tag{6}$$

so erhält man durch Verbindung von (4), (4*) mit (5), (5*):

$$\begin{aligned} X - x &= -A + [\alpha\varepsilon] \\ Y - y &= -B + [\beta\varepsilon] \\ Z - z &= -C + [\gamma\varepsilon]. \end{aligned} \tag{7}$$

Der Fehler in der Bestimmung x erscheint hiernach als eine lineare Funktion der Beobachtungsfehler. Sind die Beobach-

tungen *gleich genau*, und befolgen ihre Fehler das symmetrische Gesetz

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2},$$

womit zugleich ausgesprochen ist, daß sie von konstanten Fehleranteilen frei sind, so ist $-A$ der mittlere Wert von $X - x$, daher nach Nr. 126

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2(\varepsilon + A)^2}$$

das Gesetz des Fehlers in der Bestimmung x, wenn

$$H = \frac{h}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}} = \frac{h}{\sqrt{[\alpha\alpha]}}. \tag{8}$$

Soll nun das Fehlerrisiko dieser Bestimmung das kleinstmögliche sein, so ist nach Nr. 128 notwendig, daß

$$A = 0 \quad \text{und} \quad [\alpha\alpha] \text{ ein Minimum} \tag{9}$$

sei; dazu kommen die ursprünglich aufgestellten Bedingungen (3).

Die Durchführung dieses relativen Minimums läuft darauf hinaus, das absolute Minimum der mit den unbestimmten Multiplikatoren Q_{11}, Q_{12}, Q_{13} gebildeten Funktion

$$[\alpha\alpha] - 2Q_{11}([a\alpha] - 1) - 2Q_{12}[b\alpha] - 2Q_{13}[c\alpha]$$

zu bestimmen; dieses aber erfordert, daß die Ableitungen nach den einzelnen α für sich Null werden. Dadurch ergeben sich die Gleichungen:

$$\alpha_\nu = a_\nu Q_{11} + b_\nu Q_{12} + c_\nu Q_{13} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n). \tag{10}$$

Führt man diese Werte in die Bedingungsgleichungen (3) ein, so erhält man zur Bestimmung der Multiplikatoren das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} [aa]Q_{11} + [ab]Q_{12} + [ac]Q_{13} &= 1 \\ [ba]Q_{11} + [bb]Q_{12} + [bc]Q_{13} &= 0 \\ [ca]Q_{11} + [cb]Q_{12} + [cc]Q_{13} &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Wären Q_{11}, Q_{12}, Q_{13} berechnet, so ergäbe die Einsetzung ihrer Werte in (10) das System der α, das zu dem vorteilhaftesten Werte x führt. Es läßt sich jedoch ein anderer zweckmäßigerer Weg einschlagen.

Vorher möge jedoch noch folgendes bemerkt werden. Multipliziert man (10) nach einander mit α_ν, β_ν und γ_ν und bildet jedesmal die Summe für alle ν unter Beobachtung der Gleichungen (3) und (3*), so kommt man zu dem Ergebnis, daß

$$Q_{11} = [\alpha\alpha], \quad Q_{12} = [\alpha\beta], \quad Q_{13} = [\alpha\gamma] \tag{12}$$

ist.

Wird die ganze Rechnung in derselben Weise für die beiden andern Unbekannten durchgeführt, so ergeben sich als Bedingungen des kleinsten Fehlerrisikos die Ansätze:

$$\begin{aligned} B = 0 \quad &\text{und} \quad [\beta\beta] \text{ ein Minimum} \\ C = 0 \quad &\text{und} \quad [\gamma\gamma] \text{ ein Minimum}, \end{aligned} \tag{9*}$$

daraus für die β und γ die Bestimmungen:

$$\begin{aligned} \beta_\nu &= a_\nu Q_{21} + b_\nu Q_{22} + c_\nu Q_{23} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n) \\ \gamma_\nu &= a_\nu Q_{31} + b_\nu Q_{32} + c_\nu Q_{33} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n), \end{aligned} \tag{10*}$$

wobei die Multiplikatoren Q_{21}, Q_{22}, Q_{23} und Q_{31}, Q_{32}, Q_{33} zu rechnen sind aus den Gleichungssystemen:

$$\begin{aligned} &[aa] Q_{21} + [ab] Q_{22} + [ac] Q_{23} = 0 \quad [aa] Q_{31} + [ab] Q_{32} + [ac] Q_{33} = 0 \\ &[ba] Q_{21} + [bb] Q_{22} + [bc] Q_{23} = 1 \quad [ba] Q_{31} + [bb] Q_{32} + [bc] Q_{33} = 0 \\ &[ca] Q_{21} + [cb] Q_{22} + [cc] Q_{23} = 0, \quad [ca] Q_{31} + [cb] Q_{32} + [cc] Q_{33} = 1. \end{aligned} \tag{11*}$$

Weiter ergibt sich, daß

$$\begin{aligned} Q_{21} &= [\beta\alpha], \quad Q_{22} = [\beta\beta], \quad Q_{23} = [\beta\gamma] \\ Q_{31} &= [\gamma\alpha], \quad Q_{32} = [\gamma\beta], \quad Q_{33} = [\gamma\gamma] \end{aligned} \tag{12*}$$

Der bloße Anblick der Gleichungen (12) und (12*) zeigt überdies, daß

$$Q_{12} = Q_{21}, \quad Q_{13} = Q_{31}, \quad Q_{23} = Q_{32}.$$

Die Gleichungen

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0,$$

d. i. nach (6):

$$[\alpha\lambda] = 0, \quad [\beta\lambda] = 0, \quad [\gamma\lambda] = 0,$$

die nach (9) und (9*) mit zu den Bedingungen des kleinsten Fehlerrisikos gehören, haben drei andere Gleichungen im Gefolge, die sich in folgender Weise ergeben: Multipliziert man die Gleichungen (10) und (10*) mit λ_ν und bildet die Summe für alle ν, so entsteht eben mit Rücksicht darauf, daß $[\alpha\lambda] = 0$, $[\beta\lambda] = 0$ und $[\gamma\lambda] = 0$, das System:

$$\begin{aligned} Q_{11}[a\lambda] + Q_{12}[b\lambda] + Q_{13}[c\lambda] &= 0 \\ Q_{21}[a\lambda] + Q_{22}[b\lambda] + Q_{23}[c\lambda] &= 0 \\ Q_{31}[a\lambda] + Q_{32}[b\lambda] + Q_{33}[c\lambda] &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Die Determinante aus den Koeffizienten

$$\begin{matrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{matrix}$$

nn nicht Null sein, weil dies im Widerspruche stünde mit dem
stem

$$Q_{11}[aa] + Q_{12}[ab] + Q_{13}[ac] = 1$$
$$Q_{21}[aa] + Q_{22}[ab] + Q_{23}[ac] = 0$$
$$Q_{31}[aa] + Q_{32}[ab] + Q_{33}[ac] = 0,$$

s sich aus den ersten Gleichungen der drei Systeme (11) und (11*) sammensetzt und in welchem doch $[aa]$, $[ab]$, $[ac]$ von vornherein stimmte Größen bedeuten. Daher folgt aus (13), daß:

$$[a\lambda] = 0, \quad [b\lambda] = 0, \quad [c\lambda] = 0 \tag{14}$$

in müsse.

Diese Gleichungen stellen aber die Bedingungen dar, unter elchen die Summe $[\lambda\lambda]$ in bezug auf x, y, z ein Minimum wird; nn nach (2) ist

$$\frac{1}{2}\frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial x} = \left[\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right] = [a\lambda], \quad \text{u. s. w.}$$

ie vorteilhaftesten, weil mit dem kleinsten Fehlerrisiko verbundenen Werte der Unbekannten sind also diejenigen, welche den Beobachtungen scheinbare) Fehler von kleinster Quadratsumme zuschreiben.

Damit ist das Prinzip, das der *Methode der kleinsten Quadrate* grunde liegt und in Nr. 135 zunächst für direkte Beobachtungen wiesen wurde, als ein allgemein giltiges Ausgleichungsprinzip beindet. Denn die in Behandlung stehende Aufgabe umfaßt alle bleme, welche sich der Ausgleichungsrechnung darbieten.

Die Ausführung der Gleichungen (14), nämlich die Einsetzung Ausdrücke für die λ aus (2), ergibt das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z &= [al] \\ [ba]x + [bb]y + [bc]z &= [bl] \\ [ca]x + [cb]y + [cc]z &= [cl], \end{aligned} \tag{15}$$

ch das die vorteilhaftesten Werte der Unbekannten eindeutig beamt sind, sofern die Determinante der Koeffizienten nicht verwindet. Es heißt das System der *Normalgleichungen.*

146. Gewichte der Unbekannten. Weil bei der vorteiltesten Kombination die Größen A, B, C der vorigen Nummer Null d, so schreiben sich die Gleichungen (7) und (7*):

$$X - x = [\alpha\varepsilon]$$
$$Y - y = [\beta\varepsilon]$$
$$Z - z = [\gamma\varepsilon].$$

daher h das Präzisionsmaß einer Beobachtung, so ist nach Nr. 126

$$H_x = \frac{h}{\sqrt{[\alpha\alpha]}}$$

das Präzisionsmaß in der Bestimmung von x; ebenso sind

$$H_y = \frac{h}{\sqrt{[\beta\beta]}}, \quad H_z = \frac{h}{\sqrt{[\gamma\gamma]}}$$

die Präzisionsmaße von y und z.

Führt man an Stelle der Präzisionsmaße die mittleren Fehler wobei die Formeln

$$h = \frac{1}{\mu\sqrt{2}}, \quad H_x = \frac{1}{\mu_x\sqrt{2}} \quad \text{u. s. w.}$$

zu benützen sind, so ergeben sich für die mittleren Fehler der U bekannten die Formeln:

$$\mu_x = \mu\sqrt{[\alpha\alpha]}, \quad \mu_y = \mu\sqrt{[\beta\beta]}, \quad \mu_z = \mu\sqrt{[\gamma\gamma]} \tag{1}$$

ausgedrückt durch den mittleren Fehler μ einer Beobachtung. Wi diese als Gewichtseinheit genommen, so kommen den Bestimmung der Unbekannten folgende Gewichte zu (s. Nr. 137):

$$p_x = \frac{\mu^2}{\mu_x^2} = \frac{1}{[\alpha\alpha]}, \quad p_y = \frac{\mu^2}{\mu_y^2} = \frac{1}{[\beta\beta]}, \quad p_z = \frac{\mu^2}{\mu_z^2} = \frac{1}{[\gamma\gamma]}. \tag{1}$$

Da nun bei der vorteilhaftesten Kombination

$$[\alpha\alpha], \quad [\beta\beta], \quad [\gamma\gamma] \tag{}$$

Minima werden, so haben die nach der Methode der kleinsten Quadr bestimmten Werte der Unbekannten zugleich die *größten Gewichte*.

Nach den Gleichungen (12) und (12*) sind die Summen (gleichbedeutend mit den Größen

$$Q_{11}, \quad Q_{22}, \quad Q_{33}, \tag{1}$$

zu deren Bestimmung die Gleichungssysteme (11) und (11*) dien Diese Gleichungssysteme werden deshalb als die *Gewichtsgleichun* bezeichnet, und zwar bilden (11) die Gewichtsgleichungen für die I bekannte x, weil sie Q_{11} enthalten, (11*) die Gewichtsgleichungen y und z.

Man bemerkt, daß die Gewichtsgleichungen mit den Norn gleichungen (15) übereinstimmend gebaut sind und nur in den rech Seiten sich von ihnen unterscheiden.

147. Bestimmung des mittleren Fehlers einer Beoba tung aus den scheinbaren Fehlern. Sobald diese Aufgabe du geführt und auch die Gewichte der Unbekannten berechnet sind, s nach den Ausführungen der vorigen Nummer auch die mittleren Fel der letzteren bestimmbar.

Zur Lösung der in der Überschrift bezeichneten Aufgabe benützen wir das von Gauß[1]) angegebene Verfahren.

Geht man von den Gleichungen (1), (2) aus, welche lauten:

$$\varepsilon_\nu = -l_\nu + a_\nu X + b_\nu Y + c_\nu Z$$
$$\lambda_\nu = -l_\nu + a_\nu x + b_\nu y + c_\nu z,$$

so ergibt sich durch Subtraktion derselben:

$$\lambda_\nu = \varepsilon_\nu - a_\nu(X - x) - b_\nu(Y - y) - c_\nu(Z - z);$$

den Gleichungen (7) und (7*) zufolge ist aber bei der vorteilhaftesten Kombination wegen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$:

$$X - x = [\alpha\varepsilon], \quad Y - y = [\beta\varepsilon], \quad Z - z = [\gamma\varepsilon];$$

hiernach ist

$$\lambda_\nu = \varepsilon_\nu - a_\nu[\alpha\varepsilon] - b_\nu[\beta\varepsilon] - c_\nu[\gamma\varepsilon],$$

also λ_ν als homogene lineare Funktion der wahren Fehler dargestellt. Multipliziert man diese Gleichung mit ε_ν und bildet die Summe für alle ν von 1 bis n, so entsteht:

$$[\lambda\varepsilon] = [\varepsilon\varepsilon] - [a\varepsilon][\alpha\varepsilon] - [b\varepsilon][\beta\varepsilon] - [c\varepsilon][\gamma\varepsilon];$$

multipliziert man hingegen mit λ_ν und bildet wieder die Summe, so kommt man mit Rücksicht darauf, daß nach (14)

$$[a\lambda] = 0, \quad [b\lambda] = 0, \quad [c\lambda] = 0$$

ist, zu der Gleichung

$$[\lambda\lambda] = [\lambda\varepsilon],$$

welche mit der letzten verbunden eine Darstellung von $[\lambda\lambda]$ als homogene quadratische Funktion der wahren Fehler ergibt, nämlich:

$$[\lambda\lambda] = [\varepsilon\varepsilon] - [a\varepsilon][\alpha\varepsilon] - [b\varepsilon][\beta\varepsilon] - [c\varepsilon][\gamma\varepsilon]. \qquad (19)$$

Nach Auflösung der Summen ist:

$$\begin{aligned}
[\lambda\lambda] = [\varepsilon\varepsilon] &- \varepsilon_1^2(a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1) \\
&- \varepsilon_2^2(a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2) \\
&\quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
&- \varepsilon_n^2(a_n\alpha_n + b_n\beta_n + c_n\gamma_n) \\
&- \varepsilon_1\varepsilon_2(a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 + b_1\beta_2 + b_2\beta_1 + c_1\gamma_2 + c_2\gamma_1) \\
&- \varepsilon_1\varepsilon_3(a_1\alpha_3 + a_3\alpha_1 + b_1\beta_3 + b_3\beta_1 + c_1\gamma_3 + c_3\gamma_1) \\
&\quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
&- \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n(a_{n-1}\alpha_n + a_n\alpha_{n-1} + b_{n-1}\beta_n + b_n\beta_{n-1} + c_{n-1}\gamma_n + c_n\gamma_{n-1}).
\end{aligned}$$

Man ersetze nun auf der rechten Seite jedes Glied durch seinen Mittelwert und betrachte den so erhaltenen Wert des rechtsseitigen Ausdruckes als gleichwertig mit $[\lambda\lambda]$. Dabei ist zu beachten, daß der Mittelwert eines jeden ε_ν^2 gleich ist μ^2, und der Mittelwert eines

---

1) Theoria combinat. Art. 38. — Andere Lösungen siehe in des Verf.s „Theorie der Beobachtungsfehler" und P. Pizzetti, l. c., p. 262ff.

jeden $\varepsilon_i \varepsilon_k$ gleich Null, weil vorausgesetzt wurde, daß die Fehler um [redacted] die Null symmetrisch angeordnet oder frei von einem konstanten An[redacted] teil sind. Demnach ergibt dieser Vorgang den Ansatz:

$$\begin{aligned}[\lambda\lambda] = n\mu^2 &- \mu^2(a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1) \\ &- \mu^2(a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2) \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &- \mu^2(a_n\alpha_n + b_n\beta_n + c_n\gamma_n) \\ = n\mu^2 &- \mu^2\{[a\alpha] + [b\beta] + [c\gamma]\};\end{aligned}$$

nach den grundlegenden Bedingungen (3) und (3*) ist aber

$$[a\alpha] = 1, \quad [b\beta] = 1, \quad [c\gamma] = 1,$$

daher

$$[\lambda\lambda] = (n-3)\mu^2$$

und daraus

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-3}}.$$

Diese Formel kam unter der Voraussetzung zustande, daß drei [redacted]n-bekannte zu bestimmen seien; allgemein ist für u Unbekannte:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-u}}. \qquad ([redacted]0)$$

148. Vermittelnde Beobachtungen ungleicher Genau[redacted]g-keit. Sind die Beobachtungen $l_1, l_2, \cdots l_n$ von ungleicher Genau[redacted]g-keit, und ist diese durch die Präzisionsmaße $h_1, h_2, \cdots h_n$ bezeich[redacted]et, so befolgt der Fehler ε_ν der Beobachtung l_ν das Gesetz

$$\frac{h_\nu}{\sqrt{\pi}} e^{-h_\nu^2 \varepsilon_\nu^2}; \qquad ([redacted]1)$$

es wird also das Produkt $h_\nu \varepsilon_\nu = \varepsilon_\nu'$ das Gesetz

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\varepsilon_\nu'^2} \qquad (1^*)$$

befolgen (s. Nr. 126). Denkt man sich also jede der Gleichungen

$$\varepsilon_\nu = -l_\nu + a_\nu X + b_\nu Y + c_\nu Z \qquad (2)$$

wie auch die ihr zugeordnete

$$\lambda_\nu = -l_\nu + a_\nu x + b_\nu y + c_\nu z \qquad (3)$$

mit h_ν multipliziert, so entstehen neue Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\nu' &= -l_\nu' + a_\nu' X + b_\nu' Y + c_\nu' Z \qquad (2^*) \\ \lambda_\nu' &= -l_\nu' + a_\nu' x + b_\nu' y + c_\nu' z \qquad (3^*)\end{aligned} \quad (\nu = 1, 2, \cdots n),$$

die sich auf ein einheitliches Gesetz (1*) beziehen und daher ebenso zu behandeln sind wie die von Nr. 145.

Es ist jedoch üblich, das Genauigkeitsverhältnis der Beobachtungen entweder durch ihre mittleren Fehler oder durch die Gewichte zum Ausdruck zu bringen. Nach Nr. 137 sind aber die Präzisionsmaße den mittleren Fehlern umgekehrt, den Quadratwurzeln aus den Gewichten direkt proportional. Statt also die Gleichungen (2), (3), um sie, wie man sich ausdrückt, *auf gleiches Gewicht zu reduzieren*, mit den Präzisionsmaßen zu multiplizieren, kann man sie durch die mittleren Fehler der bezüglichen Beobachtungen dividieren oder mit den Quadratwurzeln aus den korrespondierenden Gewichten multiplizieren.

Wir wollen den letzteren Vorgang als den üblichen verfolgen und bezeichnen die Gewichte von $l_1, l_2, \cdots l_n$ mit $p_1, p_2, \cdots p_n$. Befolgt der Fehler ε_ν das Gesetz (1), so unterliegt $\sqrt{p_\nu}\,\varepsilon_\nu = \varepsilon_\nu'$ nach Nr. 126 dem Gesetz

$$\frac{\dfrac{h_\nu}{\sqrt{p_\nu}}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{h_\nu^2}{p_\nu}\varepsilon_\nu'^2},$$

und da sich alle Gewichte auf dieselbe Gewichtseinheit beziehen müssen, so ist

$$\frac{h_\nu}{\sqrt{p_\nu}} = h$$

unabhängig von ν und bezeichnet das Präzisionsmaß der *Gewichtseinheit*. Es unterliegen also bei diesem Vorgange die Gleichungen (2*) dem einheitlichen Gesetze

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon_\nu'^2},$$

dem die Gewichtseinheit unterworfen ist.

Die nun geltenden *Normalgleichungen*:

$$\begin{aligned}
[a'a']x + [a'b']y + [a'c']z &= [a'l'] \\
[b'a']x + [b'b']y + [b'c']z &= [b'l'] \\
[c'a']x + [c'b']y + [c'c']z &= [c'l']
\end{aligned} \tag{4}$$

lauten in den ursprünglichen Größen:

$$\begin{aligned}
[paa]x + [pab]y + [pac]z &= [pal] \\
[pba]x + [pbb]y + [pbc]z &= [pbl] \\
[pca]x + [pcb]y + [pcc]z &= [pcl];
\end{aligned} \tag{4*}$$

ebenso gestalten sich die *Gewichtsgleichungen* für x in den alten Größen wie folgt:

$$[paa]Q_{11} + [pab]Q_{12} + [pac]Q_{13} = 1$$
$$[pba]Q_{11} + [pbb]Q_{12} + [pbc]Q_{13} = 0 \qquad (5^*$$
$$[pca]Q_{11} + [pcb]Q_{12} + [pcc]Q_{13} = 0$$

und ähnlich die von y und z.

Die Gleichungen (14) in Nr. 145:

$$[a\lambda] = 0, \quad [b\lambda] = 0, \quad [c\lambda] = 0,$$

aus denen die Normalgleichungen hervorgegangen sind, lauten nunmehr

$$[pa\lambda] = 0, \quad [pb\lambda] = 0, \quad [pc\lambda] = 0 \qquad (6^*$$

und stellen die Bedingungen vor, unter welchen die Summe $[p\lambda$... in bezug auf x, y, z ein Minimum erlangt. Daraus ergibt sich d... Erweiterung des in Nr. 145 formulierten Prinzips auf den Fall u... gleich genauer Beobachtungen. *Es sind* nämlich dann *jene Wer... der Unbekannten die vorteilhaftesten, für welche die Summe der m... den Gewichten multiplizierten Quadrate der (scheinbaren) Fehler a... kleinsten wird.*

Für den *mittleren Fehler der Gewichtseinheit* ergibt sich aus d... auf gleiches Gewicht (= 1) reduzierten λ' der Ausdruck:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda'\lambda']}{n-u}},$$

wenn u die Anzahl der Unbekannten ist; in den ursprünlichen λ a... gedrückt lautet diese Formel:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{n-u}}. \qquad ($$

Aus μ ergeben sich mittels der Gewichte der Unbekannten de... mittlere Fehler nach den Formeln:

$$\mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{p_x}} = \mu\sqrt{Q_{11}}, \quad \mu_y = \frac{\mu}{\sqrt{p_y}} = \mu\sqrt{Q_{22}} \quad \text{u. s. w.}$$

149. Auflösung der Normalgleichungen und der Gewicht... gleichungen. Hierbei ist es nicht notwendig, den Fall ungleich ...nauer Beobachtungen von dem gleich genauer zu unterscheiden, w... Normal- und Gewichtsgleichungen in beiden Fällen dieselbe Fo... haben.

Wenn es sich nur um wenige Unbekannte handelt und die Koef... zienten der Gleichungen einfache Zahlen sind, dann wird man sic... eines der verschiedenen Kombinationsverfahren der Algebra bediener... um möglichst rasch zum Ziele zu kommen. Sobald aber die Anzahl der Unbekannten einigermaßen erheblich ist und die Koeffizienten

komplizierte Zahlen sind, empfiehlt sich jener systematische Vorgang, den **Gauß**[1]) angegeben hat.

Aus der ersten Gleichung des Systems

$$\begin{aligned}[aa]x + [ab]y + [ac]z &= [al]\\ [ab]x + [bb]y + [bc]z &= [bl]\\ [ac]x + [bc]y + [cc]z &= [cl]\end{aligned} \tag{1}$$

folgt:

$$x + \frac{[ab]}{[aa]}y + \frac{[ac]}{[aa]}z = \frac{[al]}{[aa]}. \tag{2}$$

Subtrahiert man diese Gleichung, nachdem man sie mit $[ab]$, beziehungsweise $[ac]$ multipliziert hat, von der zweiten und dritten, so entsteht das Gleichungspaar:

$$\begin{aligned}\left\{[bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab]\right\}y + \left\{[bc] - \frac{[ab]}{[aa]}[ac]\right\}z &= [bl] - \frac{[ab]}{[aa]}[al]\\ \left\{[bc] - \frac{[ab]}{[aa]}[ac]\right\}y + \left\{[cc] - \frac{[ac]}{[aa]}[ac]\right\}z &= [cl] - \frac{[ac]}{[aa]}[al],\end{aligned}$$

das analog gebaut ist wie das System (1); denn die zur Hauptdiagonale symmetrisch liegenden Koeffizienten sind wieder gleich und die der Hauptdiagonale selbst Quadratsummen wie dort, daher positiv; so ist beispielsweise

$$[bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] = \frac{[aa][bb] - [ab]^2}{[aa]} = \left(\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\sqrt{[aa]}}\right)^2 + \left(\frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{\sqrt{[aa]}}\right)^2 + \cdots.$$

Ferner zeigen die Koeffizienten und die absoluten Glieder einen einheitlichen Bau, der sich durch das Schema

$$[ik] - \frac{[ai]}{[aa]}[ak]$$

darstellen läßt; führt man dafür das Symbol

$$[ik \cdot 1]$$

ein, wonach also

$$[bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] = [bb \cdot 1], \quad [bc] - \frac{[ab]}{[aa]}[ac] = [bc \cdot 1], \quad \cdots \tag{3}$$

ist, so schreibt sich jenes Gleichungspaar wie folgt:

$$\begin{aligned}[bb \cdot 1]y + [bc \cdot 1]z &= [bl \cdot 1]\\ [bc \cdot 1]y + [cc \cdot 1]z &= [cl \cdot 1].\end{aligned} \tag{4}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt:

$$y + \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}z = \frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}; \tag{5}$$

1) Disquisitio de elementis ellipticis Palladis. Comment. Gott. 1810, und Theoriae combin. suppl. 1826, Art. 13.

multipliziert man dies mit $[bc \cdot 1]$ und subtrahiert von der zweiten Gleichung, so entsteht:

$$\left\{[cc \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}[bc \cdot 1]\right\} z = [cl \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}[bl \cdot 1];$$

Koeffizient und rechte Seite sind hier nach dem Schema

$$[ik \cdot 1] - \frac{[bi \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}[bk \cdot 1]$$

gebildet; gebraucht man hierfür die Abkürzung

$$[ik \cdot 2],$$

wonach also

$$[cc \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}[bc \cdot 1] = [cc \cdot 2], \cdots \tag{6}$$

so schreibt sich die obige Gleichung:

$$[cc \cdot 2] z = [cl \cdot 2]. \tag{7}$$

Aus ihr folgt dann:

$$z = \frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}. \tag{8}$$

Die Gleichungen (2), (5), (8) sind geeignet, das System (1) der Normalgleichungen zu ersetzen; ihre Vereinigung:

$$\begin{aligned} x + \frac{[ab]}{[aa]} y + \frac{[ac]}{[aa]} z &= \frac{[al]}{[aa]} \\ y + \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} z &= \frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} \\ z &= \frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} \end{aligned} \tag{9}$$

bildet das *System der reduzierten Normalgleichungen.* Dasselbe gestattet die Berechnung der Unbekannten durch successive Substitution von der letzten zur ersten. Hat man die darin auftretenden Brüche, welche in ihrer Reihenfolge kurz mit

$$\begin{matrix} \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{l}_1 \\ & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{l}_2 \\ & & \mathfrak{l}_3 \end{matrix}$$

bezeichnet werden mögen, berechnet, so lassen sich mit Hilfe derselben x, y, z explizite darstellen; es ist nämlich

$$\begin{aligned} x &= \begin{vmatrix} \mathfrak{l}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{l}_2 & 1 & \mathfrak{c}_2 \\ \mathfrak{l}_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathfrak{l}_1 - \mathfrak{b}_1 \mathfrak{l}_2 + (\mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_2 - \mathfrak{c}_1) \mathfrak{l}_3 \\ y &= \begin{vmatrix} \mathfrak{l}_2 & \mathfrak{c}_2 \\ \mathfrak{l}_3 & 1 \end{vmatrix} = \mathfrak{l}_2 - \mathfrak{c}_2 \mathfrak{l}_3 \\ z &= \mathfrak{l}_3. \end{aligned} \tag{10}$$

Würde man dasselbe Eliminationsverfahren, das hier auf die ›rmalgleichungen ausgeübt worden ist, auf die Gewichtsgleichungen n z, d. i. auf

$$
\begin{aligned}
&[aa]Q_{31} + [ab]Q_{32} + [ac]Q_{33} = 0 \\
&[ab]Q_{31} + [bb]Q_{32} + [bc]Q_{33} = 0 \qquad\qquad (11) \\
&[ac]Q_{31} + [bc]Q_{32} + [cc]Q_{33} = 1
\end{aligned}
$$

r Anwendung bringen, so ergäben sich in (9) links dieselben Koefi- nten, rechts dagegen andere Werte; es entsteht nämlich (11) aus), wenn man außer der Änderung der Zeichen für die Unbekannten

$[al]$ durch 0, $[bl]$ durch 0, $[cl]$ durch 1

etzt; infolgedessen wird weiter

$$
\begin{aligned}
&[bl \cdot 1] = [bl] - \frac{[ab]}{[aa]}[al] \text{ gleich } 0 \\
&[cl \cdot 1] = [cl] - \frac{[ac]}{[aa]}[al] \text{ gleich } 1 \\
&[cl \cdot 2] = [cl \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}[bl \cdot 1] \text{ gleich } 1,
\end{aligned}
$$

d das zu (11) gehörige reduzierte System lautet:

$$
\begin{aligned}
Q_{31} + \frac{[ab]}{[aa]} Q_{32} + \frac{[ac]}{[aa]} Q_{33} &= 0 \\
Q_{32} + \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} Q_{33} &= 0 \qquad\qquad (12) \\
Q_{33} &= \frac{1}{[cc \cdot 2]}.
\end{aligned}
$$

Am bemerkenswertesten ist die dritte dieser Gleichungen, da sie ›sagt, daß bei dem eingeschlagenen Eliminationsverfahren *der Nenner* ' *letzten Unbekannten zugleich ihr Gewicht* angibt.

Auf diese Weise ist aber eben nur das Gewicht der letzten Un- kannten einfach gefunden. Um das der ersten zu erhalten, könnte n das System der Normalgleichungen derart *umstellen*, daß die eichungen *und* die Unbekannten in die umgekehrte Ordnung mmen; führt man bei dieser Anordnung das Eliminationsverfahren e früher durch, so gibt der Nenner von x zugleich dessen Gewicht. r Bestimmung des Gewichtes von y wäre nur die Umstellung des gekürzten Systemes (4) erforderlich. Wählt man diesen Vorgang, gewährt die mehrfache Bestimmung der Unbekannten zugleich eine ntrolle der Rechnung.

Bei einer größeren Anzahl von Unbekannten wird jedoch eine lche Wiederholung des Eliminationsverfahrens beschwerlich; es npfiehlt sich dann, jedes System von Gewichtsgleichungen ebenso

zu reduzieren wie das Normalgleichungssystem. So gehen die Gewichtsgleichungen für x:

$$[aa]Q_{11} + [ab]Q_{12} + [ac]Q_{13} = 1$$
$$[ab]Q_{11} + [bb]Q_{12} + [bc]Q_{13} = 0$$
$$[ac]Q_{11} + [bc]Q_{12} + [cc]Q_{13} = 0$$

aus den Normalgleichungen hervor, wenn man

$$[al] \text{ durch } 1, \quad [bl] \text{ durch } 0, \quad [cl] \text{ durch } 0$$

ersetzt; mithin wird

$$[bl \cdot 1] = [bl] - \frac{[ab]}{[aa]}[al] \text{ gleich } -\frac{[ab]}{[aa]}$$
$$[cl \cdot 1] = [cl] - \frac{[ac]}{[aa]}[al] \text{ gleich } -\frac{[ac]}{[aa]}$$
$$[cl \cdot 2] = [cl \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}[bl \cdot 1] \text{ gleich } \frac{[ab]}{[aa]}\frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$$

und daher das System der reduzierten Gewichtsgleichungen:

$$Q_{11} + \frac{[ab]}{[aa]}Q_{12} + \frac{[ac]}{[aa]}Q_{13} = 0$$
$$Q_{12} + \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}Q_{13} = -\frac{[ab]}{[aa][bb \cdot 1]}$$
$$Q_{13} = \frac{[ab][bc \cdot 1]}{[aa][bb \cdot 1][cc \cdot 2]},$$

woraus durch successive Substitution Q_{11}, das reziproke Gewicht von x, bestimmt werden kann.

150. Nichtlineare Relationen zwischen der beobachteten und den unbekannten Größen. Die Theorie der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen bedarf noch einer wichtigen Ergänzung. In Nr. 145 ist nämlich angenommen worden, daß zwischen der zu beobachtenden Größe V und den Unbekannten $X, Y, Z, \cdots$ eine lineare Beziehung bestehe. Ist dem nicht so, ist der Zusammenhang ein anderer, so ist eine vorbereitende Rechnung erforderlich, bevor an die Ausgleichungsrechnung selbst geschritten werden kann.

Es bestehe allgemein zwischen V und den (drei) Unbekannten die Beziehung:

$$0 = -V + F(X, Y, Z). \qquad (1)$$

Die Beobachtung l_ν von V, mit dem Fehler ε_ν, führt zu der Gleichung:

$$\varepsilon_\nu = -l_\nu + F_\nu(X, Y, Z); \qquad (2)$$

der Zeiger ν bei F deutet auf Parameter hin, welche sich von Beobachtung zu Beobachtung ändern.

Vählt man in zweckmäßiger Weise so viel Beobachtungen aus, Unbekannte gibt, und betrachtet sie als fehlerfrei, so ergeben ileichungen in gerade zureichender Zahl zur Bestimmung von *ungswerten* X_0, Y_0, Z_0 der Unbekannten. Von diesen werde ommen, daß die *Korrektionen* ξ, η, ζ, durch welche sie auf die 1 Werte X, Y, Z ergänzt werden, so klein seien, daß man r mit Potenzen und Produkten derselben außer Acht lassen Unter solchen Verhältnissen kann

$$F_\nu(X, Y, Z) = F_\nu(X_0 + \xi,\ Y_0 + \eta,\ Z_0 + \zeta)$$
$$= F_\nu(X_0, Y_0, Z_0) + \frac{\partial F_\nu}{\partial X_0}\xi + \frac{\partial F_\nu}{\partial Y_0}\eta + \frac{\partial F_\nu}{\partial Z_0}\zeta$$

; werden, und es geht die Gleichung (2) über in:

$$\varepsilon_\nu = -l_\nu + F_\nu(X_0, Y_0, Z_0) + \frac{\partial F_\nu}{\partial X_0}\xi + \frac{\partial F_\nu}{\partial Y_0}\eta + \frac{\partial F_\nu}{\partial Z_0}\zeta. \tag{3}$$

Venn nun

$$\begin{aligned} l_\nu - F_\nu(X_0, Y_0, Z_0) &= l_\nu' \\ \frac{\partial F_\nu}{\partial X_0} &= a_\nu \\ \frac{\partial F_\nu}{\partial Y_0} &= b_\nu \\ \frac{\partial F_\nu}{\partial Z_0} &= c_\nu \end{aligned} \tag{4}$$

; wird, so nimmt (3) die in Nr. 145 vorausgesetzte lineare an:

$$\varepsilon_\nu = -l_\nu' + a_\nu\xi + b_\nu\eta + c_\nu\zeta. \tag{5}$$

eder solchen Gleichung entspricht eine andere:

$$\lambda_\nu = -l_\nu' + a_\nu x + b_\nu y + c_\nu z, \tag{6}$$

x, y, z die vorteilhaftesten Werte der Korrektionen bedeuten,

$$X_0 + x,\quad Y_0 + y,\quad Z_0 + z \tag{7}$$

rteilhaftesten Werte der Unbekannten selbst sind.

ber erst der Erfolg der Rechnung kann darüber belehren, ob raussetzung zulässig war, auf welcher der Ansatz (3) beruhte. ı sich für x, y, z so große Werte ergeben, daß man gegen die ıchtlassung der Potenzen und Produkte Bedenken tragen muß, väre die ganze Rechnung mit den Werten (7) als *neuen Nähe-verten* zu wiederholen.

ie Einführung von Näherungswerten für die Unbekannten em- sich zumeist auch dann, wenn die Relation zwischen V und

$X, Y, Z, \cdots$ von Natur aus linear ist; sie hat dann aber einen a Zweck als vorhin, nämlich den der *Vereinfachung der numer Rechnung.* Sind nämlich die Beobachtungsergebnisse l_ν vielz Zahlen, so kann durch passende Näherungswerte bewirkt werde die nach der Vorschrift (4) reduzierten Beobachtungen:

$$l_\nu' = l_\nu - F_\nu(X_0, Y_0, Z_0) = l_\nu - (a_\nu X_0 + b_\nu Y_0 + c_\nu Z_0)$$

bequemere Zahlen werden.

Mitunter kann die Umwandlung der nichtlinearen Relatic in eine lineare auch auf einem andern Wege, mit Umgehun Näherungswerten, bewerkstelligt werden, wenn sich eine analy Operation f angeben läßt, durch welche die Funktion F in eine l umgewandelt wird[1]), so daß

$$f(V) = f\{F(X, Y, Z)\} = K + aX + bY + cZ$$

ist. Nun muß aber beachtet werden, daß die Ausgleichung nic den Beobachtungen von V selbst, sondern an Beobachtunge Funktion $f(V)$ vorgenommen wird, und dies hat auf die Ge der Gleichungen (8) Einfluß.

Ist l_ν eine Beobachtung von V, ε_ν ihr Fehler; gehören fer dieser Beobachtung die Werte a_ν, b_ν, c_ν der Parameter, so gi zu der Gleichung:

$$f(l_\nu + \varepsilon_\nu) = K_\nu + a_\nu X + b_\nu Y + c_\nu Z$$

Anlaß; für ein sehr kleines ε_ν kann

$$f(l_\nu + \varepsilon_\nu) = f(l_\nu) + \frac{\partial f}{\partial l_\nu}\varepsilon_\nu$$

gesetzt werden. Hat nun l_ν die Präzision h_ν, das Gewicht p_ν, s nach Nr. 126 wegen

$$f(l_\nu + \varepsilon_\nu) - f(l_\nu) = \frac{\partial f}{\partial l_\nu}\varepsilon_\nu$$

$f(l_\nu)$ die Präzision

$$h_\nu' = \frac{h_\nu}{\frac{\partial f}{\partial l_\nu}}$$

und ein Gewicht p_ν', das sich aus der Beziehung

$$p_\nu' : p_\nu = \frac{h_\nu^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial l_\nu}\right)^2} : h_\nu^2$$

ergibt; somit ist

---

1) Als Beispiel diene: $V = Ce^{aX+bY}$; durch die Operation des Lo mierens im natürlichen System geht daraus die in bezug auf X, Y linea ziehung: $l \cdot V = l \cdot C + aX + bY$ hervor.

$$p_\nu' = \frac{p_\nu}{\left(\frac{\partial f}{\partial l_\nu}\right)^2}. \tag{10}$$

Waren die Beobachtungen l_ν von gleicher Genauigkeit und vom Gewicht 1, so bekommt die Gleichung

$$\varepsilon_\nu' = -l_\nu' + a_\nu X + b_\nu Y + c_\nu Z, \tag{11}$$

welche aus (9) hervorgeht, wenn man

$$\frac{\partial f}{\partial l_\nu}\varepsilon_\nu = \varepsilon_\nu', \quad -f(l_\nu) + K_\nu = l_\nu'$$

setzt, das Gewicht

$$p_\nu' = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial l_\nu}\right)^2}. \tag{10*}$$

Auch diese Methode[1]), die nur in ganz besonderen Fällen anwendbar ist, hängt von einer Voraussetzung, nämlich von solcher Kleinheit des Beobachtungsfehlers ab, daß dessen Potenzen vernachlässigt werden können.

151. Zusammenstellung der Resultate. Das *erste* Geschäft bei der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen ist die *Aufstellung der Fehlergleichungen*, die schließlich immer die Form:

$$\lambda_\nu = -l_\nu + a_\nu x + b_\nu y + c_\nu z \tag{1}$$

annehmen. Ihre Anzahl stimmt mit der Anzahl der Beobachtungen überein. Handelt es sich um lineare Beziehungen, so bedarf dies keiner besonderen Rechnung; nur bei Einführung von Näherungswerten X_0, Y_0, Z_0 zum Zwecke der Reduktion der l hat man für jede Gleichung den Wert von

$$a_\nu X_0 + b_\nu Y_0 + c_\nu Z_0$$

zu berechnen, von l_ν zu subtrahieren und mit den Differenzen l_ν' wieder Gleichungen von der Form (1) zu bilden, in welchen x, y, z nunmehr Korrektionen an den Näherungswerten bedeuten. Bei nichtlinearen Relationen erfordert die Aufstellung der Fehlergleichungen besondere Vorarbeiten, die in Nr. 150 erörtert sind.

Das *zweite* Geschäft besteht in der *Bildung der Normalgleichungen*, die auf die Berechnung des Summensystemes

$$\begin{matrix} [aa] & [ab] & [ac] & [al] \\ & [bb] & [bc] & [bl] \\ & & [cc] & [cl] \end{matrix} \tag{2}$$

1) Auf ihre korrekte Durchführung hat Th. Wittstein hingewiesen Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXVII (1882), p. 315, und „Das mathematische Gesetz der Sterblichkeit", 2. Aufl., 1883.

hinauskommt und bei zahlreichen Beobachtungen und vielzifl Koeffizienten den beschwerlichsten Teil der Arbeit bildet. Zu Erleichterung können Quadrattafeln[1]) und Produkttafeln[2]) gute Di leisten. In Ermangelung der letzteren können die nichtquadrati Summen wie $[ab]$, $[ac]$ u. s. w. mit einer Mehrarbeit auch m Quadrattafeln berechnet werden, weil

$$[ab] = \frac{[(a+b)^2] - [aa] - [bb]}{2}$$

ist[3]).

Das *dritte* Geschäft ist die *Auflösung der Normalgleichungen* damit in Verbindung die Gewichtsbestimmung. Die Aufstellun reduzierten Normalgleichungen, welche hierzu erforderlich ist, be die Bildung der Koeffizienten

$$\begin{array}{ccc} [bb \cdot 1] & [bc \cdot 1] & [bl \cdot 1] \\ & [cc \cdot 2] & [cl \cdot 2] \end{array}$$

nach den Schematen der Nr. 149; sind diese berechnet, so kann Ausführung einiger Divisionen das System:

$$\begin{aligned} x + \frac{[ab]}{[aa]} y + \frac{[ac]}{[aa]} z &= \frac{[al]}{[aa]} \\ y + \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} z &= \frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} \\ z &= \frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} \end{aligned}$$

ziffermäßig hergestellt werden; aus ihm erhält man (durch succ Substitution) z, y, x. Gleichzeitig ist das Gewicht von z besti über die Ermittelung der Gewichte von y und x ist in Nr. 14 Nähere angegeben.

---

1) Solche finden sich in vielen Logarithmenwerken.

2) Rechentafeln von A. L. Crelle (5. Ausg. 1880) und H. Zin mann, 1889.

3) Bei Beobachtungen ungleicher Genauigkeit kommt noch die plikation mit den Gewichten hinzu. Das zu berechnende Summen lautet hier

$$\begin{array}{cccc} [paa] & [pab] & [pac] & [pal] \\ & [pbb] & [pbc] & [pbl] \\ & & [pcc] & [pcl], \end{array}$$

ist aber bei den weiteren Rechenprozessen genau so wie (2) zu behandeln daher häufig auch in der Form

$$\begin{array}{cccc} (aa) & (ab) & (ac) & (al) \\ & (bb) & (bc) & (bl) \\ & & (cc) & (cl) \end{array}$$

geschrieben. Dementsprechend werden auch weiter unten, in (3), (4), . eckigen Klammern durch runde ersetzt.

Das *vierte* Geschäft betrifft die Berechnung der *scheinbaren Fehler*. Man erhält sie durch Einsetzung von x, y, z in die Fehlergleichungen (1).

Das *letzte* Geschäft ist die *Genauigkeitsbestimmung*. Sie erfordert die Berechnung des mittleren Fehlers der einzelnen Beobachtung oder der Gewichtseinheit. Dazu ist die Bildung von $[\lambda\lambda]$, beziehungsweise $[p\lambda\lambda]$ nötig, wozu wieder Quadrat- und eventuell auch Produkttafeln verwendet werden können. Hierauf hat man bei u Unbekannten

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-u}}, \quad \text{beziehungsweise} = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{n-u}}. \tag{5}$$

Daraus berechnen sich mittels der Gewichte p_x, p_y, p_z der Unbekannten deren mittlere Fehler:

$$\mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{p_x}}, \quad \mu_y = \frac{\mu}{\sqrt{p_y}}, \quad \mu_z = \frac{\mu}{\sqrt{p_z}}. \tag{6}$$

Bei der Ausführung umfangreicher Rechnungen ist die Anwendung von *Kontrollen* unbedingt erforderlich. Die Theorie gibt deren einige unmittelbar an die Hand. So besteht eine durchgreifende Probe nach Auflösung der Normalgleichungen und Berechnung der λ darin, daß man prüft, ob

$$[a\lambda] = 0, \quad [b\lambda] = 0, \quad [c\lambda] = 0 \tag{7}$$

sei, wie es die Theorie verlangt [s. Nr. 145, Gleichung (14)]. Bei ungleich genauen Beobachtungen treten an Stelle von (7) die Gleichungen:

$$[pa\lambda] = 0, \quad [pb\lambda] = 0, \quad [pc\lambda] = 0 \tag{7*}$$

[s. Nr. 148, Gleichung (6*)].

Eine andere, ebenfalls durchgreifende Kontrolle besteht in einer zweiten Berechnung von $[\lambda\lambda]$, die sich wie folgt ergibt. Aus

$$\lambda_\nu = -l_\nu + a_\nu x + b_\nu y + c_\nu z$$

folgt, wenn man quadriert und addiert,

$$\begin{aligned}[\lambda\lambda] = [ll] &+ \{[aa]x + [ab]y + [ac]z - 2[al]\}x \\ &+ \{[ab]x + [bb]y + [bc]z - 2[bl]\}y \\ &+ \{[ac]x + [bc]y + [cc]z - 2[cl]\}z,\end{aligned}$$

und dies reduziert sich vermöge der Normalgleichungen auf

$$[\lambda\lambda] = [ll] - [al]x - [bl]y - [cl]z.$$

Um sich nun von den berechneten Werten der Unbekannten unabhängig zu machen, schreibe man die erste der Gleichungen (4) darunter in der Anordnung

$$0 = -\frac{[al]}{[aa]} + x + \frac{[ab]}{[aa]}y + \frac{[ac]}{[aa]}z,$$

multipliziere sie mit $[al]$ und addiere sie zur vorigen; dadurch entsteht:

$$[\lambda\lambda] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - [bl \cdot 1]y - [cl \cdot 1]z.$$

Hierunter setze man die zweite der Gleichungen (4):

$$0 = -\frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} \qquad + y + \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}z,$$

multipliziere sie mit $[bl \cdot 1]$ und addiere zu vorigen; es entsteht:

$$[\lambda\lambda] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - [cl \cdot 2]z.$$

Die letzte der Gleichungen (4) nach Multiplikation mit $[cl \cdot 2]$ dazugefügt, erhält man schließlich:

$$[\lambda\lambda] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \frac{[cl \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]}. \tag{8}$$

Hat man dem Schema (2) gleich von Anfang an die Summe $[ll]$ angereiht, so erfordert die Durchführung dieser Formel (8) nur noch Größen, welche schon wegen der Bildung der reduzierten Normalgleichungen (4) notwendig sind. Übrigens ist die rechte Seite von (8) gleichbedeutend mit dem Symbol $[ll \cdot 3]$ und kann daher auch nach den Schematen von Nr. 149 gebildet werden; denn es ist

$$[ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} = [ll \cdot 1]$$

$$[ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} = [ll \cdot 1] - \frac{[bl \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} = [ll \cdot 2],$$

daher

$$[\lambda\lambda] = [ll \cdot 2] - \frac{[cl \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} = [ll \cdot 3],$$

wenn man das Gesetz der Schemata fortbildet.

Bei großen Ausgleichungsarbeiten führt man eine die ganze Rechnung begleitende Kontrolle durch, auf die hier nicht eingegangen werden soll[1]).

152. Bedeutung der Resultate. Ableitung empirischer Formeln. Die Theorie vermittelnder Beobachtungen, wie sie hier dargestellt worden ist, beruht auf gewissen Voraussetzungen. Halten wir an dem Falle fest, daß es sich um eine lineare Beziehung handle, so wird zunächst angenommen, daß in der Gleichung

$$\varepsilon_\nu = -l_\nu + a_\nu X + b_\nu Y + c_\nu Z \tag{1}$$

ε_ν den Fehler der Beobachtung l_ν vorstelle und die Parameter a_ν, b_ν, c_ν fehlerfrei bestimmt seien. Weiter wird vorausgesetzt, daß ε_ν dem Gesetze

$$\frac{h_\nu}{\sqrt{\pi}} e^{-h_\nu^2 \varepsilon_\nu^2}$$

---

1) Näheres hierüber findet man in F. R. Helmert, Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 1872, p. 104ff.

folge. Unter diesen Voraussetzungen hat sich die Methode der kleinsten Quadrate als diejenige lineare Kombination der Gleichungen (1) ergeben, welche die mit dem kleinsten Fehlerrisiko verbundenen Werte der Unbekannten liefert, wobei der Begriff des Fehlerrisikos in der Fassung von Nr. 128 gedacht ist.

Unter minder einschränkenden Voraussetzungen, nämlich unter der Annahme, daß die ε_ν von konstanten Anteilen frei seien, daß also das Gesetz, welchem das einzelne ε_ν folgt, irgend eine gerade Funktion von ε_ν sei, hat Gauß[1]) die Methode der kleinsten Quadrate als diejenige lineare Kombination der Gleichungen (1) nachgewiesen, welche Werte der Unbekannten mit den kleinsten mittleren Fehlern liefert. Auch hier ist das Prinzip des kleinsten Fehlerrisikos zur Grundlage genommen, jedoch in dem besonderen Sinne, daß hierunter die Quadratwurzel aus dem mittleren Fehlerquadrat verstanden wird.

Kann ferner angenommen werden, daß die scheinbaren Fehler

$$\lambda_\nu = -l_\nu + a_\nu x + b_\nu y + c_\nu z, \tag{2}$$

welche aus der Annahme x, y, z für X, Y, Z resultieren, dem Gesetz $\frac{h_\nu}{\sqrt{\pi}} e^{-h_\nu^2 \lambda_\nu^2}$ folgen, so erweist sich die Methode der kleinsten Quadrate als dasjenige Verfahren, das die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten liefert, weil sie der Koexistenz der Werte λ_ν $(\nu = 1, 2, \cdots n)$ die größte Wahrscheinlichkeit verleiht.

Die Methode der kleinsten Quadrate wird aber auch in Fällen zur Anwendung gebracht, wo die Sachlage eine von der obigen verschiedene ist. Man denke zunächst an den Fall, daß nicht bloß l_ν, sondern daß auch die Parameterwerte a_ν, b_ν, c_ν Resultate der Beobachtung und daher Fehlern unterworfen seien; dann hat ε_ν die Bedeutung des Fehlers der Funktion $-l_\nu + a_\nu X + b_\nu Y + c_\nu Z$. Wüßte man, daß die Fehler von l_ν, a_ν, b_ν, c_ν sämtlich Gesetze von der Form $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \delta^2}$ befolgen, so könnte nach Nr. 126 das Gesetz bestimmt werden, nach dem ε_ν sich richtet, und damit wäre auch die der Gleichung (1) zuzuschreibende Präzision gefunden, alles dies jedoch unter der Voraussetzung, daß man gute Näherungswerte von X, Y, Z im voraus kennt.

Ein weites und wichtiges Gebiet der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate bildet die *Ableitung empirischer Formeln.*

Es liege ein Beobachtungsmaterial vor, das sich auf eine Größe V und auf Parameter a, b, c bezieht, von welchen jene abhängt; dasselbe bestehe in n Reihen zusammengehöriger Werte

$$l_\nu; \quad a_\nu, \quad b_\nu, \quad c_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots n).$$

1) Theoria combinat.

Man soll dieses Beobachtungsmaterial durch eine analytische Gleichu

$$V = F(X, Y, Z) \quad ($$

darstellen, die entweder aus theoretischen Erwägungen hervorgegang ist oder als Hypothese über den Zusammenhang zwischen V, a, b, angenommen wurde und außer diesen Größen noch u ($= 3$) unbekann Konstanten X, Y, Z enthält.

Man schlägt nun zur Lösung dieser Aufgabe den Weg ein, d die Methode der kleinsten Quadrate für dieses Problem, als einen F der Ausgleichungsrechnung, vorschreibt, bestimmt die „vorteilhafteste Werte x, y, z der Unbekannten und bildet mit diesen die empirisc Formel

$$v = F(x, y, z), \quad ($$

welche gestattet, zu jeder Wertgruppe der Parameter a, b, c den z gehörigen Wert von V zu *berechnen*.

In solchen Fällen handelt es sich nicht mehr um die „Ausgl chung von *Beobachtungs*fehlern"; denn die λ_ν, welche sich durch d Differenzen

$$\lambda_\nu = -l_\nu + v_\nu$$

darstellen, stammen jetzt nicht allein von den Fehlern her, welc den beobachteten Größen l_ν, a_ν, b_ν, c_ν anhaften, sondern und me viel mehr aus den vereinfachenden Annahmen, welche bei der th retischen Ableitung des Ansatzes (3) gemacht worden sind, beziehun weise aus der Hypothese, deren analytischen Ausdruck dieser Ans bildet. Die gewonnene Formel (4) kann als eine solche bezeich werden, der das Beobachtungsmaterial in seiner Gänze „möglic genau genügt", und die Summe $[\lambda\lambda]$, die kleinste unter allen, so la man an der Form (3) festhält, repräsentiert ein „Maß für das nügen". Die Gewichte der Unbekannten, wenn man sie mitbestim belehren über den Grad der Sicherheit, mit welchem jede einz Unbekannte bestimmt ist. Hat man über dasselbe Beobachtu material zwei verschiedene Hypothesen in Form von Gleichungen gestellt und zu jeder Hypothese die empirische Formel bestimmt, zeigen die zugehörigen Summen $[\lambda\lambda]$, welche der Hypothesen Beobachtungsmaterial in seiner Gänze besser darzustellen geeignet man wird von diesem Gesichtspunkte aus jener den Vorzug ge der das kleinere $[\lambda\lambda]$ zukommt[1]).

---

1) Über diese erweiterte Auffassung der Methode der kleinsten Qua als ein Verfahren zur Lösung von Problemen des „möglichst genau Genüg des „möglichst nahe Liegens" (bei geometrischer Auslegung) vergleiche ma kleine Schrift von R. Henke, Über die Methode der kleinsten Quad 2. Aufl., 1894.

Eine allgemeine Entscheidung darüber, wann eine empirische Formel überhaupt geeignet ist, einen Komplex von Beobachtungen analytisch darzustellen, kann nicht gefällt werden. Es hängt dies davon ab, ob die λ_ν, zu welchen die Formel führt, innerhalb der Fehlergrenze liegen, mit welcher V beobachtet werden kann, oder ob sie Abweichungen vorstellen, die mit Rücksicht auf den verfolgten Zweck vernachlässigt werden dürfen.

153. Beispiel LX. Die Linien des sogenannten Wasserstoffspektrums zeigen eine von Balmer entdeckte Gesetzmäßigkeit; man kann nämlich die Wellenlänge der aufeinanderfolgenden Linien H_α, H_β, H_γ, $\cdots$ des Spektrums durch die Formel

$$L = \frac{m^2}{m^2 - 4} X$$

ausdrücken, in welcher m die aufeinander folgenden ganzen Zahlen von 3 an und X einen konstanten Faktor bedeutet; zur Berechnung dieses Faktors sollen die Ergebnisse der von Ames durchgeführten Messungen der Wellenlängen benützt werden, deren Resultate in der weiter unten aufgestellten Tabelle aus der ersten und vierten Kolonne ersichtlich sind[1]).

Bezeichnet man den a priori bekannten Parameter $\frac{m^2}{m^2 - 4}$ mit a, die beobachtete Wellenlänge mit l, so gibt die obige Formel Anlaß zu einem System von Fehlergleichungen der Form:

$$\lambda = -l + ax.$$

Bestimmt man für X aus irgend einer der Beobachtungen den auf Einheiten abgerundeten Näherungswert X_0, so ergibt sich

$$X_0 = 3647;$$

nennt man den vorteilhaftesten Wert der hieran anzubringenden Korrektur ξ, so nehmen die Fehlergleichungen die Gestalt

$$\lambda = -l' + a\xi$$

an, wobei

$$l' = l - aX_0.$$

Die einzige Normalgleichung

$$[aa]\xi = [al']$$

liefert

$$\xi = \frac{[al']}{[aa]} = \frac{2{,}80}{17{,}47} = 0{,}16;$$

folglich ist

$$x = X_0 + \xi = 3647{,}16,$$

1) W. Nernst, Theoretische Chemie, 2. Aufl., 1898, p. 195—196.

und die empirische Formel zur Bestimmung der Wellenlängen lautet: [redacted]

$$L = 3647{,}16\,\frac{m^2}{m^2 - 4}.$$

Die nachfolgende Tabelle gibt außer den Beobachtungen auch [redacted] die zur Berechnung von x benützten Größen sowie die Differenzen [redacted] $l - L$ oder Beobachtung — Berechnung. Eine Genauigkeitsbestimmung [redacted] ist nicht vorgenommen worden.

Linie	m	a	l	l'	aa	al'	$l - L$
$H\alpha$	3	1,8000	6564,97	0,37	3,2400	0,67	0,08
β	4	1,3333	4862,93	0,39	1,7769	0,52	0,06
γ	5	1,1905	4342,00	0,25	1,4185	0,48	0,07
δ	6	1,1250	4103,11	0,33	1,2656	0,37	0,05
ε	7	1,0889	3971,40	0,18	1,1859	0,19	0,02
ζ	8	1,0667	3890,30	0,15	1,1385	0,16	0,02
η	9	1,0519	3836,80	0,34	1,1067	0,36	0,17
ϑ	10	1,0417	3799,20	0,12	1,0858	0,12	0,09
ι	11	1,0342	3771,90	0,17	1,0692	0,17	0,01
$\varkappa$	12	1,0286	3751,30	0,00	1,0588	0,00	— 0,01
λ	13	1,0242	3735,30	0,04	1,0486	0,04	— 0,27
μ	14	1,0208	3722,80	— 0,17	1,0424	— 0,17	— 0,33
ν	15	1,0181	3712,90	— 0,11	1,0363	— 0,11	— 0,27
					17,4732	2,80	

154. Beispiel LXI. *Ausgleichung von Höhenmessungen.* [redacted] E sind die Höhenabstände folgender Punktepaare gemessen worden:

$$(AB) = l_1, \quad (AC) = l_2, \quad (AD) = l_3$$
$$(BC) = l_4, \quad (BD) = l_5$$
$$(CD) = l_6.$$

Zur Festlegung der relativen Höhenlage der vier Punkte $A, B, C,$ D genügen aber drei Höhenabstände, somit sind drei Beobachtung[redacted]en überzählig. Faßt man die drei ersten Höhenabstände als die Un[redacted]e-kannten X, Y, Z auf, so ergeben sich folgende Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -l_1 + x \\
\lambda_2 &= -l_2 \qquad + y \\
\lambda_3 &= -l_3 \qquad\qquad + z \\
\lambda_4 &= -l_4 - x + y \\
\lambda_5 &= -l_5 - x \qquad + z \\
\lambda_6 &= -l_6 \qquad - y + z.
\end{aligned}$$

Sind alle Messungsergebnisse als gleich genau zu betrachten, so hat man zur Bestimmung von x, y, z die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} 3x - \ y - \ z &= l_1 - l_4 - l_5 \\ -x + 3y - \ z &= l_2 + l_4 - l_6 \\ -x - \ y + 3z &= l_3 + l_5 + l_6. \end{aligned}$$

Zu ihrer Lösung bilde man die Summe:

$$x + y + z = l_1 + l_2 + l_3$$

1 addiere sie folgeweise zur ersten, zweiten und dritten Gleichung; lurch erhält man:

$$x = \frac{1}{4}\{2l_1 + l_2 + l_3 - l_4 - l_5\}$$

$$y = \frac{1}{4}\{l_1 + 2l_2 + l_3 + l_4 - l_6\}$$

$$z = \frac{1}{4}\{l_1 + l_2 + 2l_3 + l_5 + l_6\}.$$

Für $[\lambda\lambda]$ erhält man nach der Formel

$$[\lambda\lambda] = [ll] - [al]x - [bl]y - [cl]z$$

t Benützung der rechten Seiten der Normalgleichungen den Ausdruck:

$$\cdot] = \frac{1}{2}\{[ll] - l_1 l_2 - l_1 l_3 - l_2 l_3 - l_2 l_4 + l_2 l_6 + l_3 l_4 - l_3 l_5 - l_3 l_6 - l_4 l_5 + l_4 l_6 - l_5 l_6\};$$

Quadratwurzel aus dem dritten Teile dieses Wertes wäre der ;tlere Fehler einer einzelnen Beobachtung.

Die Gewichtsgleichungen für x sind:

$$\begin{aligned} 3Q_{11} - \ Q_{12} - \ Q_{13} &= 1 \\ -Q_{11} + 3Q_{12} - \ Q_{13} &= 0 \\ -Q_{11} - \ Q_{12} + 3Q_{13} &= 0; \end{aligned}$$

fährt man mit ihnen wie mit den Normalgleichungen, so er- t sich:

$$Q_{11} = \frac{1}{2}, \quad \text{ebenso} \quad Q_{22} = \frac{1}{2}, \quad Q_{33} = \frac{1}{2}.$$

ist hiernach der mittlere Fehler jeder Unbekannten dem $\sqrt{\frac{1}{2}}$-fachen ;tleren Fehler einer Beobachtung gleich.

155. Beispiel LXII. *Stationsausgleichung.* Bei dieser handelt sich um eine ähnliche Aufgabe wie bei der Ausgleichung von henmessungen.

Von einem Punkte L aus sind folgende Winkel zwischen den nkten E, S, A, G, Fig. 14, gemessen worden:

$$(ES) = l_1, \quad (EA) = l_2, \quad (EG) = l_3$$
$$(SA) = l_4, \quad (SG) = l_5.$$

Die nachfolgend angegebenen Ergebnisse sind Mittelwerte aus daneben angeführten Anzahl einfacher Beobachtungen:

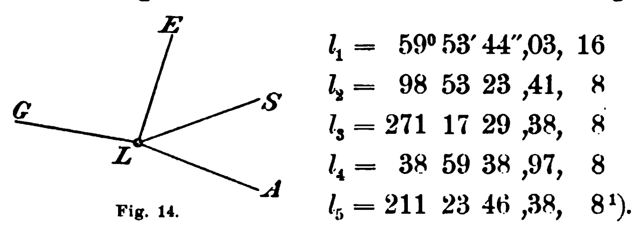


Fig. 14.

$$
\begin{aligned}
l_1 &= 59^0\,53'\,44'',03, & 16\\
l_2 &= 98\;\;53\;\;23\;,41, & 8\\
l_3 &= 271\;\;17\;\;29\;,38, & 8\\
l_4 &= 38\;\;59\;\;38\;,97, & 8\\
l_5 &= 211\;\;23\;\;46\;,38, & 8
\end{aligned}
$$
[1]).

Da zur relativen Bestimmung der vier Richtungen LE, . LA, LG drei Winkel ausreichen, so sind zwei Messungen ül schüssig. Wählt man

$$X = (ES), \quad Y = (EA), \quad Z = (EG)$$

als die Unbekannten, die rohen Beobachtungswerte l_1, l_2, l_3 als de Näherungswerte, so ergeben sich für die vorteilhaftesten Verbe rungen x, y, z an den Näherungswerten die Fehlergleichungen:

$$
\begin{array}{lll|ll}
\lambda_1 = & x & & \text{Gewicht} & 2\\
\lambda_2 = & & y & \text{„} & 1\\
\lambda_3 = & & \qquad z & \text{„} & 1\\
\lambda_4 = & 0{,}41 - x + y & & \text{„} & 1\\
\lambda_5 = & -\,1{,}03 - x & \quad + z & \text{„} & 1
\end{array}
$$

0,41 entsteht als Differenz aus $l_2 - l_1$ und l_4, $-\,1{,}03$ als Diffe aus $l_3 - l_1$ und l_5.

Die Bildung der Normalgleichungen gestaltet sich sehr einf es ist nämlich

$$
\begin{aligned}
&[paa] = 4, \quad [pab] = -\,1, \quad [pac] = -\,1, \quad [pal] = -\,0{,}62\\
&\qquad\qquad\quad [pbb] = \;\;2, \quad [pbc] = \;\;0, \quad [pbl] = -\,0{,}41\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad [pcc] = \;\;2, \quad [pcl] = \;\;1{,}03;
\end{aligned}
$$

sie lauten daher

$$
\begin{aligned}
4x - \;y - \;z &= -\,0{,}62\\
-x + 2y \qquad &= -\,0{,}41\\
-x \qquad + 2z &= \;\;1{,}03
\end{aligned}
$$

und geben ohne Mühe

$$x = -\,0'',103, \quad y = -\,0'',257, \quad z = 0'',464.$$

Man berechnet daraus

1) Die Europäische Längengradmessung. I. Heft. Veröffentl. d. Kö Preuß. Geod Inst. etc. 1893, p. 205.

$$\lambda_1 = -0{,}103$$
$$\lambda_2 = -0{,}257$$
$$\lambda_3 = 0{,}464$$
$$\lambda_4 = 0{,}257$$
$$\lambda_5 = -0{,}464,$$

und zwischen den ausgeglichenen Winkeln

$$\begin{aligned} l_1 + \lambda_1 &= 59^0\,53'\,43'',927 \\ l_2 + \lambda_2 &= 98\ 53\ 23\ ,153 \\ l_3 + \lambda_3 &= 271\ 17\ 29\ ,844 \\ l_4 + \lambda_4 &= 38\ 59\ 39\ ,226 \\ l_5 + \lambda_5 &= 211\ 23\ 45\ ,917 \end{aligned}$$

bestehen keine Widersprüche mehr.

Aus den drei Systemen von Gewichtsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} 4Q_{11} - Q_{12} - Q_{13} &= 1 \\ -Q_{11} + 2Q_{12} \qquad &= 0 \\ -Q_{11} \qquad + 2Q_{13} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 4Q_{21} - Q_{22} - Q_{23} &= 0 \\ -Q_{21} + 2Q_{22} \qquad &= 1 \\ -Q_{21} \qquad + 2Q_{23} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 4Q_{31} - Q_{32} - Q_{33} &= 0 \\ -Q_{31} + 2Q_{32} \qquad &= 0 \\ -Q_{31} \qquad + 2Q_{33} &= 1 \end{aligned}\right\}$$

findet man leicht

$$Q_{11} = \frac{1}{3}, \quad Q_{22} = \frac{7}{12}, \quad Q_{33} = \frac{7}{12}.$$

Ferner berechnet sich direkt

$$[p\lambda\lambda] = 0{,}581028,$$

daraus der mittlere Fehler der Gewichtseinheit:

$$\mu = \sqrt{\frac{0{,}581028}{5-3}} = 0'',539;$$

endlich

$$\mu_x = 0'',539\sqrt{\frac{1}{3}} = 0'',309, \quad \mu_y = 0'',539\sqrt{\frac{7}{12}} = 0'',415 = \mu_z.$$

156. Beispiel LXIII. *Empirische Formel für die Länge des Sekundenpendels.* Die Länge des Sekundenpendels an einem Orte unter der geographischen Breite B läßt sich durch die Formel:

$$L = X - Y \cos 2B$$

darstellen, in welcher X, Y Konstanten bedeuten. Da für $B = 45^0$ $L = X$ wird, so heißt X die auf 45^0 reduzierte Pendellänge, und Y

ist die Konstante, durch welche die Reduktion bewirkt wird. A[illegible] Grund des nachfolgend mitgeteilten Beobachtungsmaterials ist [illegible] Bestimmung der Konstanten vorzunehmen[1]).

Ist l eine unter der Breite B gemessene Pendellänge, so gibt [illegible] Anlaß zu der Fehlergleichung:

$$\lambda = -l + x - y \cos 2B.$$

Aus einer vorläufigen Rechnung ergab sich für y der Näherungsw[illegible] 0,002636 in Metern; setzt man

$$y = 0{,}002636 \left(1 - \frac{\eta}{100}\right),$$

so daß η die prozentische Verbesserung dieses Wertes bedeutet, s[illegible] verwandelt sich die Fehlergleichung in:

$$\lambda = -l - 0{,}002636 \cos 2B + x + 0{,}00002636\,\eta \cos 2B;$$

mit

$$l + 0{,}002636 \cos 2B = l', \quad 0{,}00002636 \cos 2B = b$$

schreibt sie sich endlich:

$$\lambda = -l' + x + b\eta.$$

In nachstehender Tabelle sind die Werte von l' und b für [illegible]cht verschiedene Breiten zwischen 0 und 80° und die weiter zur Du[illegible]ch-führung der Rechnungen erforderlichen Größen zusammengestellt[illegible]

Nr.	l' in Mikrons	b in Mikrons	bb	bl'	λ	λ[illegible]
1	993 568	25,5	650,25	25 335 984,0	− 13,8	190[illegible]44
2	993 559	22,9	524,41	22 752 501,1	− 5,4	2[illegible] 16
3	993 528	17,5	306,25	17 386 740,0	+ 24,6	605[illegible] 16
4	993 552	10,4	108,16	10 332 940,8	− 0,8	[illegible]64
5	993 551	1,5	2,25	1 490 326,5	− 1,4	[illegible]96
6	993 555	− 8,0	64,00	− 7 948 440,0	− 7,2	5[illegible]84
7	993 540	− 16,2	262,44	− 16 095 348,0	+ 6,1	3[illegible]21
8	993 549	− 22,5	506,25	− 22 354 852,5	− 4,0	16[illegible]00
	7 948 402	31,1	2424,01	30 899 851,9		93[illegible]41
	$[l']$	$[b]$	$[bb]$	$[bl']$		$[\lambda$[illegible]$]$

Da in dem vorliegenden Falle $a_\nu = 1$ ist für alle Werte vo[illegible] ν, so ist $[aa] = 8$, $[ab] = [b]$, $[al'] = [l']$, und es lauten daher die Normalgleichungen:

$$8x + \quad 31{,}1\eta = \quad 7\,948\,402$$

$$31{,}1x + 2424{,}0\eta = 30\,899\,852.$$

1) F. R. Helmert, Die mathem. u. physik. Theor. d. höheren Geodä[illegible]ie. *II. Bd., 1884*, p. 238ff.

Multipliziert man die erste mit $\frac{31,1}{8}$ und subtrahiert sie von der weiten, so entsteht

$$2302,7\,\eta = 447,$$

voraus

$$\eta = 0,19$$

und

$$p_\eta = 2302,7.$$

Kehrt man die Normalgleichungen um:

$$2424,0\eta + 31,1x = 30\,899\,852$$
$$31,1\eta + \quad 8x = 7\,948\,402,$$

multipliziert die erste mit $\frac{31,1}{2424,0}$ und subtrahiert sie von der zweiten, ergibt sich

$$7,6x = 7\,551\,596,$$

araus

$$x = 993\,549$$

nd

$$p_x = 7,6.$$

Mit Hilfe von x, η können nun aus den Fehlergleichungen die λ rechnet werden; so ist

$$\lambda_1 = -\,993\,568 + 993\,549 + 25,5 \cdot 0,19 = -\,13,8$$

s. w.; die Werte sind in die Tabelle eingestellt.

Der mittlere Fehler einer Gleichung ist hiernach

$$\mu = \sqrt{\frac{932,41}{8 - 2}} = 12,5 \text{ Mikrons},$$

mittlere Fehler in der Bestimmung von η:

$$\mu_\eta = \frac{12,5}{\sqrt{2303}} = 0,26.$$

Wie aus den Gewichten zu ersehen, ist die Bestimmung von x unsicherer als die von η; der mittlere Fehler von x:

$$\mu_x = \frac{12,5}{\sqrt{7,6}} = 4,5$$

gt $4\frac{1}{2}$ Mikrons.

Für y ergibt sich jetzt der Wert

$$y = 0,002636\,(1 - 0,0019) = 0,002631$$

m mittleren Fehler

$$0,002631 \cdot 0,0026.$$

Mithin lautet die empirische Formel mit Angabe der mittleren Unsicherheit in y:

$$\mathfrak{L} = 993\,549 - 2631\,(1 \mp 0{,}0026)\cos 2B$$

in Mikrons, oder, wenn man $\cos 2B$ durch $1 - 2\sin^2 B$ ersetzt:

$$\mathfrak{L} = 0{,}990918\,\{1 + (0{,}005310 \mp 0{,}000014)\sin^2 B\}$$

in Metern.

157. Beispiel LXIV. *Empirische Formel für die Spannkraft des gesättigten Wasserdampfes.* Magnus hat im Anschlusse an Untersuchungen von August für den Zusammenhang zwischen der Spannkraft S und der Temperatur t des gesättigten Wasserdampfes die Formel

$$S = X\,10^{\frac{tY}{Z+t}} \qquad (1)$$

aufgestellt, in welcher X, Y, Z Konstanten bedeuten. Für diese sollen auf Grund des in den zwei ersten Kolonnen der weiter unten folgenden Tafel mitgeteilten, von Magnus stammenden Beobachtungsmaterials die vorteilhaftesten Werte gefunden werden.

Es bieten sich zur Lösung dieser Aufgabe zwei Wege dar (s. Nr. 150). Logarithmiert man (1), so entsteht:

$$\log S = \log X + \frac{tY}{Z+t};$$

entwickelt man den Bruch mit Hilfe von Näherungswerten Y_0, Z_0 für Y, Z nach den Korrektionen y, z, so gibt er bei Beschränkung auf deren erste Potenzen:

$$\frac{tY_0}{Z_0+t} + \frac{t}{Z_0+t}\,y - \frac{tY_0}{(Z_0+t)^2}\,z,$$

und wenn l die zu t gehörige Beobachtung ist, so entsteht die Fehlergleichung:

$$\lambda = -\log l + \frac{tY_0}{Z_0+t} + \log X + \frac{t}{Z_0+t}\,y - \frac{tY_0}{(Z_0+t)^2}\,z, \qquad (2)$$

die linear ist in bezug auf $\log X, y, z$; bei weiterer Führung der Rechnung wäre ihr das Gewicht

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial \log l}{\partial l}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{M}{l}\right)^2} = \left(\frac{l}{M}\right)^2$$

oder ein zu l^2 proportionales Gewicht beizulegen, wenn M den Modul der gemeinen Logarithmen bedeutet.

Der zweite Weg besteht darin, daß man die Funktion in selbst mit Hilfe von Näherungswerten X_0, Y_0, Z_0 aller drei stanten nach den Korrektionen x, y, z entwickelt. Setzt man

$$\left.\begin{array}{l} X_0 10^{\frac{tY_0}{Z_0+t}} = S_0, \\ \ldots^{\frac{tY_0}{+t}} = a, \quad \frac{\partial S_0}{\partial Y_0} = X_0 10^{\frac{tY_0}{Z_0+t}} \cdot \frac{tl\cdot 10}{Z_0+t} = \frac{X_0 tl \cdot 10}{Z_0+t} a = b, \\ \frac{\partial S_0}{\partial Z_0} = X_0 10^{\frac{tY_0}{Z_0+t}} \frac{-Y_0 tl\cdot 10}{(Z_0+t)^2} = \frac{-Y_0}{Z_0+t} b = c, \\ l - S_0 = l', \end{array}\right\} \quad (3)$$

sich für die Beobachtung l die lineare Fehlergleichung:

$$\lambda = -l' + ax + by + cz. \quad (4)$$

Vorgang ist dem früheren, hauptsächlich wegen der be-
en Berücksichtigung der Gewichte, vorzuziehen.

r folgenden Tabelle sind neben dem Beobachtungsmaterial ach den Formeln (3) gerechneten Koeffizienten der Fehler-
n zusammengestellt und die aus der weiteren Rechnung ngenen Abweichungen λ angefügt. Was die Näherungs-
ngt, so verschafft man sich solche durch Anwendung der (1) auf drei Beobachtungen; für $t = 0$ hat man sogleich ; die andern zwei Gleichungen bringt man durch Logarith-
f die Form:

$$tY_0 - \log \frac{l}{X_0} \cdot Z_0 = t \log \frac{l}{X_0},$$

linear werden in bezug auf Y_0, Z_0. Eine derart durch-
echnung ergab:

$$X_0 = 4{,}53, \quad Y_0 = 7{,}45, \quad Z = 234{,}70.$$

tur	Spannkraft l mm	a	b	c	l'	λ mm
1	2,95	+ 0,672	— 0,161	+ 0,005	— 0,095	+ 0,036
4	3,45	0,763	— 0,124	+ 0,005	— 0,007	— 0,058
0	4,525	1,000	0,000	0,000	— 0,005	— 0,078
1	7,93	1,761	+ 0,605	— 0,018	— 0,049	— 0,082
3	9,88	2,300	1,165	0,035	— 0,541	+ 0,376
2	13,52	3,149	2,196	0,064	— 0,746	+ 0,537
5	22,24	4,867	4,681	0,136	+ 0,194	— 0,490
5	43,96	9,763	13,523	0,373	— 0,265	— 0,230
0	71,20	15,717	26,326	0,726	+ 0,002	— 0,697
2	101,40	22,583	42,806	1,112	— 0,903	+ 0,028
8	139,72	30,910	64,490	1,636	— 0,893	— 0,165
7	281,55	62,300	156,520	3,723	— 0,649	— 0,839
3	330,58	73,152	190,924	4,543	— 1,248	— 0,331
5	387,56	85,765	232,136	5,455	— 1,365	— 0,283
1	453,31	100,319	281,098	6,528	— 3,807	+ 2,109
4	552,20	122,213	357,103	8,160	— 0,592	— 1,115
6	602,53	133,354	396,752	9,003	— 2,314	+ 0,624
9	743,49	164,564	510,637	11,381	— 1,916	+ 0,349
7	784,07	173,547	544,065	12,079	— 6,439	+ 4,922
4	895,83	198,293	637,758	13,999	+ 3,435	— 4,772

Nach Ausrechnung der Summenkoeffizienten ergeben sich d[illegible] Normalgleichungen:

$$157\,743{,}1225x + 476\,833{,}1814y - 10\,722{,}0171z = -1816{,}896[illegible]$$
$$476\,833{,}1814x + 1\,449\,178{,}8203y - 32\,531{,}7187z = -5302{,}705[illegible]$$
$$-10\,722{,}0181x - 32\,531{,}7187y + 740{,}5679z = 121{,}559[illegible]$$

Eliminiert man nach dem Nr. 149 erläuterten Vorgange nach u[illegible] nach x und y, so gibt die Endgleichung:

$$9{,}9061z = 1{,}0019$$

gleichzeitig

$$z = 0{,}1011 \quad \text{und} \quad p_z = 9{,}91;$$

aus dem auf diese Weise entspringenden System reduzierter Nor[illegible]gleichungen:

$$x + 3{,}0228y - 0{,}0679z = -0{,}0115$$
$$y - 0{,}0155z = 0{,}0243$$
$$z = 0{,}1011$$

folgt durch Substitution:

$$y = 0{,}0259, \quad x = -0{,}0829.$$

Durch Umstellung der Normalgleichungen ergab sich weiter:

$$p_y = 6548{,}36, \quad p_x = 816{,}35.$$

Hiernach sind die verbesserten Werte der Konstanten:

$$X_0 + x = 4{,}53 - 0{,}0829 = 4{,}4471$$
$$Y_0 + y = 7{,}45 + 0{,}0259 = 7{,}4759$$
$$Z_0 + z = 234{,}70 + 0{,}1011 = 234{,}8011,$$

und es lautet die empirische Formel:

$$S = 4{,}4471 \cdot 10^{\frac{7{,}4759\,t}{234{,}8011 + t}}.$$

Aus

$$[\lambda\lambda] = 55{,}3481$$

berechnet sich der mittlere Fehler einer Gleichung:

$$\mu = \sqrt{\frac{55{,}3481}{20 - 3}} = 1{,}80 \text{ mm};$$

daraus folgen die mittleren Fehler der Konstanten:

$$\mu_x = \frac{1{,}80}{\sqrt{816{,}35}} = 0{,}0630, \quad \mu_y = \frac{1{,}80}{\sqrt{6548{,}36}} = 0{,}0222, \quad \mu_z = \frac{1{,}80}{\sqrt{9{,}91}} = 0{,}57[illegible]$$

Nachstehend ist für einige Temperaturen der nach Formel (5) berechnete Wert von S neben denjenigen gestellt, welcher sich in

chs „Leitfaden der praktischen Physik“, 8. Aufl., 1896, 70 angegeben findet. Man wird daraus entnehmen, daß die amentlich für nicht zu hohe Temperaturen den Gang der tell bestimmten Werte gut wiedergibt.

Temperatur	Spannung	
	nach (5)	nach Kohlrausch
— 10°	2,1^{mm}	2,2^{mm}
0	4,4	4,6
+ 10	9,0	9,1
20	17,2	17,4
30	31,3	31,5
40	54,5	54,9
50	91,3	92,0
60	148,8	148,9
70	231,7	233,3
80	353,1	355,4
90	524,3	525,9
100	760,2	760,0

§ 3. Bedingte Beobachtungen.

Problemstellung. Zurückführung auf vermittelnde tungen. Für die Größen $X_1, X_2, \cdots X_n$ seien durch Be- ; die Werte $l_1, l_2, \cdots l_n$ erhalten worden. Sind jene *unab-* n einander, so kann der Fall unter die Form vermittelnder ingen gestellt werden wie folgt: Es ist die Größe

$$V = aX_1 + bX_2 + \cdots + gX_n$$

obachtet worden, und den einzelnen Beobachtungen ent- die nachstehenden Wertgruppen von V und der Parameter g:

$$\begin{array}{llllll} l_1; & 1, & 0, & 0, & \cdots & 0 \\ l_2; & 0, & 1, & 0, & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ l_n; & 0, & 0, & 0, & \cdots & 1. \end{array}$$

us ergibt sich das System der Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + x_1 \\ \lambda_2 &= -l_2 \quad + x_2 \\ &\cdots\cdots \\ \lambda_n &= -l_n \qquad + x_n, \end{aligned}$$

wieder das System der Normalgleichungen hervorgeht:

$$x_1 = l_1$$
$$x_2 = l_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_n = l_n,$$

das nichts anderes besagt, als daß in diesem Falle der vorteilha Wert einer jeden Unbekannten der durch die Beobachtung fü erhaltene Wert sei. Die Summe $[\lambda\lambda]$ nimmt dabei den ab kleinsten Wert, 0, an. Daraus ist aber nicht auf Fehlerfreihei Beobachtungen zu schließen; vielmehr ist, da sich keine Widersp ergeben können, kein Mittel zur Beurteilung der Genauigkeit handen.

Anders gestaltet sich die Sache, wenn zwischen den Gr $X_1, X_2, \cdots X_n$ Gleichungen bestehen, welche a priori gegeben Dann muß den vorteilhaftesten Werten $x_1, x_2, \cdots x_n$ die *Bedin* auferlegt werden, daß auch sie jene Gleichungen erfüllen. Dies da die rohen Beobachtungsergebnisse vermöge ihrer Fehlerhafti diese Bedingung nicht erfüllen werden, Gleichungen zwischen Verbesserungen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ zur Folge, die an $l_1, l_2, \cdots l_n$ bracht werden müssen, um sie in $x_1, x_2, \cdots x_n$ überzuführen.

Es seien

$$f_1(X_1, X_2, \cdots X_n) = 0$$
$$f_2(X_1, X_2, \cdots X_n) = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f_r(X_1, X_2, \cdots X_n) = 0$$

die Gleichungen, welchen $X_1, X_2, \cdots X_n$ zu genügen haben – *Bedingungsgleichungen.* Ihre Anzahl r ist notwendig kleiner als

Dann wird verlangt, daß auch

$$f_1(x_1, x_2, \cdots x_n) = f_1(l_1 + \lambda_1, l_2 + \lambda_2, \cdots l_n + \lambda_n) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, \cdots x_n) = f_2(l_1 + \lambda_1, l_2 + \lambda_2, \cdots l_n + \lambda_n) = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f_r(x_1, x_2, \cdots x_n) = f_r(l_1 + \lambda_1, l_2 + \lambda_2, \cdots l_n + \lambda_n) = 0$$

sei. Entwickelt man die linken Seiten und setzt dabei zur Abkürz

$$f_1(l_1, l_2, \cdots l_n) = w_1$$
$$f_2(l_1, l_2, \cdot \cdot l_n) = w_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f_r(l_1, l_2, \cdots l_n) = w_r$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial l_\nu} = a_\nu, \quad \frac{\partial f_2}{\partial l_\nu} = b_\nu, \quad \cdots \quad \frac{\partial f_r}{\partial l_\nu} = g_\nu,$$

so entstehen die Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \cdots + a_n\lambda_n + w_1 = 0 & \text{oder} & [a\lambda] + w_1 = 0 \\ b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \cdots + b_n\lambda_n + w_2 = 0 & \text{„} & [b\lambda] + w_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots \\ g_1\lambda_1 + g_2\lambda_2 + \cdots + g_n\lambda_n + w_r = 0 & \text{„} & [g\lambda] + w_r = 0. \end{array} \quad (4)$$

Diese Form der Bedingungsgleichungen ist streng, wenn die (1) linear waren; im andern Falle stellt sie nur eine Näherung dar, die um so zutreffender ist, je kleiner die λ sind.

Die Größen $w_1, w_2, \cdots w_r$ bedeuten, wie aus ihren Definitionen (2) zu ersehen, die *Widersprüche*, die sich ergeben, wenn man in die Bedingungsgleichungen (1) statt der wahren Werte die Beobachtungsergebnisse einsetzt.

Die Gleichungen (4) gestatten, r von den λ, etwa $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_r$, durch die übrigen *linear* auszudrücken. Ist beispielsweise $r = 4$ und $n = 7$, und setzt man

$$\lambda_5 = \xi, \quad \lambda_6 = \eta, \quad \lambda_7 = \zeta,$$

so wird

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{a}_1\xi + \mathfrak{b}_1\eta + \mathfrak{c}_1\zeta \\ \lambda_2 &= -\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{a}_2\xi + \mathfrak{b}_2\eta + \mathfrak{c}_2\zeta \\ \lambda_3 &= -\mathfrak{l}_3 + \mathfrak{a}_3\xi + \mathfrak{b}_3\eta + \mathfrak{c}_3\zeta \\ \lambda_4 &= -\mathfrak{l}_4 + \mathfrak{a}_4\xi + \mathfrak{b}_4\eta + \mathfrak{c}_4\zeta \\ \lambda_5 &= \xi \\ \lambda_6 &= \eta \\ \lambda_7 &= \zeta. \end{aligned} \quad (5)$$

Das ist aber ein System von Fehlergleichungen, wie es bei vermittelnden Beobachtungen vorlag. Hat man auf Grund des Prinzips: „$[\lambda\lambda]$ ein Minimum" die vorteilhaftesten Werte von ξ, η, ζ berechnet und mittels derselben $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_7$ bestimmt, so sind auch $x_1, x_2, \cdots x_7$ gefunden.

Es ist demnach die Ausgleichung von *n Beobachtungen mit r Bedingungsgleichungen* zurückführbar auf die Ausgleichung von *n vermittelnden Beobachtungen mit n — r Unbekannten.*

159. Direkte Lösung des Problems. Außer der eben dargestellten indirekten Lösung läßt das Problem eine direkte Lösung zu, die auf dem Prinzipe beruht, die Summe $[\lambda\lambda]$ so klein zu machen, als es die Bedingungen (4) gestatten. Analytisch kommt dies darauf zurück, das System der λ so zu bestimmen, daß

$$[\lambda\lambda] \text{ ein Minimum}$$

werde unter gleichzeitiger Erfüllung der Gleichungen:

$$[a\lambda] + w_1 = 0, \quad [b\lambda] + w_2 = 0, \quad \cdots \quad [g\lambda] + w_r = 0; \quad (4)$$

dies aber ist dann geschehen, wenn man die λ und die ($k_1, k_2, \cdots k_r$ so bestimmt, daß die Funktion

$$[\lambda\lambda] - 2k_1\{[a\lambda] + w_1\} - 2k_2\{[b\lambda] + w_2\} - \cdots - 2k_r\{[g\lambda] +$$

ein absolutes Minimum erlangt und die Gleichungen (4) bei werden.

Die Ausführung dieser Forderung, wobei wir uns auf de dreier Bedingungsgleichungen beschränken, führt auf das Gleic system:

$$\lambda_1 = a_1k_1 + b_1k_2 + c_1k_3$$
$$\lambda_2 = a_2k_1 + b_2k_2 + c_2k_3$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$\lambda_n = a_nk_1 + b_nk_2 + c_nk_3$$
$$[a\lambda] + w_1 = 0, \quad [b\lambda] + w_2 = 0, \quad [c\lambda] + w_3 = 0,$$

das aus $n + 3$ Gleichungen besteht und daher zur Lösung de gabe gerade ausreicht.

Die Hilfsgrößen $k_1, k_2, \cdots k_r$ heißen *Korrelaten,* die Gleichun welche die λ durch sie ausdrücken, die *Korrelatengleichungen.*

Durch Einsetzung von (6) in (4*) ergeben sich die *N gleichungen*:

$$[aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 + w_1 = 0$$
$$[ab]k_1 + [bb]k_2 + [bc]k_3 + w_2 = 0$$
$$[ac]k_1 + [bc]k_2 + [cc]k_3 + w_3 = 0,$$

die ähnlich gebaut sind wie die Normalgleichungen bei vermit Beobachtungen und zur Berechnung der Korrelaten dienen.

Ist diese vollzogen, so gibt die Eintragung der gefundenen in (6) das vorteilhafteste System der λ, und damit ist auch das hafteste System der Werte der Unbekannten gefunden:

$$x_1 = l_1 + \lambda_1, \quad x_2 = l_2 + \lambda_2, \quad \cdots \quad x_n = l_n + \lambda_n.$$

Zur Auflösung der Normalgleichungen wird man, soba Zahl größer und ihre Koeffizienten vielziffrige Zahlen sind, Nr. 149 erläuterte Verfahren anwenden, das schließlich zu dem *reduzierter Normalgleichungen* hinführt:

$$k_1 + \frac{[ab]}{[aa]}k_2 + \frac{[ac]}{[aa]}k_3 + \frac{w_1}{[aa]} = 0$$
$$k_2 + \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}k_3 + \frac{[w_2\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} = 0$$
$$k_3 + \frac{[w_3\cdot 2]}{[cc\cdot 2]} = 0.$$

Dabei haben die neu eingeführten Symbole $[w_2 \cdot 1]$, $[w_3 \cdot 1]$, $[w_3 \cdot 2]$ folgende Bedeutung:

$$\begin{aligned} [w_2 \cdot 1] &= w_2 - \frac{[ab]}{[aa]} w_1 \\ [w_3 \cdot 1] &= w_3 - \frac{[ac]}{[aa]} w_1 \\ [w_3 \cdot 2] &= [w_3 \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [w_2 \cdot 1]. \end{aligned} \qquad (10)$$

Es erübrigt noch die *Genauigkeitsbestimmung*. Was den *mittleren Fehler einer Beobachtung* anlangt, so ergibt sich dieser aus der Bemerkung am Schlusse der vorigen Nummer, wonach die Aufgabe der Ausgleichung von n Größen mit r Bedingungsgleichungen äquivalent ist der Ausgleichung von n vermittelnden Beobachtungen mit $u = n - r$ Unbekannten; mithin ist nach Nr. 147, (20):

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{r}}. \qquad (11)$$

Dieser mittlere Fehler bezieht sich aber auf die einzelne Beobachtung als solche, nicht aber auf die *ausgeglichene Beobachtung*, die durch die Ausgleichung mit den andern in Kombination getreten ist. Um z. B. den mittleren Fehler von

$$x_1 = l_1 + \lambda_1$$

zu bestimmen, wäre der folgende Weg einzuschlagen: Nach (6) stellt sich λ_1 durch die Korrelaten dar; für diese ergeben sich aus (7) lineare Ausdrücke der w; die w aber sind nach (2) Funktionen der unabhängig erhaltenen Beobachtungen $l_1, l_2, \cdots l_n$; folglich ist x_1 auch eine Funktion dieser letzteren Größen, und sein mittlerer Fehler ist mit Benützung von μ nach den Vorschriften der Nr. 143 zu berechnen. Wir begnügen uns mit dieser Angabe des wesentlichen Gedankenganges, der immer zu befolgen ist, wenn es sich um die Genauigkeitsbestimmung einer Funktion der ausgeglichenen Beobachtungen handelt, und verweisen bezüglich der systematischen Durchführung auf die spezielle Litteratur[1]).

Eine summarische *Rechnungskontrolle* besteht in der zweifachen Bestimmung von $[\lambda\lambda]$. Außer der direkten, welche in dem Quadrieren der einzelnen λ und darauf folgender Summenbildung besteht, gibt es eine indirekte Berechnung jener Summe. Multipliziert man nämlich jede der Gleichungen (6) mit dem entsprechenden λ und bildet hierauf die Summe unter Rücksichtnahme auf (4*), so ergibt sich:

$$[\lambda\lambda] = -[kw]. \qquad (12)$$

1) Z. B. bei Helmert, Die Ausgleichungsrechnung etc. 1872, p. 174 ff.

160. Fortsetzung. Beobachtungen ungleicher Genau[redacted]**keit.** Sind die Beobachtungen $l_1, l_2, \cdots l_n$ ungleich genau, und i[redacted] das Verhältnis ihrer Genauigkeit durch die Gewichte $p_1, p_2, \cdots$ [redacted] gegeben, so bilden die Forderungen:

$$[p\lambda\lambda] \text{ ein Minimum,}$$
$$[a\lambda] + w_1 = 0, \quad [b\lambda] + w_2 = 0, \quad [c\lambda] + w_3 = 0 \qquad \text{(4[redacted]}$$

die Grundlage der Lösung.

Durch Differentiation der Funktion

$$[p\lambda\lambda] - 2k_1\{[a\lambda] + w_1\} - 2k_2\{[b\lambda] + w_2\} - 2k_3\{[c\lambda] + w_3\}$$

bezüglich der einzelnen λ und Nullsetzen der Ableitungen ergeb[redacted] sich die *Korrelatengleichungen*:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a_1}{p_1}k_1 + \frac{b_1}{p_1}k_2 + \frac{c_1}{p_1}k_3 \\ \lambda_2 &= \frac{a_2}{p_2}k_1 + \frac{b_2}{p_2}k_2 + \frac{c_2}{p_2}k_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n &= \frac{a_n}{p_n}k_1 + \frac{b_n}{p_n}k_2 + \frac{c_n}{p_n}k_3; \end{aligned} \qquad \text{(6[redacted]*)}$$

ihre Einführung in die Bedingungsgleichungen (4**) liefert die *Norm*[redacted] *al*-*gleichungen*:

$$\begin{aligned} \left[\frac{aa}{p}\right]k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]k_2 + \left[\frac{ac}{p}\right]k_3 + w_1 &= 0 \\ \left[\frac{ab}{p}\right]k_1 + \left[\frac{bb}{p}\right]k_2 + \left[\frac{bc}{p}\right]k_3 + w_2 &= 0 \\ \left[\frac{ac}{p}\right]k_1 + \left[\frac{bc}{p}\right]k_2 + \left[\frac{cc}{p}\right]k_3 + w_3 &= 0, \end{aligned} \qquad \text{([redacted]*)}$$

deren Auflösung nach demselben Schema vor sich geht wie im F[redacted]lle gleich genauer Beobachtungen. Aus den Korrelaten berechnen [redacted]ich nach (6*) die Verbesserungen und aus diesen die ausgeglichenen [redacted]Beobachtungen:

$$x_1 = l_1 + \lambda_1, \quad x_2 = l_2 + \lambda_2, \quad \cdots \quad x_n = l_n + \lambda_n. \qquad \text{([redacted]*)}$$

Für den *mittleren Fehler der Gewichtseinheit* gilt nun die aus ([redacted] *), Nr. 148 hervorgehende Formel:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{r}}, \qquad \text{(1 [redacted] *)}$$

wenn r die Anzahl der Bedingungsgleichungen bedeutet.

Der Beobachtung l_ν an sich, also vor der Ausgleichung, kom[redacted]t der mittlere Fehler

$$\mu_\nu = \frac{\mu}{\sqrt{p_\nu}}$$

zu; um den mittleren Fehler der ausgeglichenen Beobachtung $x_\nu = l_\nu + \lambda_\nu$ zu bestimmen, müßte der am Schlusse der vorigen Nummer angedeutete Weg eingeschlagen werden.

Die Summe $[p\lambda\lambda]$ kann auch hier zur Kontrolle auf indirektem Wege bestimmt werden; es ergibt sich aus den Gleichungen (6*) mit Zuhilfenahme von (4**) so wie im früheren Falle:

$$[p\lambda\lambda] = -[kw]. \tag{12*}$$

161. Beispiel LXV. *Winkelausgleichung in einem Dreieck.* a) Für die Winkel des Triangulierungsdreiecks MOL sind durch gleich genaue Beobachtungen die Werte:

$$l_1 = 69^0\,35'\,12'',61$$
$$l_2 = 67\;\;46\;\;\;2\;,28$$
$$l_3 = 42\;\;38\;\;45\;,97$$

gefunden worden[1]), deren Summe

$$l_1 + l_2 + l_3 = 180^0\,0'\,0'',86$$

beträgt. Da vermöge der Ausdehnung des Dreiecks sein sphärischer Exzeß zu $0'',41$ gefunden wurde, ist $180^0\,0'\,0'',41$ die theoretische Winkelsumme, folglich $0{,}86 - 0{,}41 = 0'',45$ der Widerspruch, und

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 0'',45 = 0$$

die von den Verbesserungen zu befriedigende Bedingungsgleichung.

Da $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ und alle weiteren Koeffizienten aus der allgemeinen Darstellung Null sind, lauten die Korrelatengleichungen:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = k;$$

die einzige Normalgleichung:

$$3k + 0'',45 = 0$$

gibt

$$k = -0'',15;$$

somit ist auch

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -0'',15.$$

Der Widerspruch ist also im Falle gleicher Genauigkeit der Beobachtungen auf diese gleichmäßig zu verteilen; die ausgeglichenen Beobachtungen:

$$x_1 = 69^0\,35'\,12'',46$$
$$x_2 = 67\;\;46\;\;\;2\;,13$$
$$x_3 = 42\;\;38\;\;45\;,82$$

ergeben die durch die Theorie geforderte Summe.

---

1) Die europäische Längengradmessung. Veröffentlich. d. Königl. Preuß. Geod. Inst. 1893, p. 260.

Weil $[\lambda\lambda] = 3 \cdot 0{,}15^2 = 0{,}0675$, so ist der mittlere Fehler (unausgeglichenen Beobachtung

$$\mu = \sqrt{\frac{0{,}0675}{1}} = 0'',26.$$

Um den mittleren Fehler der ausgeglichenen Beobachtung $x_1 = l_1$ zu erhalten, beachte man, daß $\lambda_1 = k$, weiter $k = -\frac{w}{3}$ $w = l_1 + l_2 + l_3 - S$ ist, wenn S die theoretische Winkelsumm(deutet; mithin ist

$$x_1 = \frac{S}{3} + \frac{2}{3} l_1 - \frac{1}{3} l_2 - \frac{1}{3} l_3$$

und daher nach (2), Nr. 143:

$$\mu_{x_1} = \mu \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \mu \sqrt{\frac{2}{3}} = 0'',21;$$

ebenso groß ergeben sich auch μ_{x_2} und μ_{x_3}.

b) In einem Dreieck wurden die Winkel durch Repetition messen; es ergaben sich die Resultate:

$$\begin{aligned} l_1 &= 81^0\,21'\,43'',36 \text{ aus } 70 \text{ Repetitionen} \\ l_2 &= 25\;\;16\;\;28\;,85 \;\;\text{„}\;\; 101 \;\;\text{„} \\ l_3 &= 73\;\;21\;\;46\;,35 \;\;\text{„}\;\; 85 \;\;\text{„} \end{aligned}$$

Der sphärische Exceß berechnete sich mit $0'',138$; daher zeigt

$$l_1 + l_2 + l_3 = 179^0\,59'\,58'',56$$

gegenüber der theoretischen Summe $180^0\,0'\,0'',138$ einen Widers] $w = -1'',578$, so daß die Bedingungsgleichung

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1'',578 = 0$$

zu befriedigen sein wird.

Die Repetitionszahlen bilden zugleich die Gewichte der Beol tungen, und da in der einzigen Bedingungsgleichung alle Koeffizi(gleich sind, so lauten die Korrelatengleichungen:

$$\lambda_1 = \frac{k}{p_1}, \quad \lambda_2 = \frac{k}{p_2}, \quad \lambda_3 = \frac{k}{p_3}$$

und die Normalgleichung:

$$\left[\frac{1}{p}\right] k + w = 0,$$

so daß

$$k = -\frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]} = \frac{1'',578}{0{,}03595} = 43'',894.$$

Mithin ist

$$\lambda_1 = \frac{43'',894}{70} = 0'',627, \quad \lambda_2 = \frac{43'',894}{101} = 0'',435, \quad \lambda_3 = \frac{43'',894}{85} = 0'',516,$$

und die ausgeglichenen Winkel

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 + \lambda_1 = 81^\circ\, 21'\, 43'',987 \\ x_2 &= l_2 + \lambda_2 = 25 \quad 16 \quad 29\ ,285 \\ x_3 &= l_3 + \lambda_3 = 73 \quad 21 \quad 46\ ,866 \end{aligned}$$

ergeben die theoretische Summe $180^\circ\, 0'\, 0'',138$.

Durch direkte Ausrechnung findet man

$$[p\lambda\lambda] = 69{,}2648,$$

mittels der Kontrollgleichung

$$[p\lambda\lambda] = 43{,}894 \cdot 1{,}578 = 69{,}2647;$$

daraus bestimmt sich der mittlere Fehler der Gewichtseinheit:

$$\mu = \sqrt{69{,}2648} = 8'',32;$$

die unausgeglichenen Beobachtungen haben somit die mittleren Fehler:

$$\mu_1 = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}} = 1'',00, \quad \mu_2 = \frac{\mu}{\sqrt{p_2}} = 0'',83, \quad \mu_3 = \frac{\mu}{\sqrt{p_3}} = 0'',90.$$

Um den mittleren Fehler des ausgeglichenen

$$x_1 = l_1 + \lambda_1$$

zu finden, beachte man, daß $\lambda_1 = \frac{k}{p_1}$, weiter $k = -\frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]}$, und $w = l_1 + l_2 + l_3 - S$, wenn S die theoretische Winkelsumme bezeichnet; mithin ist

$$x_1 = \frac{S}{p_1\left[\frac{1}{p}\right]} + \left(1 - \frac{1}{p_1\left[\frac{1}{p}\right]}\right) l_1 - \frac{1}{p_1\left[\frac{1}{p}\right]} l_2 - \frac{1}{p_1\left[\frac{1}{p}\right]} l_3,$$

und nach (2), Nr. 143:

$$\mu_{x_1} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{p_1\left[\frac{1}{p}\right]}\right)^2 \mu_1^2 + \frac{1}{p_1^2\left[\frac{1}{p}\right]^2}\mu_2^2 + \frac{1}{p_1^2\left[\frac{1}{p}\right]^2}\mu_3^2}$$

$$= \mu \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right)\frac{1}{p_1}}{\left[\frac{1}{p}\right]}} = 0'',77;$$

$$\mu_{x_2} = \mu \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3}\right)\frac{1}{p_2}}{\left[\frac{1}{p}\right]}} = 0'',70, \quad \mu_{x_3} = \mu \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right)\frac{1}{p_3}}{\left[\frac{1}{p}\right]}} = 0'',73.$$

Wie in beiden Fällen zu bemerken, werden die mittleren Fehler der Winkel durch die Ausgleichung vermindert.

162. Beispiel LXVI. *Ausgleichung eines Vierecks.* In dem vierpunktigen Dreiecksnetz $ABCD$, Fig. 15, sind für die durch Bogen und Nummern bezeichneten Winkel folgende gleich genaue Werte erhalten worden:

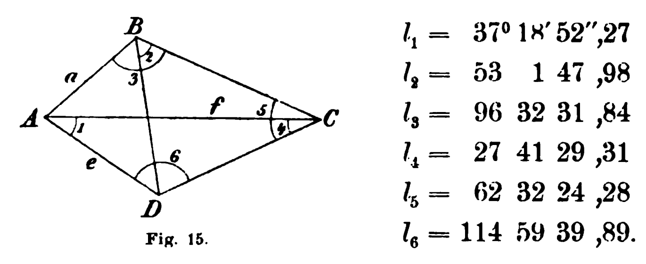


Fig. 15.

$$\begin{aligned}
l_1 &= 37^0\,18'\,52'',27 \\
l_2 &= 53 \;\; 1 \;\; 47 \;,98 \\
l_3 &= 96 \;\; 32 \;\; 31 \;,84 \\
l_4 &= 27 \;\; 41 \;\; 29 \;,31 \\
l_5 &= 62 \;\; 32 \;\; 24 \;,28 \\
l_6 &= 114 \;\; 59 \;\; 39 \;,89.
\end{aligned}$$

Da zur Festlegung von vier Punkten vier Winkel ausreichen, so sind zwei Messungen überschüssig; daher werden zwischen den Winkeln zwei unabhängige Bedingungsgleichungen sich aufstellen lassen.

Die eine ergibt sich aus dem Dreieck ACD, weil darin alle drei Winkel gemessen wurden, sie lautet:

$$\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_6 + w_1 = 0 \qquad (1)$$

mit

$$w_1 = l_1 + l_4 + l_6 - (180^0 + E)$$

und heißt eine *Winkelgleichung.*

Würde man nach Ausgleichung dieser drei Winkel das Dreieck ACD konstruieren, durch C einen Strahl unter dem Winkel l_5 gegen CD ziehen, in diesem Strahl den Punkt B so bestimmen, daß der Winkel CBD gleich l_2 wird, endlich durch B einen Strahl unter dem Winkel l_3 gegen BC führen, so würde dieser wegen der Fehlerhaftigkeit der Winkel l_5, l_2, l_3 nicht durch A gehen, das Viereck würde sich nicht schließen. Die Winkel müssen daher noch derart abgeändert werden, daß für eine Länge, die sich mittels der gemessenen Winkel auf zwei verschiedenen Wegen rechnen läßt, beidemal derselbe Wert erhalten werde.

Für f ergibt sich aus dem Dreieck ACD der Ausdruck:

$$f = e\,\frac{\sin(l_6 + \lambda_6)}{\sin(l_4 + \lambda_4)};$$

aus dem Dreieck ABC findet man zunächst:

$$f = a\,\frac{\sin(l_3 + \lambda_3)}{\sin(l_5 + \lambda_5 - l_4 - \lambda_4)},$$

id für a aus dem Dreieck ABD:

$$a = e\,\frac{\sin(l_2 + \lambda_2 + l_5 + \lambda_5 + l_6 + \lambda_6 - 180^0)}{\sin(l_3 + \lambda_3 - l_2 - \lambda_2)};$$

her ist auf dem andern Wege

$$f = e\,\frac{\sin(l_3 + \lambda_3)\sin(l_2 + \lambda_2 + l_5 + \lambda_5 + l_6 + \lambda_6 - 180^0)}{\sin(l_5 + \lambda_5 - l_4 - \lambda_4)\sin(l_3 + \lambda_3 - l_2 - \lambda_2)}.$$

rch Gleichsetzung beider Resultate ergibt sich die zweite Be-gungsgleichung, eine sogenannte *Seitengleichung*:

$$\frac{\sin(l_5 + \lambda_5 - l_4 - \lambda_4)\sin(l_6 + \lambda_6)\sin(l_3 + \lambda_3 - l_2 - \lambda_2)}{\sin(l_3 + \lambda_3)\sin(l_4 + \lambda_4)\sin(l_2 + \lambda_2 + l_5 + \lambda_5 + l_6 + \lambda_6 - 180^0)} = 1. \qquad (2)$$

Die Gleichung (1) besitzt bereits die lineare Form

$$[a\lambda] + w_1 = 0,$$

d zwar ist (der Exceß des Dreiecks $= 3'',74$)

$$a_1 = a_4 = a_6 = 1, \quad a_2 = a_3 = a_5 = 0,$$
$$w_1 = 180^0\,0'\,1'',47 - 180^0\,0'\,3'',74 = -\,2'',27.$$

Bei (2) muß diese Form erst hergestellt werden durch Entwick-ng nach den λ. Logarithmiert man zu diesem Zwecke und setzt:

$$w_2 = \log\sin(l_5 - l_4) + \log\sin l_6 + \log\sin(l_3 - l_2)$$
$$- \log\sin l_3 - \log\sin l_4 - \log\sin(l_2 + l_5 + l_6 - 180^0),$$

sind die Koeffizienten der zweiten Bedingungsgleichung

$$[b\lambda] + w_2 = 0$$

Ableitungen von w_2 nach den l, also z. B.

$$b_1 = \frac{\partial w_2}{\partial l_1} = 0$$

$$b_2 = \frac{\partial w_2}{\partial l_2} = -\,M\left(\operatorname{cotg}(l_3 - l_2) + \operatorname{cotg}(l_2 + l_4 + l_6 - 180^0)\right)$$

s. w.; M bedeutet den Modul des gemeinen Logarithmensystems. ese umständliche Berechnung der Koeffizienten kann mit Hilfe der fferenzen in der logarithmisch-trigonometrischen Tafel umgangen rden; ist nämlich l ein endlicher und λ ein sehr kleiner, in Sekun-n ausgedrückter Winkel, so kann mit zureichender Schärfe

$$\log\sin(l + \lambda) = \log\sin l + \Delta \cdot \lambda$$

setzt werden, wenn Δ die Differenz zu $\log\sin l$ pro $1''$ bedeutet. nnach hat man zur Berechnung von w_2 selbst *und* der Koeffizienten genden Ansatz:

$$\begin{array}{lll}
\log\sin(l_3-l_4+\lambda_5-\lambda_4) & = 9{,}756\,9478.1 & -30{,}2\,\lambda_4+30{,}2\,\lambda_5 \\
\log\sin(l_6+\lambda_6) & = 9{,}957\,2954.1 & -9, \\
\log\sin(l_3+l_2+\lambda_3+\lambda_2) & = 9{,}837\,9094.7 & -22{,}2\,\lambda_2+22{,}2\,\lambda_3 \\
 & \overline{29{,}552\,1526.9} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\log\sin(l_3+\lambda_3) & = 9{,}997\,1627.6 & -2{,}4\,\lambda_3 \\
\log\sin(l_4+\lambda_4) & = 9{,}667\,1823.3 & +40{,}2\,\lambda_4 \\
\log\sin\begin{pmatrix} l_2+l_5+l_6-180^0 \\ +\lambda_2+\lambda_5+\lambda_6 \end{pmatrix} & = 9{,}887\,8085.2 & +17{,}3\,\lambda_2+17{,}3\,\lambda_5+17, \\
 & \overline{29{,}552\,1536.1} &
\end{array}$$

Durch Subtraktion der unteren Gruppe von der oberen ergibt sich die Bedingungsgleichung:

$$-39{,}5\,\lambda_2+24{,}6\,\lambda_3-70{,}4\,\lambda_4+12{,}9\,\lambda_5-27{,}2\,\lambda_6-9{,}2=0.$$

Dividiert man hier, um auf kleinere Zahlen zu kommen, durch 10, so kann man die *Bedingungsgleichungen* endgiltig schreiben:

$$\begin{array}{l}
\lambda_1 \qquad\qquad\qquad +\lambda_4 \qquad\qquad +\lambda_6-2{,}27=0 \\
-3{,}95\,\lambda_2+2{,}46\,\lambda_3-7{,}04\,\lambda_4+1{,}29\,\lambda_5-2{,}72\,\lambda_6-0{,}92=0.
\end{array}$$

Dies führt zu den *Korrelatengleichungen*:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= k_1 \\
\lambda_2 &= \quad -3{,}95\,k_2 \\
\lambda_3 &= \quad\ \ 2{,}46\,k_2 \\
\lambda_4 &= k_1-7{,}04\,k_2 \\
\lambda_5 &= \quad\ \ 1{,}29\,k_2 \\
\lambda_6 &= k_1-2{,}72\,k_2;
\end{aligned}$$

daraus ergeben sich die *Normalgleichungen*:

$$\begin{aligned}
3{,}00\,k_1-9{,}76\,k_2-2{,}27&=0 \\
-9{,}76\,k_1+80{,}28\,k_2-0{,}92&=0;
\end{aligned}$$

ihre Auflösung liefert:

$$\begin{aligned}
k_1&=1{,}3139 \\
k_2&=0{,}1712;
\end{aligned}$$

hiermit berechnen sich aus den Korrelatengleichungen:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= +1'',314 \\
\lambda_2 &= -0\ ,677 \\
\lambda_3 &= +0\ ,420 \\
\lambda_4 &= +0\ ,108 \\
\lambda_5 &= +0\ ,220 \\
\lambda_6 &= +0\ ,848.
\end{aligned}$$

Die ***ausgeglichenen Winkel*** des Netzes sind sonach:

$$x_1 = l_1 + \lambda_1 = 37^0\,18'\,53'',584$$
$$x_2 = l_2 + \lambda_2 = 53 \quad 1 \;\, 47 \;,303$$
$$x_3 = l_3 + \lambda_3 = 96 \;\, 32 \;\, 32 \;,260$$
$$x_4 = l_4 + \lambda_4 = 27 \;\, 41 \;\, 29 \;,418$$
$$x_5 = l_5 + \lambda_5 = 62 \;\, 32 \;\, 24 \;,500$$
$$x_6 = l_6 + \lambda_6 = 114 \;\, 59 \;\, 40 \;,738;$$

sie führen zu einer widerspruchsfreien Berechnung desselben.

Auf direktem Wege findet man

$$[\lambda\lambda] = 3{,}1405,$$

während sich indirekt, durch Benützung der Korrelaten und der Widersprüche in genügender Übereinstimmung

$$[\lambda\lambda] = 1{,}3139 \cdot 2{,}27 + 0{,}1712 \cdot 0{,}92 = 3{,}1400$$

ergibt; hiernach ist der mittlere Fehler einer Winkelmessung:

$$\mu = \sqrt{\frac{3{,}14}{2}} = 1'',25.$$

Dritter Teil.

Mathematische Statistik.

I. Abschnitt. Die menschlichen Massenerscheinungen vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§ 1. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Statistik.

163. Analogie zwischen statistischen und zufälligen Er eignissen. Gewisse Erscheinungen im Dasein menschlicher Ind viduen, die für den Umfang und die innere Struktur einer Gemein schaft von Bedeutung sind, wie der Eintritt ins Dasein mit eine bestimmten Geschlecht, der Abschluß des Daseins, mannigfache Zustands änderungen im Laufe desselben, weisen Analogien auf mit zufällige Ereignissen: regellos und daher ohne wissenschaftliches Interesse i einzelnen, zeigen sie in großen Vereinigungen eine gewisse Beständig keit in der relativen Häufigkeit ihres Auftretens und geben dadurc Anlaß zu *menschlichen Massenerscheinungen.* Bei der wissenschaf lichen Betrachtung dieser Erscheinungen tritt das Einzelwesen ledig lich als Träger eines bestimmten ins Auge gefaßten Zustandes od einer Zustandsänderung auf und bildet als solcher ein Element d der Beobachtung unterworfenen genau begrenzten Masse. Das R sultat der Untersuchung kommt in *quantitativen* Bestimmungen zu Ausdruck.

Stellt man sich auf den Standpunkt, die oben berührte Analo sei eine *vollständige*, so ist die nächste Konsequenz hiervon die, gewissen Relativzahlen empirische Bestimmungen von Wahrscheinli keiten (oder von Funktionen solcher) zu erblicken, die dem äuße Verlaufe der betreffenden Erscheinung zugrunde liegen.

Damit eine solche Auffassung zulässig sei, müssen jedoch zunäc gewisse formale Bedingungen vorhanden sein. Damit ein Quoti logischerweise die numerische Bestimmung einer Wahrscheinlich bedeuten könne, muß der Nenner eine Gesamtheit von Fällen deuten, deren jeder einen bestimmten Verlauf hätte nehmen *kön*

während der Zähler diejenigen *unter ihnen* zählt, welche diesen Verlauf tatsächlich genommen haben.

Diese Bedingung erfüllt beispielsweise ein Bruch, dessen Nenner eine Geburtenmenge ausdrückt, während der Zähler angibt, wie viele der Geburten männlich waren; *formell* darf also ein solcher Bruch als die numerische Bestimmung seiner Wahrscheinlichkeit, der *Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt*, angesehen werden. Die Ergänzung auf die Einheit bedeutet dann einen empirischen Wert der Wahrscheinlichkeit einer Mädchengeburt.

Das Gleiche gilt von einem Bruch, dessen Nenner eine Gesamtheit von Personen eines bestimmten Alters, etwa von x Jahren, dessen Zähler die aus ihr im Laufe eines Jahres hervorgegangenen Todesfälle zählt; er kann als Wert einer Wahrscheinlichkeit, der *Sterbenswahrscheinlichkeit* der x-jährigen aufgefaßt werden; sein Komplement zur Einheit bestimmt dann die *Lebenswahrscheinlichkeit* der x-jährigen, nämlich die Wahrscheinlichkeit, auch das Alter von $x + 1$ Jahren lebend zu erreichen.

Nicht so steht es mit dem Quotienten, dessen Nenner die Größe einer geschlossenen (von Ein- und Auswanderung freien) Bevölkerung am Beginne eines Kalenderjahres angibt und dessen Zähler die im Laufe des Jahres in ihr beobachteten Sterbefälle zählt; denn diese Sterbefälle sind nicht bloß aus den Lebenden am Beginne des Jahres, sondern zum Teil auch aus den während des Jahres Geborenen hervorgegangen; man müßte also diese zu der anfänglichen Bevölkerung hinzufügen, um der formalen Bedingung gerecht zu werden.

Dem Quotienten aus der Zahl der Geburten eines Kalenderjahres durch die Bevölkerung am Beginne desselben geht das formale Merkmal einer Wahrscheinlichkeit völlig ab.

Wenn man an der Vorstellung festhält, daß einem statistischen Quotienten, der die formale Bedingung einer Wahrscheinlichkeit erfüllt, auch tatsächlich eine Wahrscheinlichkeit zugrunde liegt, welche die betreffende Massenerscheinung beherrscht, gleichgiltig ob dies eine elementare Wahrscheinlichkeit oder — im Sinne Poissons — eine Durchschnittswahrscheinlichkeit im eigentlichen Sinne ist (s. Nr. 87); so gibt die Wahrscheinlichkeitstheorie die Mittel an die Hand, eine Reihe wichtiger Fragen zu beantworten, die sich auf die Zuverlässigkeit solcher Quotienten und der auf ihnen aufgebauten Schlüsse beziehen. Untersuchungen dieser Art sind zuerst von Laplace[1]) ausgeführt worden.

164. Wahrscheinlichkeit vorgegebener Grenzen einer statistischen Wahrscheinlichkeit. In einer Masse von s Individuen sei ein bestimmtes Ereignis E in m Fällen beobachtet worden,

1) Théorie analyt., Art. 28--31.

während in den übrigen $n = s - m$ Fällen das entgegengesetzt eignis eingetreten ist.

Es ist dann mit der Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt$$

zu erwarten, daß die unbekannte Wahrscheinlichkeit p von E zw den Grenzen

$$\frac{m}{s} - \gamma \sqrt{\frac{2mn}{s^3}} \quad \text{und} \quad \frac{m}{s} + \gamma \sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$$

liege (s. Nr. 96).

Die Grenzen fallen, vom Größenverhältnis $m : n$ abgesehen, enger aus, $\frac{m}{s}$ ist also als eine um so zuverlässigere Bestimmun p zu erachten, je größer s ist. Darin liegt der mathematische des längst geübten Prinzipes, statistische Schlußfolgerungen auf lichst breite Grundlage zu stellen.

Man kann $\frac{m}{s}$ als eine direkte Beobachtung l von p an der die Präzision

$$h = \sqrt{\frac{s^3}{2mn}}$$

zukommt; aus h läßt sich nach den Formeln in Nr. 132 der m und der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung von p erm

Beispiel. Von 54391 männlichen Personen, welche durc Alter von 50 Jahren gingen, sind 1049 vor Erreichung des von 51 Jahren gestorben[1]). Aus diesen Daten ergibt sich fi Sterbenswahrscheinlichkeit der 50-jährigen männlichen Persone empirische Bestimmung

$$\frac{m}{s} = \frac{1049}{54391} = 0{,}01929$$

mit dem wahrscheinlichen Fehler

$$r = \frac{0{,}47694}{h} = 0{,}47694 \sqrt{\frac{2 \cdot 1049 \cdot 53342}{54391^3}} = 0{,}000397,$$

so daß Eins gegen Eins darauf zu wetten wäre, daß genannte scheinlichkeit zwischen die Grenzen 0,01889 und 0,01969 falle.

165. Wahrscheinlichkeit, daß zwei empirischen Be mungen ungleiche statistische Wahrscheinlichkeiten zugı liegen. Zwei Massen von Individuen seien auf dasselbe Ereig hin beobachtet worden; die Ergebnisse dieser Beobachtungen

1) Deutsche Sterblichkeitstafeln etc. 1883, p. 104.

durch die Zahlen s, m, n in dem einen und durch s', m', n' in dem andern Falle dargestellt. Daraus sind die empirischen Werte

$$l = \frac{m}{s}, \quad l' = \frac{m'}{s'}$$

der Wahrscheinlichkeiten p, p' abgeleitet worden; dieselben mögen die positive Differenz $l' - l = \delta$ ergeben. Wie groß ist auf Grund dieser Wahrnehmung die Wahrscheinlichkeit, daß $p' > p$ sei?

Setzt man $p' - p = t$ und bezeichnet die Fehler von l, l' mit ε, ε', so ist auch

$$l' + \varepsilon' - (l + \varepsilon) = t,$$

woraus

$$t - \delta = \varepsilon' - \varepsilon.$$

Es stellt sich also $t - \delta = z$ als lineare Funktion der unabhängigen Fehler ε, ε' dar; infolgedessen unterliegt z dem Gesetz (Nr. 126)

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 z^2},$$

wenn

$$\frac{1}{H^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h'^2}$$

und h, h' die Präzisionen der Bestimmungen l, l' sind; nach der vorigen Nummer ist

$$h = \sqrt{\frac{s^3}{2mn}}, \quad h' = \sqrt{\frac{s'^3}{2m'n'}},$$

daher

$$H = \sqrt{\frac{s^3 s'^3}{2(s'^3 mn + s^3 m'n')}}.$$

Die gestellte Aufgabe kommt nun darauf zurück, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß t positiv, z also zwischen den Grenzen $-\delta$ und ∞ enthalten sei. Diese ist aber

$$P = \frac{H}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta}^{\infty} e^{-H^2 z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-H\delta}^{\infty} e^{-x^2} dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-H\delta} e^{-x^2} dx$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{H\delta}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{H\delta} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}[1 + \Phi(\gamma)], \quad (1)$$

wenn man $\Phi(\gamma)$ in der Nr. 72 erklärten Bedeutung gebraucht und

$$\gamma = H\delta = \delta \sqrt{\frac{s^3 s'^3}{2(s'^3 mn + s^3 m'n')}} \quad (2)$$

setzt.

Dieses Resultat kann in zweifacher Weise verwendet werden. Die eine besteht darin, daß man aus gegebenem δ die Wahrscheinlichkeit P

rechnet; die andere geht auf die Bestimmung der größten Abweichung δ aus, die zwei empirische Werte noch aufweisen dürfen, ohne daß man sich genötigt sähe, verschiedene Grundwahrscheinlichkeiten anzunehmen; diese Bestimmung läßt sich jedoch ohne eine willkürliche Festsetzung nicht durchführen; man wählt beispielsweise $\gamma = 2$ oder $\gamma = 3$ und betrachtet das hieraus nach (2) berechnete δ noch für praktisch verträglich mit $p' = p$.

Beispiele. In Paris wurden in dem 40-jährigen Zeitraume 1745 bis 1784 beobachtet:

$$\begin{array}{rl} m = 393\,386 & \text{Knabengeburten,} \\ n = 377\,555 & \text{Mädchengeburten,} \\ \hline s = 770\,941 & \text{Geburten überhaupt;} \end{array}$$

in London in dem 95-jährigen Zeitraume 1664—1758:

$$\begin{array}{rl} m' = 737\,629 & \text{Knabengeburten,} \\ n' = 698\,958 & \text{Mädchengeburten,} \\ \hline s' = 1\,436\,587 & \text{Geburten überhaupt.} \end{array}$$

Daraus berechnet sich

$$\frac{m}{s} = 0{,}51026 \text{ oder nahe } \frac{25}{24}, \quad \frac{m'}{s'} = 0{,}51353 \text{ oder nahe } \frac{19}{18},$$

also $\frac{m'}{s'} - \frac{m}{s} = \delta = 0{,}00327$. Wie groß ist auf Grund dieser Beobachtung die Wahrscheinlichkeit, daß in London die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt größer sei als in Paris?

Aus der Formel (2) berechnet sich

$$\gamma = 3{,}353$$

und hieraus mittels (1) nach Tafel I

$$P = 0{,}9999989,$$

so daß die Wahrscheinlichkeit, es sei dem nicht so, nur wenig über ein Milliontel ausmacht[1]).

In Österreich[2]) entfielen in dem 17-jährigen Zeitraume 1878 bis 1894 von $s = 12\,695\,948$ ehelichen Lebendgeburten

$$m = 6\,533\,961 \text{ auf Knaben}, \quad n = 6\,161\,987 \text{ auf Mädchen;}$$

von $s' = 332\,306$ ehelichen Totgeburten

$$m' = 191\,159 \text{ auf Knaben}, \quad n' = 141\,147 \text{ auf Mädchen.}$$

Daraus berechnet sich

1) Vgl. Laplace, Théorie analyt., Art. 29.
2) Die im Reichsrate vertretenen Länder.

$$\frac{m}{s} = 0{,}51465, \quad \frac{m'}{s'} = 0{,}57525,$$
$$\delta = 0{,}06060;$$

weiter $\gamma = 49{,}3$; das zugehörige $\Phi(\gamma)$ ist von der Einheit praktisch nicht zu unterscheiden; infolgedessen unterscheidet sich auch P so wenig von 1, daß man fast mit Gewißheit aussagen kann, der Knabengeburt liege bei Totgeborenen eine größere Wahrscheinlichkeit zugrunde als bei Lebendgeborenen. Die Ergebnisse der vorausgehenden zwölfjährigen Periode 1866—1877 bestätigen dies: hier war

$$\frac{m}{s} = 0{,}51548, \quad \frac{m'}{s'} = 0{,}57520,$$
$$\delta = 0{,}05972.$$

166. Wahrscheinlichkeit, daß ein künftiger statistischer Vorgang innerhalb gegebener Grenzen sich abspielen werde. Von s beobachteten Einzelfällen haben m Fälle den Verlauf E, $n = s - m$ den entgegengesetzten Verlauf genommen. In einer zweiten Beobachtungsreihe sei bloß die Zahl m' der Wiederholungen von E erhoben worden. Es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß die zugehörige Zahl n' innerhalb bestimmter Grenzen liege.

Die wahrscheinlichste Bestimmung von n' ist

$$n_0' = \frac{n m'}{m}. \tag{1}$$

Bezeichnet man die dem Eintreffen von E entsprechende Wahrscheinlichkeit mit p, so ist

$$p = \frac{m}{s} + \varepsilon = \frac{m'}{s'} + \varepsilon' \tag{2}$$

zu setzen, wenn ε den der ersten, ε' den der zweiten empirischen Bestimmung von p entsprechenden Fehler bedeutet. Hieraus ergibt sich, wenn für s' die Summe $m' + n'$ eingeführt wird:

$$n' = \frac{\frac{n m'}{s} + m'\varepsilon' - m'\varepsilon}{\frac{m}{s} + \varepsilon - \varepsilon'}$$

$$= \frac{\frac{n m'}{m} + \frac{m' s}{m}\varepsilon' - \frac{m' s}{m}\varepsilon}{1 + \frac{s}{m}\varepsilon - \frac{s}{m}\varepsilon'}$$

und weiter durch Entwicklung nach $\varepsilon, \varepsilon'$, wenn man bei den Gliedern ersten Grades stehen bleibt:

$$n' = n_0' - \frac{s^2 m'}{m^2}\varepsilon + \frac{s^2 m'}{m^2}\varepsilon',$$

raus

$$n' - n_0' = z = -\frac{s^2 m'}{m^2}\varepsilon + \frac{s^2 m'}{m^2}\varepsilon'.$$

s stellt sich also der Fehler z in der Bestimmung n_0' als lineare unktion von ε, ε' dar; sein Gesetz ist daher nach Nr. 126

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 z^2},$$

wenn

$$\frac{1}{H^2} = \frac{\frac{s^4 m'^2}{m^4}}{h^2} + \frac{\frac{s^4 m'^2}{m^4}}{h'^2}$$

ist; dabei bedeutet h die Präzision der ersten; h' die Präzision der [illegible] zweiten Beobachtungsreihe, ist also

$$h = \sqrt{\frac{s^3}{2mn}}, \quad h' = \sqrt{\frac{s'^3}{2m'n'}} = \sqrt{\frac{s^3 m'}{2m^2 n}},$$

wenn man bei der Berechnung von h' statt n', s' deren wahrschein- [illegible] lichste Bestimmungen $\frac{nm'}{m}$, $\frac{sm'}{m}$ verwendet. Hiernach ist

$$H = \sqrt{\frac{m^3}{2snm'(m+m')}}. \qquad (3 [illegible]$$

Es besteht also die Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2H}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^{z} e^{-H^2 z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Hz} e^{-t^2} dt = \Phi(\gamma) \qquad (4 [illegible])$$

dafür, daß die Differenz $n' - n_0'$ zwischen die Grenzen $-\frac{\gamma}{H}$ und $+ [illegible] \frac{\gamma}{H}$ oder daß n' zwischen die Grenzen

$$\frac{nm'}{m} - \gamma\sqrt{\frac{2snm'(m+m')}{m^3}} \quad \text{und} \quad \frac{nm'}{m} + \gamma\sqrt{\frac{2snm'(m+m')}{m^3}} \qquad ([illegible])$$

falle.

Man kann von diesen Formeln in verschiedener Weise Gebrau[illegible]h machen: Einmal, um zu einer gegebenen Wahrscheinlichkeit P d[illegible]ie zugehörigen Grenzen der Bestimmung (1), dann aber auch, um [illegible]ie äußersten Grenzen dieser Bestimmung in dem Sinne einer sehr hoh[illegible]en Wahrscheinlichkeit des Zutreffens (etwa mit $\gamma = 3$) zu rechnen.

Wäre s' die Größe, um welche gefragt wird, so hätte man da[illegible]ü die wahrscheinlichste Bestimmung

$$s_0' = \frac{sm'}{m}, \qquad ([illegible]$$

während sich aus dem Ansatz (2) ergibt:

$$s' = \frac{m'}{\frac{m}{s} + \varepsilon - \varepsilon'} = \frac{\frac{sm'}{m}}{1 + \frac{s}{m}\varepsilon - \frac{s}{m}\varepsilon'};$$

durch Entwicklung nach ε, ε' mit der gleichen Beschränkung wie vorhin wird

$$s' = s_0' - \frac{s^2 m'}{m^2} \varepsilon + \frac{s^2 m'}{m^2} \varepsilon',$$

so daß genau wie im vorigen Falle

$$s' - s_0' = z = - \frac{s^2 m'}{m^2} + \frac{s^2 m'}{m^2} \varepsilon';$$

es gelten also auch hier die Resultate (3) bis (5)[1]).

Beispiel. In dem Zeitraume 1866—1877 sind in Österreich registriert worden:

$m = 4\,311\,076$ männliche,
$n = 4\,052\,193$ weibliche,
$s = 8\,363\,269$ Lebendgeburten überhaupt;

wären in dem darauffolgenden Zeitraume 1877—1894 nur die

$m' = 6\,533\,961$ *männlichen* Lebendgeburten

verzeichnet worden, welcher Schluß wäre daraus auf die Zahl n' der weiblichen Lebendgeburten zu ziehen?

Ihr wahrscheinlichster Wert wäre

$$n_0' = \frac{nm'}{m} = 6\,141\,587,$$

die äußerste, mit $\gamma = 3$ gerechnete Abweichung, der die Wahrscheinlichkeit

$$P = \Phi(3) = 0{,}9999779 = 1 - \frac{1}{45250}$$

zukommt, beträgt

$$3 \sqrt{\frac{2snm'(m+m')}{m^3}} = 23\,226;$$

es ist also mit der eben angegebenen, sehr großen Wahrscheinlichkeit zu erwarten, daß n' über das Intervall

6 118 361 bis 6 164 813

nicht hinausfallen werde; tatsächlich ist der beobachtete Wert von n', nämlich:

6 161 987,

in diesem Intervall enthalten.

1) Vgl. Laplace, Théor. anal., Art. 30 und 31. In dem letzteren Artikel gibt Laplace ein Beispiel der früher so vielfach geübten *Konjekturalberechnungen.* Er sucht aus dem konstant vorausgesetzten Verhältnis der jährlichen Geburten zur Bevölkerung — der Geburtsziffer — und aus den Geburten die Bevölkerungszahl Frankreichs und ihre äußersten Grenzen zu bestimmen.

§ 2. Stabilität statistischer Verhältniszahlen und Mittelwerte.

167. Präzision einer statistischen Relativzahl. Es sei beobachtet worden, daß von $s = m + n$ Einzelfällen m den Verlauf E, n den Verlauf F genommen haben. Um die betreffende Massenerscheinung quantitativ zu beschreiben, bildet man aus den absoluten Beobachtungszahlen m, n, s irgend eine Relativzahl und läßt sich dabei häufig von dem Gesichtspunkte leiten, daß dieselbe eine leicht faßbare Bedeutung habe.

Setzt man voraus, daß der Erscheinung ein konstanter Bedingungskomplex zugrunde liege, so sind die Verhältniszahlen $\frac{m}{s}$, $\frac{n}{s}$ empirische Bestimmungen der komplementären Wahrscheinlichkeiten p, $1 - p$ vo[illegible] E, F, und die gemeinsame Präzision dieser Bestimmungen ist:

$$h = \sqrt{\frac{s^3}{2mn}}. \qquad ([illegible])$$

Jede andere aus m, n, s abgeleitete Verhältniszahl v hat da[illegible] die Bedeutung einer empirischen Bestimmung einer gewissen Funktion von p, so zwar, daß

$$V = f(p), \qquad v = f\left(\frac{m}{s}\right) \qquad ([illegible]$$

ist; es handelt sich nun um die Präzision dieser Bestimmung.

Diese Aufgabe fällt unter das in Nr. 143 behandelte Problem d[illegible] Genauigkeitsbestimmung einer Funktion direkt beobachteter Größ[illegible] bezeichnet man mit μ den mittleren Fehler von $\frac{m}{s}$, mit μ_v d[illegible] mittleren Fehler von v, so ist

$$\mu_v^2 = f'\left(\frac{m}{s}\right)^2 \mu^2;$$

geht man vom mittleren Fehler zur Präzision über (Nr. 130), ergibt sich

$$\frac{1}{2h_v^2} = f'\left(\frac{m}{s}\right)^2 \cdot \frac{1}{2h^2},$$

und daraus folgt mit Rücksicht auf (1):

$$h_v = \frac{1}{\left|f'\left(\frac{m}{s}\right)\right|} \sqrt{\frac{s^3}{2mn}},$$

womit die Aufgabe allgemein gelöst ist.

Der Quotient $\frac{s}{m}$, welcher ausdrückt, auf wie viele Einzelf[illegible] ein einmaliges Eintreffen von E entfällt, ist eine Bestimm[illegible]

von $\frac{1}{p}$; aus $f(p) = \frac{1}{p}$ folgt $f'(p) = -\frac{1}{p^2}$; folglich ist die Präzision dieses Quotienten nach (3):

$$h = \frac{m^2}{s^2} \sqrt{\frac{s^3}{2mn}} = \sqrt{\frac{m^3}{2sn}}. \tag{4}$$

Die Zahl $a\frac{m}{n}$, welche ausdrückt, wie viel Ereignisse E auf a Ereignisse F entfallen, ist eine empirische Bestimmung von $f(p) = a\frac{p}{1-p}$; da $f'(p) = \frac{a}{(1-p)^2}$, so ist ihre Präzision

$$h = \frac{n^2}{as^2} \sqrt{\frac{s^3}{2mn}} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{n^3}{2sm}}. \tag{5}$$

Beispiel. Im Jahre 1897 sind in Österreich beobachtet worden:

$m = 415\,721$ männliche,
$n = 393\,503$ weibliche,
$s = 809\,224$ eheliche Lebendgeburten überhaupt.

Daraus berechnet sich:

1) $\frac{m}{s} = 0{,}51373$ als eine Bestimmung der Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt;

2) $\frac{s}{m} = 1{,}94654$ als Anzahl der Geburten, auf welche eine Knabengeburt fällt;

3) $\frac{1000\,m}{n} = 1056{,}46$ als Anzahl der Knaben, die auf 1000 Mädchen entfallen.

Die Präzisionen h_1, h_2, h_3 dieser drei empirischen Bestimmungen sind:

$$h_1 = \sqrt{\frac{s^3}{2mn}} = 1272{,}7$$

$$h_2 = \sqrt{\frac{m^3}{2sn}} = 335{,}9$$

$$h_3 = 0{,}001 \sqrt{\frac{n^3}{2sm}} = 0{,}30093.$$

168. Typische Wahrscheinlichkeitsgrößen normaler Dispersion. Die im vorangehenden durchgeführte wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung statistischer Relativzahlen setzt voraus, daß der untersuchten Massenerscheinung ein derartiger Komplex von Bedingungen zugrunde liege, daß jene Relativzahlen als empirische Werte einer *festen* Wahrscheinlichkeit oder einer Funktion dieser Wahrscheinlichkeit angesehen werden können.

Wie ein Urteil darüber zu erlangen ist, ob und wie weit diese Voraussetzung erfüllt sei, hat W. Lexis[1]) durch ein methodisches Verfahren gezeigt. Die Grundlage dieses Verfahrens bilden *Reihen von Relativzahlen*, die sich auf die betreffende Massenerscheinung beziehen und deren Glieder aus zeitlich oder räumlich getrennten Beobachtungsgebieten stammen. Das Studium der *Schwankungen* in einer solchen Reihe, der Verteilung oder *Dispersion* ihrer Glieder um einen Mittelwert ist es, was zur Schöpfung eines begründeten Urteils in der angegebenen Richtung führt.

Wir beginnen mit der Darlegung des einfachsten Falles, der zugleich die Norm für alle weiteren Untersuchungen bildet.

Über eine Massenerscheinung E seien z Beobachtungsreihen *gleichen Umfanges*, je s Einzelfälle umfassend, ausgeführt worden; die beobachteten Wiederholungszahlen von E seien $m_1, m_2, \cdots m_z$. Liegt E eine feste Wahrscheinlichkeit p zugrunde, so sind die Quotienten

$$\frac{m_1}{s}, \quad \frac{m_2}{s}, \quad \ldots \quad \frac{m_z}{s} \qquad (1$$

als gleich genaue empirische Bestimmungen oder gleich genaue, von systematischen Fehlern freie direkte Beobachtungen der Unbekannten aufzufassen, und ihre Anordnung um das arithmetische Mittel als dem wahrscheinlichsten Wert, der sich aus ihnen für p ableiten läßt:

$$p_0 = \frac{\frac{m_1}{s} + \frac{m_2}{s} + \cdots + \frac{m_z}{s}}{z} = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_z}{zs} \qquad (2$$

wird dann jene Erscheinungen darbieten, welche wir bei den Ergebnissen von Versuchsreihen mit zufälligen Ereignissen konstanter Wahrscheinlichkeit wie auch bei den Ergebnissen direkter Beobachtungen der bezeichneten Qualität kennen gelernt haben (s. Nr. 80, 13[illegible]

Die mittlere Abweichung der Zahlen (1) von dem wahren Werte beziehungsweise ihre Präzision, ist nach Nr. 74, 79:

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{p(1-p)}{s}}, \quad h_1 = \sqrt{\frac{s}{2p(1-p)}}, \qquad (3$$

und die Abweichungen

$$-\frac{m_i}{s} + p = \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots$$

befolgen das Gesetz

$$\frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 \varepsilon^2}.$$

---

1) Das Geschlechtsverhältnis der Geborenen und die Wahrscheinlichke[illegible]rechnung. Jahrb. für Nat.-Ök. u. Statist. 27 (1876), p. 209—245. — Zur The[illegible] der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft. Freiburg i. [illegible] 1877. — Über die Theorie der Stabilität statistischer Reihen. Jahrb. für N[illegible] Ök. u. Statist. 32 (1879), p. 60—98.

Dagegen unterliegen die Abweichungen

$$-\frac{m_i}{s}+p_0=\lambda_i \qquad (i=1,2,\ldots z)$$

em Gesetze

$$\frac{h_2}{\sqrt{\pi}}e^{-h_2^2\lambda^2},$$

orin (s. Nr. 136)

$$h_2=\sqrt{\frac{z}{z-1}}\,h_1=\sqrt{\frac{z}{z-1}}\sqrt{\frac{s}{2p(1-p)}} \tag{4}$$

t.

Weder h_1 noch h_2 läßt mangels der Kenntnis von p eine strenge uswertung zu. Maßgebend wäre der Wert h_2, weil ja nicht die ε, ndern nur die λ zugänglich sind; indessen besteht zwischen h_2 und bei einigermaßen erheblichem z nur ein geringer Unterschied[1]). an erhält eine zureichend genaue Bestimmung von h_2, wenn man p urch p_0 ersetzt und von dem Faktor $\sqrt{\frac{z}{z-1}}$ absieht; sie heiße h', o daß

$$h'=\sqrt{\frac{s}{2p_0(1-p_0)}}; \tag{5}$$

benso wird

$$\mu'=\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{s}} \tag{6}$$

ne zureichende Bestimmung von μ_1 abgeben.

Diese Berechnung von h', μ' ist unabhängig von den Einzelwerten r Reihe (1).

Es gibt aber noch eine zweite Berechnung dieser Größen, die h auf die Abweichungen λ der Werte (1) von ihrem Mittelwerte p_0 tzt; nach dieser ergeben sich für μ_1, h_1 die Werte:

$$\mu''=\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{z-1}},\quad \text{daraus}\quad h''=\sqrt{\frac{z-1}{2[\lambda\lambda]}}. \tag{7}$$

Statt der mittleren Abweichung könnte die durchschnittliche verndet werden, und es ergäben sich für diese, entsprechend μ' und μ'', beiden Bestimmungen (s. Nr. 132, 136):

$$\vartheta'=\sqrt{\frac{2p_0(1-p_0)}{\pi s}},\quad \vartheta''=\frac{[|\lambda|]}{\sqrt{z(z-1)}}. \tag{8}$$

Man unterscheidet die beiden Methoden, von welchen die eine zu n Werten h', μ', ϑ', die andere zu den Werten h'', μ'', ϑ'' geführt t, als die *kombinatorische* oder indirekte, beziehungsweise als die

---

1) Es ist

$z=$	10	50	100
$\sqrt{\frac{z}{z-1}}=$	1,054	1,011	1,005.

physikalische oder direkte[1]). Die erste ruht auf dem Boden des Bernoullischen Theorems und hängt dadurch mit den Voraussetzungen zusammen, die über die Natur der Erscheinung E gemacht worden sind; die zweite stützt sich auf die Fehlertheorie.

Treffen die eben erwähnten Voraussetzungen zu, so wird, bis auf die durch die Natur der Sache begründete Unvollkommenheit, nicht nur Übereinstimmung herrschen zwischen den Werten

$$h', \quad \mu', \quad \vartheta'$$

einerseits und

$$h'', \quad \mu'', \quad \vartheta''$$

andererseits, sondern es werden sich die λ im großen auch dem Gesetze

$$\frac{h''}{\sqrt{\pi}} e^{-h''^2 \lambda^2}$$

gemäß verteilen, d. h. die Anzahl der λ, die zwischen die Grenzen

$$-\frac{\gamma}{h''} \quad \text{und} \quad +\frac{\gamma}{h''}$$

fallen, wird voraussichtlich nahe kommen der Zahl

$$z\Phi(\gamma) = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt. \qquad (9)$$

Dieser Fall, welcher dem Verhalten von Reihenergebnissen über *zufällige* Ereignisse entspricht, wäre der Typus einer menschlichen Massenerscheinung, der ein *konstant* bleibender Bedingungskomplex zugrunde liegt, bei welcher der Verlauf der einzelnen Fälle den Charakter des Zufälligen an sich trägt und die Fälle als unter einander unabhängig anzusehen sind. Lexis[2]) bezeichnet eine solche Massenerscheinung als eine *unverbundene*, die ihr zugrunde liegende Größe p eine *typische* Wahrscheinlichkeitsgröße mit *normaler Dispersion*. Eine solche Größe ist in der physiologischen Konstitution der beobachteten Masse gelegen, bildet eine sie charakterisierende Konstante, eine „massenphysiologische Konstante".

Das summarische Merkmal, daß man in der Reihe (1) empirische Werte einer typischen Wahrscheinlichkeit mit normaler Dispersion und in p_0 ihre beste, aus dem vorliegenden Beobachtungsmaterial ableitbare Bestimmung vor sich habe, besteht darin, daß nahezu

$$h' = h'' \quad \text{oder} \quad \mu' = \mu'', \quad \vartheta' = \vartheta''$$

---

1) W. Lexis, Zur Theorie etc., p. 27; L. v. Bortkewitsch, Das Gesetz der kleinen Zahlen (1898), p. 5. 2) l. c.

ist, oder daß der Quotient

$$Q = \frac{h'}{h''} \quad \text{oder} \quad Q = \frac{\mu''}{\mu'}, \quad Q = \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \tag{10}$$

sich von der Einheit nur wenig unterscheidet. Diesen Quotienten, von v. Bortkewitsch[1]) als *Fehlerrelation* bezeichnet, hat E. Dormoy[2]) in der dritten Form fast gleichzeitig mit Lexis und unabhängig von diesem in die mathematische Statistik eingeführt und ihm den Namen „Divergenzkoeffizient" gegeben.

Betreffs der praktischen Durchführung der Untersuchung mögen gleich einige Bemerkungen angeschlossen werden.

Sind die Beobachtungsreihen nicht von gleichem Umfange, wohl aber, wie dies häufig vorkommt, durch Zahlen $s_1, s_2, \cdots s_z$ von gleicher *Ordnung* dargestellt, so wird es genügen, in den Formeln, wo s vorkommt, dieses durch das arithmetische Mittel $\frac{[s]}{z}$ zu ersetzen und die Rechnung weiter so zu führen wie vorhin; auch zwischen den beiden Mittelwerten

$$\frac{\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2} + \cdots + \frac{m_z}{s_z}}{z} \quad \text{und} \quad \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_z}{s_1 + s_2 + \cdots + s_z}$$

wird kein erheblicher Unterschied bestehen.

Gehen aber die Zahlen $s_1, s_2, \cdots s_z$ beträchtlich auseinander, dann wird man die Quotienten

$$\frac{m_1}{s_1}, \quad \frac{m_2}{s_2}, \quad \cdots \quad \frac{m_z}{s_z} \tag{1*}$$

als Beobachtungen von den Gewichten $s_1, s_2, \cdots s_z$ behandeln und erhält (s. Nr. 137):

$$p_0 = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_z}{s_1 + s_2 + \cdots + s_z}, \tag{2*}$$

als deren arithmetisches Mittel und

$$\mu'' = \sqrt{\frac{[s\lambda\lambda]}{z-1}} \tag{7*}$$

als mittleren Fehler einer Beobachtung vom Gewichte 1, d. i. einer fiktiven Beobachtung, die aus einer Reihe mit der Beobachtungszahl $s = 1$ stammt; dem entsprechend wird

$$\mu' = \sqrt{p_0(1 - p_0)} \tag{6*}$$

und der Divergenzquotient

$$Q = \frac{\mu''}{\mu'} = \sqrt{\frac{[s\lambda\lambda]}{(z-1)\,p_0\,(1-p_0)}}.$$

1) Das Gesetz der kleinen Zahlen, p. 31.

2) Théorie mathémat. des assurances sur la vie (1878), I, p. 39.

Hat man statt der Quotienten $\frac{m_i}{s_i}$, die unmittelbar die Bedeutung einer Wahrscheinlichkeit haben, andere Relativzahlen

$$v_1, \quad v_2, \quad \cdots \quad v_z \qquad (1^{**})$$

gerechnet, die sich als Spezialwerte einer gewissen Funktion $f(p)$ von p darstellen, so sind (1^{**}) direkte Beobachtungen dieser Funktion, und die Berechnung von μ'', h'' modifiziert sich nur dahin, daß nun

$$\lambda_i = -v_i + \frac{[v]}{z}$$

wird; dagegen tritt an die Stelle von h' im Sinne der Ausführungen in Nr. 167 der Ausdruck:

$$h' = \frac{1}{|f'(p_0)|}\sqrt{\frac{s}{2p_0(1-p_0)}}. \qquad (5^{**})$$

Bei ungleichen Grundzahlen s_1, s_2, $\cdots$ s_z erfahren diese Formeln die bereits erklärte Abänderung.

Die beiden Beispiele in Nr. 139 bieten das reine *Bild* eines Beobachtungsmaterials, wie es am Beginne dieser Untersuchung vorausgesetzt wurde, und typischer Wahrscheinlichkeiten mit normaler Dispersion. In dem Beispiele a) ist

$$h' = 14{,}14, \quad h'' = 16{,}32, \quad \text{also} \quad Q = 0{,}86,$$

in dem Beispiele b)

$$h' = 18{,}97, \quad h'' = 21{,}46 \quad \text{und} \quad Q = 0{,}87;$$

die normale Dispersion der Einzelwerte ist dort nachgewiesen.

169. Typische Wahrscheinlichkeitsgrößen mit übernormaler Dispersion. Stellt man sich vor, daß der Bedingungskomplex der Massenerscheinung E ein mit der Zeit oder dem Orte veränderlicher sei, daß ferner die Quotienten

$$\frac{m_1}{s}, \quad \frac{m_2}{s}, \quad \cdots \quad \frac{m_z}{s} \qquad (1)$$

sich auf eine Reihe von z Jahren oder auf z getrennte Beobachtungsgebiete beziehen, so kann die Sache so aufgefaßt werden, als lägen gleich genaue direkte Beobachtungen einer Größe vor, die selbst von Beobachtung zu Beobachtung sich ändert. Dann kommen in den Abweichungen

$$\lambda_i = -\frac{m_i}{s} + p_0 \qquad (i = 1, 2, \cdots z)$$

der Glieder der Reihe (1) von ihrem Mittelwert

$$p_0 = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_z}{zs} \qquad (2)$$

nicht bloß die *zufälligen* Abweichungen, sondern auch die *wesentlichen* Schwankungen der Grundgröße p zum Ausdruck; das hat eine Vergrößerung des aus den λ berechneten mittleren Fehlers μ'', somit eine Verminderung der nach der physikalischen Methode bestimmten Präzision h'' zur Folge; man hat daher eine Ungleichung des Sinnes

$$h' > h'' \tag{3}$$

und einen Divergenzkoeffizienten

$$Q > 1 \tag{4}$$

zu erwarten. Je ausgesprochener dieses Verhalten auftritt, um so sicherer ist der Schluß, daß die wirkliche Sachlage den gemachten Voraussetzungen entspreche.

Dies hindert jedoch nicht, daß die λ wieder ein Gesetz von der Form des früheren Falles befolgen, nämlich das Gesetz

$$\frac{h''}{\sqrt{\pi}} e^{-h''^2 \lambda^2};$$

es brauchen nämlich nur die Schwankungen der Grundgröße selbst den Charakter des Zufälligen zu besitzen; denn, hat die Grundgröße während der i-ten Beobachtungsserie den Wert p_i, und ist

$$-\frac{m_i}{s} + p_i = \varepsilon_1^{(i)}$$

$$-p_i + p_0 = \varepsilon_2^{(i)},$$

so hat man

$$\lambda_i = -\frac{m_i}{s} + p_0 = \varepsilon_1^{(i)} + \varepsilon_2^{(i)},$$

und sind $\varepsilon_1^{(i)}$, $\varepsilon_2^{(i)}$ beide zufälliger Natur, so befolgt auch ihre Summe λ_i das Exponentialgesetz (Nr. 126). Nur wird die Dispersion der λ_i jetzt eine weitere sein als in dem Falle, wo in p_0 der empirische Wert einer konstanten Wahrscheinlichkeit zu erblicken ist, sie wird *übernormal* sein (vgl. Nr. 86).

Eine menschliche Massenerscheinung, welche diese Merkmale aufweist, gehört gleichfalls zu den *unverbundenen*; sie zeigt aber in den Ergebnissen einer Serie von Beobachtungsreihen eine geringere *Stabilität*, als eine Erscheinung der in der vorigen Nummer beschriebenen Art. Die ihr entsprechende, nunmehr zufällig veränderliche Größe p, von welcher p_0 einen für die Periode, über welche sich die Beobachtungen erstrecken, geltenden Durchschnittswert vorstellt, wird von Lexis eine *typische* Wahrscheinlichkeitsgröße mit *übernormaler Dispersion* genannt.

170. Fortsetzung. Nähere Untersuchung des Falles einer variabeln Grundwahrscheinlichkeit. Wiewohl die Annahme einer *stetigen* Veränderlichkeit der Natur der Sache im allgemeinen besser

entsprechen würde, möge doch angenommen werden, daß die Veränderung *serienweise*, also von Beobachtungsreihe zu Beobachtungsreihe erfolgt, so daß während einer solchen eine *konstante* Wahrscheinlichkeit herrscht[1]).

Die Ergebnisse der Beobachtung von E in s verschiedenen Jahren (oder aus z getrennten Gebieten), ausgedrückt durch die Verhältnisse

$$\frac{m_1}{s}, \quad \frac{m_2}{s}, \quad \ldots \quad \frac{m_z}{s}, \tag{1}$$

seien also empirische Bestimmungen von

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots \quad p_z. \tag{2}$$

Ferner sei

$$\frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_z}{z s} = p_0 \tag{3}$$

das arithmetische Mittel der Zahlen (1),

$$\frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_z}{z} = p \tag{4}$$

das unbekannte Mittel der Zahlen (2), also die auf sämtliche Beobachtungen bezügliche durchschnittliche Grundwahrscheinlichkeit, für welche p_0 eine empirische Bestimmung darstellt.

Einem konstant bleibenden p entspräche eine mittlere Abweichung der Resultate (1) vom Betrage

$$\mu' = \sqrt{\frac{p(1-p)}{s}}; \tag{5}$$

dagegen wird, wenn man

$$-\frac{m_i}{s} + p = \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots z)$$

setzt, die wirklich stattfindende mittlere Abweichung

$$\mu'' = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{z}} \tag{6}$$

sein.

Um diese zu bestimmen, bilde man

$$\varepsilon_i^2 = \left(\frac{m_i}{s}\right)^2 - 2p\frac{m_i}{s} + p^2$$

und summiere für alle i; dadurch ergibt sich:

$$[\varepsilon\varepsilon] = \left[\left(\frac{m_i}{s}\right)^2\right] - 2p\left[\frac{m_i}{s}\right] + zp^2.$$

Ferner folgt aus

1) Diese Vorstellung rührt von W. Lexis her: Über die Theorie der Stabil. etc., p. 66. — Vgl. für das folgende L. v. Bortkewitsch, Das Gesetz der kleinen Zahlen, p. 29 ff.

•
$$\left(-\frac{m_i}{s}+p_i\right)^2 = \left(\frac{m_i}{s}\right)^2 - 2p_i\frac{m_i}{s} + p_i^2,$$

aß

$$\left[\left(\frac{m_i}{s}\right)^2\right] = \left[\left(-\frac{m_i}{s}+p_i\right)^2\right] + 2\left[p_i\frac{m_i}{s}\right] - [p_i^2];$$

etzt man diesen Wert in die vorige Gleichung ein, so wird

$$[\varepsilon\varepsilon] = \left[\left(-\frac{m_i}{s}+p_i\right)^2\right] + 2\left[p_i\frac{m_i}{s}\right] - [p_i^2] - 2p\left[\frac{m_i}{s}\right] + zp^2.$$

n dieser Gleichung möge jedes Glied durch seinen Mittelwert ersetzt verden; dabei ist zu beachten, daß der Mittelwert

von ε_i^2 gleich ist μ''^2,

„ $\left(-\frac{m_i}{s}+p_i\right)^2$ „ „ $\frac{p_i(1-p_i)}{s}$

„ $\frac{m_i}{s}$ „ „ p_i;

hiernach ergibt sich zur Bestimmung von μ'' der Ansatz:

$$z\mu''^2 = \left[\frac{p_i(1-p_i)}{s}\right] + 2[p_i^2] - [p_i^2] - 2p[p_i] + zp^2$$

oder mit Rücksicht auf (4):

$$z\mu''^2 = \left[\frac{p_i(1-p_i)}{s}\right] + [p_i^2] - zp^2. \qquad (7)$$

Nun folgt aus der Identität:

$$p_iq_i = pq + (p-q)(p-p_i) - (p_i-p)^2,$$

welcher $q_i = 1 - p_i$, $q = 1 - p$ ist, durch Summierung über alle i:

$$[p_iq_i] = zpq + (p-q)(zp - [p_i]) - [(p_i-p)^2],$$

d wieder mit Rücksicht auf (4):

$$[p_iq_i] = zpq - [(p_i-p)^2];$$

ner aus der Identität

$$(p_i-p)^2 = p_i^2 - 2pp_i + p^2$$

ch den gleichen Vorgang:

$$[(p_i-p)^2] = [p_i^2] - zp^2.$$

rmit verwandelt sich die Gleichung (7) in:

$$z\mu''^2 = \frac{zpq}{s} - \frac{[(p_i-p)^2]}{s} + [(p_i-p)^2],$$

us schließlich gefunden wird:

$$\mu'' = \sqrt{\frac{pq}{s} + \frac{s-1}{s}\,\frac{[(p_i-p)^2]}{z}}. \qquad (8)$$

Diese Formel läßt die Zusammensetzung von μ'' aus zwei Komponenten deutlich erkennen: die eine Komponente

$$\sqrt{\frac{pq}{s}},$$

übereinstimmend mit dem unter (5) gerechneten μ', ist die mittlere, vom Zufall allein abhängige Schwankung, die *unwesentliche* Schwankungskomponente (der *Normalfehler*); die andere,

$$M = \sqrt{\frac{s-1}{s}\frac{[(p_i - p)^2]}{z}}, \tag{9}$$

stammt von den Schwankungen der Grundwahrscheinlichkeit her und soll als *physische* Schwankungskomponente[1]) (*absoluter Fehlerexcedent*) bezeichnet werden. Die Zusammensetzung beider zu μ'' geschieht nach dem Gesetze der Zusammensetzung der mittleren Fehler, die aus unabhängen Fehlerursachen entspringen.

Die Komponente M ist die für das Wesen einer Massenerscheinung von der hier beschriebenen Art charakteristische. Aus der Struktur ihrer Formel ist zu erkennen, daß sie um so geringer ausfällt, je geringer die Schwankungen $p_i - p$ der Grundwahrscheinlichkeit sind, je *stabiler* also die betreffende Massenerscheinung ist, daß sie ferner von dem Umfange der Beobachtungsreihen nur in sehr geringem Grade abhängt, weil $\frac{s-1}{s}$ bei erheblichem s nur wenig von der Einheit verschieden ist.

Die Komponente μ' hingegen nimmt im Verhältnis der Quadratwurzel aus s ab. Dies hat zur Folge, daß bei sehr umfangreichen Beobachtungsreihen μ' gegen M zurücktritt und das aus den Abweichungen $\lambda_i = -\frac{m_i}{s} + p_0$ gerechnete μ'' vornehmlich die Komponente M zum Ausdruck bringt. Bei verhältnismäßig kleinem s kann die Komponente M durch jene μ' verdeckt werden.

Es bleibt noch das Verhalten des Divergenzkoeffizienten im Sinne dieser Theorie zu untersuchen. Der Ausdruck

$$Q = \frac{\mu''}{\mu'} = \sqrt{1 + (s-1)\frac{[(p_i - p)^2]}{zpq}} \tag{10}$$

desselben zeigt vor allem die schon hervorgehobene Tatsache, daß

$$Q > 1$$

ist und daß unter sonst gleichbleibenden Umständen Q mit s wächs[t]. Durch Verkleinerung des Umfanges der Beobachtungsreihen kann al[so] der Divergenzkoeffizient der Einheit näher gerückt, die übernorm[ale]

1) W. Lexis, Über die Theorie der Stabil. etc., p. 66. — Bezüglich [der] eingeklammerten Bezeichnungen vgl. L. v. Bortkewitsch, Das Gesetz etc. ...

ıpersion der normalen genähert werden. Gerade dieses Verhalten ı Q hat zur Aufklärung mancher Erscheinungen geführt, die sich der Untersuchung statistischer Zahlenreihen auf ihre Dispersion gestellt haben[1]).

Mit Hilfe von Q und μ' drückt sich die physische Komponente ı mittleren Fehlers wie folgt aus:

$$M = \mu' \sqrt{Q^2 - 1}. \tag{11}$$

ch dieser allein ist der wesentliche Anteil der Dispersion oder die ysische Dispersion zu beurteilen. Je größer M, desto größer der ıfluß des Wechsels der maßgebenden Umstände auf die Schwankung : Resultate.

Für $Q = \sqrt{2} = 1{,}414 \cdots$ wird das Maß der physischen Schwanugen dem der zufälligen gerade gleich. Von da ab wächst mit Q : Einfluß der physischen Schwankungen über jenen der zufälligen ıaus.

171. Unternormale Dispersion. Stabilität statistischer ›ihen. Symptomatische Reihen. Da eine Massenerscheinung, : eine *konstante* Wahrscheinlichkeit zugrunde liegt, zu Verhältniszahlhen mit *normaler* Dispersion, eine Massenerscheinung mit *variabler* ahrscheinlichkeit zu solchen Reihen mit *übernormaler* Dispersion ırt; da ferner ein anderes Verhalten der Wahrscheinlichkeit außer ›sen nicht denkbar ist, so kann es Massenerscheinungen, denen der arakter des Znfälligen zukommt, mit anderer als normaler oder ernormaler Dispersion nicht geben.

Der Fall, daß eine Reihe von Relativzahlen *unternormale* Dispersion gte, was sich durch eine Ungleichung zwischen der auf kombinatochem Wege abgeleiteten Präzision h' und der physikalisch bemmten Präzision h'' des Sinnes

$$h' < h''$$

.d somit durch einen Divergenzkoeffizienten

$$Q < 1$$

ßern müßte, beträfe also nicht mehr eine *ungebundene* Massenerscheig, bei der die Abweichungen von einem mittleren Verlauf lediglich ch zufällige Einflüsse bewirkt werden. Vielmehr müßte angeımen werden, daß durch einen absichtlichen Eingriff, eine Norm,

1) Vgl. hierzu die von L. v. Bortkewitsch unter der Bezeichnung „Gesetz kleinen Zahlen" veröffentlichten Untersuchungen, deren Hauptergebnis darin t, daß Massenerscheinungen mit kleinen Ereigniszahlen, Erscheinungen also, relativ sehr selten auftreten, sich dem Schema der normalen Dispersion ›er anpassen, als Massenerscheinungen mit großen Ereigniszahlen. v. Bortkesch stützt dieses Verhalten auf die oben erwähnte Eigenschaft von Q.

ein Gesetz, die Tendenz nach einem bestimmten Verlauf erzeugt werde; dadurch geht die Unabhängigkeit der Einzelfälle verloren, und die Größe, welche als Mittelwert aus der Reihe der Relativzahlen gewonnen wird, kann nicht mehr als empirische Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit oder der Funktion einer Wahrscheinlichkeit gelten; sie ist nichts mehr als eine quantitative Beschreibung des äußeren Verlaufes der Erscheinung während der Beobachtungsperiode.

Aus diesen Erwägungen geht hervor, daß das *höchste* Maß von *Stabilität*, das einer Reihe von Relativzahlen, die aus einer *ungebundenen*, oder wie man sagen könnte, *natürlichen* Massenerscheinung stammen, eigen sein kann, der *normalen* Dispersion entspricht. Eine über dieses Maß hinausgehende Stabilität können nur Reihen aufweisen, die sich auf unter einem normativen äußeren Zwange stehende Massenerscheinungen beziehen.

Es liegt in der Natur der Sache, daß der Fall normaler Dispersion, der gewissermaßen den Gipfelpunkt bildet, sich nie in voller Strenge wird erweisen lassen; ja es spricht vieles dafür, daß menschliche Massenerscheinungen ihn niemals vollkommen darbieten, ihm vielmehr als einem idealen Falle nur nahe kommen; mit andern Worten: daß die völlige Konstanz der eine menschliche Massenerscheinung bedingenden Umstände auf die Dauer niemals vorhanden ist.

Die Relation $h' = h''$ oder $Q = 1$ wird also im allgemeinen nur angenähert zu erwarten sein; selbst dort, wo die Bedingungen normaler Dispersion erfüllt sind (Ziehungen aus einer Urne mit konstantem Mengenverhältnis weißer und schwarzer Kugeln und beständiger Mischung der letzteren), wird eine Abweichung nach der einen oder andern Seite die Regel bilden. Nur die Erfassung des Gesamtbildes, das eine Reihe von Beobachtungsserien über eine Massenerscheinung darbietet, ermöglicht einen Schluß auf deren Natur.

Reihen, welchen der typische Charakter, sei es mit normaler oder übernormaler Dispersion, abgeht, werden *symptomatische* Reihen genannt[1]). Sie bilden die quantitative Beschreibung eines mit der Zeit veränderlichen Zustandes einer Menschenmasse und müssen nach der Zeitfolge geordnet bleiben, um die Art der Änderung erkennen zu lassen. Verrät sich diese als eine in gleichem Sinne anhaltende, so mag die Reihe als eine *evolutorische* bezeichnet werden; wechselt sie jedoch in unregelmäßiger Weise, ihren Sinn, so soll die Reihe eine *undulatorische* heißen, und verrät sich in dem Wechsel der Änderungstendenz eine regelmäßige Zeitfolge, so hat man es mit einer *periodischen* Reihe zu tun. Das Studium solcher Reihen ist der sicherste Anhaltspunkt für das Studium der Massenerscheinungen selbst.

172. Untersuchungsergebnisse. Seit der Begründung der Dispersionstheorie sind durch ihren Urheber, W. Lexis selbst, sowie

1) W. Lexis, Zur Theorie etc., p. 33.

itens anderer verschiedene menschliche Massenerscheinungen nach ser Methode untersucht worden; insbesondere sind das Geschlechtsrhältnis der Geborenen, das Geschlechtsverhältnis der Gestorbenen d der Überlebenden, vornehmlich in den ersten Lebensjahren, die erblichkeit, aber auch einige Erscheinungen der Moralstatistik Gegennd des Studiums gewesen. Untersuchungen dieser Art haben nicht ein ein hervorragendes wissenschaftliches Interesse, sondern auch ie praktische Bedeutung, indem sie der Lösung der Vorfrage dienen, auf gewisse gesellschaftliche Vorgänge die Sätze der Wahrscheinhkeitsrechnung sich anwenden lassen. Denn dies ist nur dann gehtfertigt, wenn eine typische Wahrscheinlichkeitsgröße mit normaler spersion oder, wenn es sich nicht um weit ausgedehnte Zeiträume ndelt, eine solche mit mäßiger übernormaler Dispersion vorliegt.

Im folgenden sollen einige Beispiele und Resultate der Unterchung mitgeteilt werden.

a) Über das *Geschlechtsverhältnis der Geborenen* hat Lexis[1]) an eußischen, englischen und französischen Beobachtungen umfangreiche rechnungen angestellt, die zu dem Ergebnis führten, daß man es i dieser Erscheinung mit einer typischen Wahrscheinlichkeitsgröße n normaler Dispersion in sehr deutlich ausgesprocher Weise zu tun be, daß also eine jenes Verhältnis charakterisierende Zahl eine ssenphysiologische Konstante darstelle, die mit der Zeit, wenn überapt, so doch nur eine sehr geringe Veränderung erleidet. Daraus gt, daß die Geschlechtsbestimmung in der physiologischen Konstiion einer Menschenmasse tief begründet und von äußeren Umnden fast unabhängig ist.

Nachstehend ist das Resultat der ersten Lexisschen Beobachtungshe zusammengestellt. Es handelt sich dabei um die monatlichen burten in 34 Bezirken Preußens aus den Jahren 1868 und 1869, so um 34 Reihen von je 24 Beobachtungen. Als Relativzahl, auf elche sich die Untersuchung bezieht, ist

$$v = \frac{1000\,m}{n} = \frac{1000\,p}{1-p}$$

erwendet, also die Zahl der Knabengeburten, die auf 1000 Mädchenburten entfallen (s. Nr. 167). Die kombinatorische Präzision wurde ch der Formel

$$h' = \frac{(1-p_0)^2}{1000\sqrt{2p_0(1-p_0)}}\sqrt{s}$$

rechnet, wobei s die durchschnittliche monatliche Geburtenzahl des treffenden Bezirkes, p_0 dagegen die aus sämtlichen Geburten der

1) Das Geschlechtsverhältnis der Geborenen und die Wahrscheinlichkeitsnung, p. 216—245; Zur Theorie der Massenerscheinungen, p. 64—78.

zwei Jahre abgeleitete Verhältniszahl der männlichen Geburten zu [illegible] allen Geburtsfällen bedeutet, die sich mit 0,515 ergab, so daß bei h' [illegible] nur der Faktor $\sqrt{s}$ von Bezirk zu Bezirk wechselt, während de[illegible] andere (= 0,0003328) konstant bleibt. Die physikalische Präzisio[illegible] ist für jeden Bezirk nach der Formel

$$h'' = \sqrt{\frac{23}{2\,[\lambda\lambda]}}$$

berechnet. Dadurch sind sämtliche Bezeichnungen des folgende[illegible] Tableaus erklärt.

Bezirk	s	h'	h''	Q
Königsberg	3426	0,0195	0,0208	0,94
Gumbinnen	2275	0159	0144	1,10
Danzig	1830	0142	0151	0,94
Marienwerder	2918	0180	0249	0,72
Berlin	2448	0165	0158	1,04
Potsdam	3028	0183	0176	1,04
Frankfurt	3211	0189	0185	1,02
Stettin	2167	0155	0166	0,93
Cöslin	1844	0143	0119	1,20
Stralsund	639	0086	0096	0,90
Posen	3738	0203	0205	0,99
Bromberg	2133	0154	0145	1,06
Breslau	4766	0230	0205	1,12
Liegnitz	2975	0182	0163	1,12
Oppeln	4855	0232	0214	1,08
Magdeburg	3650	0201	0174	1,15
Merseburg	2899	0179	0146	1,23
Erfurt	1235	0117	0142	0,82
Schleswig	2715	0173	0118	1,47
Hannover	1142	0112	0130	0,86
Hildesheim	1200	0115	0114	1,0[illegible]
Lüneburg	975	0104	0094	1,1[illegible]
Stade	879	0099	0093	1,06
Aurich-Osnabrück	1220	0116	0122	0,9[illegible]
Münster	1118	0111	0092	1,2[illegible]
Minden	1464	0127	0141	0,9[illegible]
Arnsberg	2918	0180	0177	1,0[illegible]
Cassel	2441	0164	0189	0,8[illegible]
Wiesbaden	1837	0143	0108	1,3[illegible]
Koblenz	1700	0137	0131	1,0[illegible]
Trier	1901	0145	0148	0,9[illegible]
Köln	1936	0146	0149	0,9[illegible]
Düsseldorf	4305	0218	0247	0,[illegible]
Aachen	1485	0128	0151	0,[illegible]

Die Werte von Q schwanken zwischen 0,72 und 1,47, liege[illegible] i[illegible] 19 Bezirken über, in 15 unter 1. Nichtsdestoweniger macht sich [illegible]die Einheit oder eine ihr sehr nahe liegende Zahl als Zentralwert de[illegible]t-lich bemerkbar; in der Tat ist das arithmetische Mittel aller Q glei[illegible]ch 1,09, und man braucht keineswegs aus dem geringen Überschuß über [illegible] 1

f. übernormale Dispersion zu schließen; vielmehr kann derselbe aus r Unsicherheit in der Bestimmung der h'' erklärt werden.

Auch daraus geht die gute Übereinstimmung der wirklichen spersion mit der erwartungsmäßigen hervor, daß das Mittel der h' eich 0,0156, jenes der h'' gleich 0,0154 ist. Aus der Prüfung der rteilung der $34 \cdot 24 = 816$ Einzelwerte von v von dem aus dem samtmaterial berechneten $v_0 = 1063$ unter Zugrundelegung der Präion 0,0156 ergab sich folgendes:

Abweichung	Beobachtet +	Beobachtet —	Beobachtet zus.	Theoret.
0 bis $19\frac{1}{2}$	152	130	282	272
$19\frac{1}{2}$ „ $39\frac{1}{2}$	96	118	214	231
$39\frac{1}{2}$ „ $59\frac{1}{2}$	74	61	135	159
$59\frac{1}{2}$ „ $79\frac{1}{2}$	46	48	94	90
$79\frac{1}{2}$ „ $99\frac{1}{2}$	25	22	47	42
über $99\frac{1}{2}$	29	15	44	23

n kann auch hier von einer zureichenden Annäherung der wirkhen Verteilung an die erwartungsmäßige sprechen.

b) Die Bearbeitung der in *Österreich* (im Reichsrate vertretene nder) in dem 32-jährigen Zeitraume 1866—1897 registrierten Gerten in ihrer Scheidung nach Lebend- und Totgeburten einerseits d ehelichen und unehelichen Geburten andererseits ergab die nachhend mitgeteilten Ergebnisse[1]).

Zunächst möge der Gesamtumfang des Materials und seine Gliedeng nach den erwähnten Kategorien aus folgender Tabelle entmmen werden, welche auch den für die Rechnungen erforderlichen hresdurchschnitt angibt.

	Lebendgeborene						Totgeborene					
	ehelich			unehelich			ehelich			unehelich		
	männl.	weibl.	zus.	männl.	weibl.	zus.	männl.	weibl.	zus.	männl.	weibl.	zus.
	12 093 236	11 395 279	23 488 515	1 974 739	1 868 615	3 843 354	331 098	245 115	576 213	82 680	70 204	152 884
chnitt			734 016			120 105			18 007			4 778

1) Das Material für diese Untersuchung ist dem „Statistischen Jahrbuch“ d (von 1882 ab) der „Österreichischen Statistik“, beide herausgegeben von der tist. Zentral-Komm., entnommen.

Die Untersuchung wurde an dem Verhältnis $\frac{m}{s}$ der Knabengeburten zur Gesamtzahl der Geburten, also an jenem Verhältnis vorgenommen, das eine empirische Bestimmung der Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt darstellt. Für jede der vier Kategorien ergab sich so eine Reihe von 32 Einzelwerten dieses Verhältnisses, deren Dispersion dann geprüft wurde. Die Einzelwerte selbst sind aus folgender Tabelle zu ersehen.

Relative Häufigkeit der Knabengeburten.

Jahr	Leb. ehel.	Leb. unehel.	Tot ehel.	Tot unehel.
1866	0,51637	0,51050	0,5759	0,5263
67	51662	51271	5736	5353
68	51501	50929	5783	5407
69	51575	51029	5805	5384
70	51514	51345	5720	5436
71	51565	51628	5781	5275
72	51594	51621	5825	5353
73	51554	51366	5723	5389
74	51611	51475	5708	5342
75	51397	51695	5719	5310
76	51503	51614	5751	5409
77	51488	51482	5716	5387
78	51398	51205	5803	5350
79	51445	51381	5682	5333
80	51479	51373	5758	5256
81	51469	51420	5756	5450
82	51523	51378	5730	5424
83	51450	51453	5734	5458
84	51378	51137	5675	5261
85	51439	51498	5769	5362
86	51575	51429	5706	5386
87	51323	51187	5779	5476
88	51461	51222	5711	5422
89	51405	51298	5761	5351
90	51495	51335	5757	5525
91	51473	51626	5780	5452
92	51572	51286	5771	5454
93	51562	51620	5814	5543
94	51455	51079	5789	5413
95	51409	51430	5721	5489
96	51358	51805	5721	5558
97	51373	51524	5653	5573

Die Zahlen jeder Reihe sind verglichen worden mit jenem Werte des Verhältnisses $\frac{m}{s}$, der sich aus der Gesamtmenge der betreffenden Geburten ergibt; aus den Abweichungen $\lambda_i = -\frac{m_i}{s_i} + p_0$ ist dann mittlere Fehler

$$\mu'' = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{31}},$$

$_0$ und dem Jahresdurchschnitt s_0 der Geburten der mittlere Fehler

$$\mu' = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{s_0}}$$

hnet worden[1]); aus diesen beiden ergab sich der Dispersions-izient

$$Q = \frac{\mu''}{\mu'}.$$

betreffenden Werte sind aus der folgenden Tabelle zu ersehen.

	Leb. ehel.	Leb. unehel.	Tot ehel.	Tot unehel.
p_0	0,51486	0,51381	0,5746	0,5401
μ''	0,000854	0,00208	0,00432	0,00862
μ'	0,000585	0,00144	0,00368	0,00721
Q	1,46	1,45	1,17	1,16

Was die Verteilung der λ_i, also die eigentliche Dispersion, an-so zeigen die nachstehenden Daten, wie sie nach dem jeweiligen von h'' (physikalische Präzision) sich hätte ergeben sollen (Theor.) wie sie tatsächlich sich ergeben hat (Beob.).

end ehelich ' = 827,8			Lebend unehelich h'' = 340,1			Tot ehelich h'' = 163,7			Tot unehelich h'' = 82,0		
	Anzahl		λ	Anzahl		λ	Anzahl		λ	Anzahl	
is	Theor.	Beob.	von 0 bis	Theor.	Beob.	von 0 bis	Theor.	Beob.	von 0 bis	Theor.	Beob.
02	5	7	± 0,001	12	13	± 0,002	10	9	± 0,001	3	2
04	12	12	0,002	21	20	0,004	20	24	0,005	14	14
06	17	14	0,003	27	26	0,006	26	27	0,010	24	24
08	20	18	0,004	30	30	0,008	30	31	0,015	29	30
10	24	24									
14	29	29									
18	31	32									

) In der Kategorie der ehelichen Lebendgeburten, wo die Geburtenmenge en 621721 (1867) und 809224 (1897) schwankt, wurde die Rechnung des iches wegen auch mit Berücksichtigung der Gewichte durchgeführt, und wurde als Gewichtseinheit eine Reihe von 10 000 Geburten angenommen, die Zehntausender der jährlichen Geburtsmengen als Gewichte zu ver-n waren. Auf diese Weise ergaben sich für den mittleren Fehler der Ge-einheit nach den beiden Bestimmungsmethoden die Werte:

$$\mu_0'' = 0,00727$$
$$\mu_0' = 0,00500$$

araus in fast völliger Übereinstimmung mit dem andern Rechnungswege:

$$Q = \frac{\mu_0''}{\mu_0'} = 1,45.$$

Man kann wohl, namentlich in den weniger zahlreichen Kategorien von einem vollkommenen Anschlusse der Erfahrung an die Theori sprechen.

Das Ergebnis der Untersuchung läßt sich in folgendem zusammen fassen:

Die relative Häufigkeit der Knabengeburten ist in dem betrachte ten Beobachtungsgebiete eine typische Wahrscheinlichkeitsgröße m mäßig übernormaler Dispersion; dies dürfte seinen Grund nicht i einer zeitlichen Änderung der konstitutiven Bedingungen, sondern i Verschiedenheiten dieser Bedingungen bei den mannigfachen Volk stämmen haben, die in dem Beobachtungsmaterial vereinigt sin darüber könnte nur eine Trennung der Zahlen nach Volksstämm oder zum mindesten nach Ländergebieten Aufschluß geben.

Bei den dem Umfange nach zurücktretenden Kategorien der T geborenen rückt die Dispersion der normalen erheblich nahe (s. d Interpretation der Formel [10] in Nr. 170).

Bei den Totgeburten ist die relative Häufigkeit der Knab geburten erheblich größer als bei den Lebendgeburten.

Zur Beleuchtung der Stabilität dieser Verhältnisse sei noch folg des angeführt. Es ergaben sich für p_0 in den Zeiträumen 1866—18 7 und 1878—1894 und bei den einzelnen Kategorien folgende We

	1866—1877	1878—1894
Lebendgeborene, ehelich	0,51545	0,51465
Lebendgeborene, unehelich	0,51368	0,51349
Totgeborene, ehelich	0,5752	0,5653
Totgeborene, unehelich	0,5359	0,5410
Geborene überhaupt	0,51642	0,5160

c) Das *Geschlechtsverhältnis der Gestorbenen* in den verschiede en Altersklassen ist von Lexis[1]) an Beobachtungen über die Bevölker ng Belgiens in dem Zeitraume 1841—1860 untersucht worden. Es er ab sich, daß diesem Verhältnis in den ersten Altersjahren eine typis he Wahrscheinlichkeit mit fast normaler Dispersion zugrunde liegt nd daß diese Wahrscheinlichkeit, der Verstorbene sei männlichen e-schlechtes, mit dem Alter abnimmt. Später, und namentlich in en höheren Altersklassen (30 bis 75), wird die Dispersion ausgesproc en übernormal, ein Zeichen dafür, daß hier energisch wirkende und st rk wechselnde *äußere* Ursachen vorhanden sind, die spezifisch auf die Sterblichkeit des einen und des andern Geschlechtes Einfluß neh en. In den höchsten Altern findet wieder ein Ausgleich statt und ine fast gleichmäßige Stellung beider Geschlechter zu den Todesursac en; der organische Unterschied in der Lebensfähigkeit der beiden Ge-schlechter, der vordem so erheblich war, tritt fast völlig zurück.

1) Über die Theorie der Stabil. d. statist. Reihen, p. 84—92.

In jüngster Zeit sind diese Untersuchungen an vollkommenerem und ausgedehnterem statistischen Material von W. Kammann[1]) von neuem ausgeführt und auch auf das *Geschlechtsverhältnis der Überlebenden* in den Kinderjahren erstreckt worden. Dadurch ist auch ein Einblick gewonnen worden in die Art und Weise, wie das ursprüngliche Übergewicht des männlichen Geschlechtes über das weibliche nach und nach aufgehoben wird, so daß schon sehr früh nahezu völliges Gleichgewicht der Geschlechter sich einstellt.

Die Beobachtungen, welche Kammann verwendet, beziehen sich auf Holland (1870—1873, 1880—1894) und auf Preußen (1867—1894); durch Zerlegung des preußischen Materials nach Provinzen sind Beobachtungsreihen verschiedenen Umfanges hergestellt worden, um auch den Einfluß dieses Faktors auf die Ergebnisse zu prüfen.

Zunächst konnte, in Übereinstimmung mit den vorerwähnten Resultaten von Lexis, festgestellt werden, daß die Gestorbenen der ersten Lebensjahre in bezug auf das Geschlechtsverhältnis in guter Annäherung maximale Stabilität aufweisen, wenn auch nicht in dem hohen Grade wie die Geborenen. Die Quotienten $\frac{m}{s}$, welche das Verhältnis der Sterbefälle von Knaben zur Anzahl aller Sterbefälle der betreffenden Altersstufe ausdrücken, können also als empirische Bestimmungen einer nur mäßig schwankenden Wahrscheinlichkeit p für einen männlichen Todesfall angesehen werden. Die folgende Tabelle gibt eine Probe, wie sich das Geschlechtsverhältnis der zwischen 0 und 2 Jahren Gestorbenen gestaltet. Dabei bedeutet z die Anzahl der Beobachtungsreihen, die für das betreffende Gebiet zu Gebote standen, p_0 den aus ihrer Gesamtheit abgeleiteten Wert für p, s_0 die mittlere Anzahl der beobachteten Sterbefälle, Q den Divergenzkoeffizienten.

Geschlechtsverhältnis der Gestorbenen zwischen 0 und 2 Jahren.

Gebiet	z	p_0	s_0	Q
Holland	24	0,550	41 289	1,50
Königreich Preußen	21	0,546	315 359	2,08
Provinz Preußen	21	0,542	43 699	1,46
„ Brandenburg	21	0,543	45 882	1,10
„ Schlesien	21	0,547	57 384	1,41
„ Rheinland	21	0,547	44 652	1,49
„ Pommern	21	0,543	11 872	1,20
„ Posen	21	0,546	22 362	1,06
„ Sachsen	21	0,547	28 286	1,14
„ Hannover	21	0,551	16 415	0,95
„ Westfalen	21	0,547	20 074	1,34

Die Reihe der Q bestätigt das Ergebnis der Theorie, daß bei dem Vorhandensein einer auch noch so geringen physischen Schwankung

1) Das Geschlechtsverhältnis der Überlebenden in den Kinderjahren als selbständige massenphysiologische Konstante etc. Göttingen 1900.

der Divergenzkoeffizient mit der Grundzahl wächst; denn die sechs größten Gebiete geben 1,51, die fünf übrigen Gebiete 1,14 als Mittelwert der Q.

Die selbständige Untersuchung des Geschlechtsverhältnisses der Überlebenden, nachdem das Geschlechtsverhältnis der Geborenen und jenes der Gestorbenen bereits untersucht ist, erweist sich aus folgenden Gründen als ein neues, für sich bestehendes Problem.

Es sei

m die Anzahl der geborenen Knaben,

s die Anzahl der Geborenen überhaupt;

ferner, für die Altersstufe $(0, x)$,

m_1 die Anzahl der gestorbenen Knaben,

s_1 die Anzahl der Gestorbenen überhaupt;

endlich, im Alter x,

m_2 die Anzahl der überlebenden Knaben,

s_2 die Anzahl der Überlebenden überhaupt;

dann bestehen die Relationen

$$m_2 = m - m_1$$
$$s_2 = s - s_1,$$

und es drückt sich das Geschlechtsverhältnis der Überlebenden durch den Bruch

$$\frac{m_2}{s_2} = \frac{m - m_1}{s - s_1} = \frac{\frac{m}{s} - \frac{s_1}{s}\frac{m_1}{s_1}}{1 - \frac{s_1}{s}}$$

aus, hängt also ab von dem Geschlechtsverhältnis $\frac{m}{s}$ der Geborenen, das maximale Stabilität besitzt, von dem Geschlechtsverhältnis $\frac{m_1}{s_1}$ der Gestorbenen, welchem nach den eben angeführten Daten nur angenähert maximale Stabilität zukommt, schließlich aber auch noch von dem allgemeinen Sterblichkeitsverhältnis $\frac{s_1}{s}$ auf der Altersstufe $(0, x)$, das, wie später gezeigt werden wird, von der normalen Dispersion sich weit entfernt; es kann daher aus der obigen Beziehung ein Schluß auf die Stabilität von $\frac{m_2}{s_2}$ nicht gezogen werden.

Die direkte Untersuchung dieses Verhältnisses hat nun gezeigt, daß ihm in den ersten und mittleren Kinderjahren und bei den der Beobachtung unterzogenen Bevölkerungen nahezu vollkommene Stabilität zukommt, daß es also neben dem Geschlechtsverhältnis der Ge-

nen eine massenphysiologische Konstante deutlich ausgesprochener bildet. Die Größe des Verhältnisses läßt erkennen, daß die er- iche Übersterblichkeit der Knaben gegenüber den Mädchen in den n Lebensperioden, wie sie aus der vorangegangenen Tabelle zu ıen ist, sehr rasch das Gleichgewicht beider Geschlechter herbeiführt.

In der nachstehenden Tabelle bedeutet x das Alter der Überleben- z die Anzahl der für das nebenstehende Alter gebildeten Beob- ıngsreihen, p_0 den aus allen abgeleiteten Wert des Geschlechts- ältnisses, s_0 die mittlere Grundzahl, Q den Divergenzkoeffizienten.

Geschlechtsverhältnis der Überlebenden.

Königreich Preußen				Königreich Holland				
z	p_0	s_0	Q	x	z	p_0	s_0	Q
21	0,503	846 342	0,99	1	25	0,503	117 457	1,11
21	0,503	785 978	1,04	2	24	0,503	110 271	1,06
21	0,503	753 158	1,07	3	23	0,503	106 884	1,09
20	0,503	733 928	0,97	4	22	0,502	104 795	1,12
19	0,503	717 830	1,28	5	21	0,503	102 967	1,12
18	0,503	706 283	1,03	6	20	0,502	101 660	1,16
				7	19	0,502	100 475	1,13
				8	18	0,502	99 479	1,10
				9	17	0,501	98 412	1,03
				10	16	0,501	97 347	1,06

d) Die Untersuchung der *Sterblichkeitsverhältnisse* auf den ver- ›denen Altersstufen ist ein Problem, dem neben einem hervor- nden biologischen Interesse auch eine große praktische Bedeutung las Versicherungswesen zukommt. Durch solche Untersuchungen entschieden werden, wie weit die Quotienten, die man unter dem en der Sterblichkeitswahrscheinlichkeiten in den einzelnen Alters- n anführt und gebraucht, den Charakter von Wahrscheinlichkeiten zen und demgemäß nach den Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrech- behandelt werden dürfen.

Über diesen Gegenstand liegen gegenwärtig erst wenige Arbeiten vor. Auf Grund *bevölkerungsstatistischer* Erhebungen wurde die Sterblich- der allgemeinen männlichen Bevölkerung der Niederlande auf ihre ilität durch J. H. Peek[1]) untersucht. Unter Leitung van Peschs ist für jedes der zehn Beobachtungsjahre 1880—1889 für jede ein- ige Altersklasse der Sterblichkeitsquotient (Anzahl der in der rsklasse Gestorbenen durch die Anzahl derjenigen, welche ihre re Grenze lebend überschritten haben) berechnet worden; dadurch die Möglichkeit geboten, die Dispersion der zehn für jede Alters-

1) Das Problem des Risiko in der Lebensversicherung. Zeitschr. f. Ver- rungsrecht und -Wissensch. V, 1899, p. 169—197.

klasse gewonnenen Quotienten zu prüfen; zu ihrer Charakterisierung wurde aus den auf die beiden Arten bestimmten mittleren Fehlern

$$\mu'' = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}, \quad \mu' = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{s_0}}$$

der Divergenzkoeffizient $Q = \frac{\mu''}{\mu'}$ gebildet. Dabei bedeutet p_0 das Mittel aus den zehn Einzelwerten, s_0 die durchschnittliche Zahl der Lebenden am Beginne der Altersklasse, $\lambda_i = -\frac{m_i}{s_i} + p_0$ die Abweichung des Einzelwertes vom Mittel.

Das Ergebnis, in allgemeinen Zügen dargestellt, war folgendes. In den ersten neun Lebensjahren ist die Dispersion übernormal mit von Jahr zu Jahr abnehmender Amplitude, die Sterblichkeit also mit den äußeren Umständen schwankend. Vom 10. Lebensjahre an oscilliert Q in nicht weiten Grenzen um die Einheit, ist 55-mal *über*, 26-mal *unter* 1; das Mittel der Einzelwerte von Q ist

für die Alter 10—47 . . . 1,163
„ „ „ 48—90 . . . 1,127
„ „ „ 10—90 . . . 1,144.

Man kann also sagen, daß mit Ausschluß der ersten und mittleren Kinderjahre die Sterblichkeitsquotienten eine nur wenig von der normalen abweichende (schwach übernormale) Dispersion aufweisen und daher, wenn es sich nicht um lange Zeiträume handelt, ganz wohl als Wahrscheinlichkeiten angesehen und behandelt werden dürfen. Auch die Verteilung der Einzelwerte um den jeweiligen Mittelwert spricht dafür; bezeichnet r die wahrscheinliche Abweichung, so zeigte sich bezüglich der $10 \cdot 91 = 910$ Einzelwerte von λ das folgende:

Abweichung λ	Theoretische Anzahl	Beobachtete Anzahl
von 0 bis $\frac{r}{2}$	241	224
„ $\frac{r}{2}$ „ r	215	208
„ r „ $\frac{3r}{2}$	172	189
„ $\frac{3r}{2}$ „ $2r$	121	137
„ $2r$ „ $\frac{5r}{2}$	80	93
über $\frac{5r}{2}$	81	59
	910	910

Normale Dispersion in sehr guter Annäherung wurde von de[m] selben Autor auch an den Sterblichkeitsquotienten nachgewiesen,

ıs der Statistik der niederländischen Beamten (1878—1894) zur Konruktion der ersten Beamtensterbetafel für die Niederlande abgeleitet orden sind. Hier handelt es sich also um eine Gesellschaft, die ver.öge der Homogenität, die sie in manchen Beziehungen aufweist, dem estande einer Versicherungsanstalt nahe kommt. Bei Trennung der eobachtungsjahre und Bildung von Altersgruppen ergaben sich 92 Einzelwerte und der Mittelwert der berechneten Divergenzkoeffiienten betrug 0,99.

Aus Beobachtungen an *Versicherten* wurde die normale Dispersion, lso die maximale Stabilität der Sterblichkeitsquotienten, an zwei peziellen Fällen (Gotha 1869—1880, Leipzig 1880—1894) von . Bohlmann[1]) dargetan. Für die fünfjährigen Altersklassen von bis 90 ergaben sich die Divergenzkoeffizienten

3, 0,8, 1,3, 0,9, 0,9, 0,8, 1,2, 1,0, 1,0, 1,1, 1,2, 1,1, 1,1

s den Gothaer Beobachtungen, und für die fünfjährigen Altersklassen n $21\frac{1}{2}$ bis $80\frac{1}{2}$ die Divergenzkoeffizienten

0,9, 1,0, 1,8, 1,5, 1,1, 0,8, 1,2, 1,1, 0,9, 0,9, 1,0, 1,1

s den Leipziger Beobachtungen.

173. Extensive statistische Größen. Zur Beschreibung enschlicher Massenerscheinungen werden außer den bisher betrachten Relativzahlen, die als *intensive* statistische Größen bezeichnet wern könnten, weil sie die Intensität des Auftretens, die Häufigkeit ner Erscheinung kennzeichnen, auch *extensive* Größen verwendet, die urch benannte Zahlen zum Ausdruck kommen. Insbesondere sind es eiträume, welche die Dauer eines Zustandes oder den Abstand zweier ustandsänderungen messen und teils von biologischem, teils auch n soziologischem und wirtschaftlichem Interesse sind. Als Beispiele ögen angeführt werden: die Lebensdauer der Individuen einer bereits gestorbenen Gesamtheit; die bereits durchlebte Zeit der Individuen ner lebenden Gesamtheit; das Alter der in den Ehestand tretenden ännlichen und weiblichen Individuen; die Dauer der Ehen; die Dauer er Aktivität von Personen einer bestimmten Berufskategorie; die rankheitsdauer auf verschiedenen Altersstufen u. s. w.

Eine solche Größe kommt nun an den Individuen einer unter.chten Masse mit verschiedenen Werten zur Beobachtung und es enteht zunächst die Frage, welcher Wert derselben zur Charakterisieng der ganzen Masse verwendet werden soll. Wie dieser auch wählt werden mag, einen völligen Aufschluß darüber, wie die beffende Größe in der Masse in die Erscheinung tritt, wird er nicht en. Dazu ist vielmehr eine Untersuchung darüber nötig, in welcher

1) Über angewandte Mathematik etc. Leipzig 1900, p. 142.

Verteilung die beobachteten Einzelwerte auftreten und sich um den *einen* Wert, den man als *Hauptwert* herausgegriffen, gruppieren. Eine *zusammenfassende* Beschreibung dieser Verteilung, d. h. eine solche, die ein Zurückgehen auf die Einzelwerte, deren Register ja immer die vollständigste Beschreibung darstellt, entbehrlich macht, ist nur dann denkbar, wenn ein von Zeit und Ort unabhängiges Gesetz der Verteilung sich ausfindig machen läßt, in dessen mathematischem Ausdruck nur eine beschränkte Anzahl von Parametern auftritt; die Werte dieser Parameter, die sich aus den Beobachtungen an einer Masse ergeben, bilden dann die zusammenfassende Beschreibung derselben bezüglich der in Betracht stehenden Größe.

Vornehmlich interessiert die Frage, ob die Verteilung der Einzelwerte eine derartige sei, daß ihre Abweichungen von dem gewählten Hauptwerte das Gaußsche Gesetz befolgen; ist dem so, dann dürfen die Einzelwerte als *zufällig* gestörte Spezialisierungen eines *Grundwertes* der betreffenden extensiven Größe angesehen werden, für welchen der gewählte Hauptwert eine empirische Bestimmung bildet; ihre Verteilung läßt sich in solchem Falle durch eine einzige Zahl, das *Präzisionsmaß*, charakterisieren.

Was nun den aus einer Masse von Einzelwerten zu bildenden Hauptwert anlangt, so wird hierfür zumeist das *arithmetische Mittel* genommen und kurz als durchschnittlicher oder Mittelwert der zugrunde liegenden Größe bezeichnet. Außer ihm bieten sich durch hervorragende Eigenschaften der *Zentralwert* und der *dichteste Wert* oder das Dichtigkeitsmittel dar. Der erstere wird so genannt, weil er in der Reihe der nach ihrer Größenfolge geordneten Spezialwerte die mittelste Stellung einnimmt; da infolgedessen die Wahrscheinlichkeit, ein beliebig herausgegriffener Einzelwert liege unter ihm, ebenso groß ist wie die Wahrscheinlichkeit, er liege über ihm, so wird der Zentralwert auch der wahrscheinliche Wert des Grundwertes genannt. Der dichteste Wert liegt in der in gleicher Weise geordneten Reihe der Einzelwerte an einer *Häufungsstelle*, so daß die Wahrscheinlichkeit, ein beliebiger Einzelwert gehöre einer Wertstrecke an, die jenen enthält, größer ist als für jede andere Wertstrecke von gleicher Ausdehnung[1]).

1) In allgemeinster Auffassung hat G. Th. Fechner extensive Größen in dem hier angedeuteten Sinne zum Gegenstande des Studiums gemacht und unter dem Namen „Kollektivmaßlehre" eine eigene Disziplin begründet, die sich gleicherweise in den Dienst der Statistik wie der Anthropologie, der Zoologie, Botanik, Meteorologie, ja selbst der Artistik stellt, kurz, überall dort Verwendung finden kann, wo der Begriff des „Kollektivgegenstandes" Geltung hat. Hierunter wird jeder Gegenstand verstanden, „der aus unbestimmt vielen nach Zufall variierenden Exemplaren besteht, die durch einen Art- oder Gattungsbegriff zusammengehalten werden". Vgl. Kollektivmaßlehre von G. Th. Fechner. Herausgegeben von G. F. Lipps. Leipzig 1897.

Ein Hauptwert, der Abweichungen der Einzelwerte zur Folge hat, dem Gaußschen Gesetz folgen, zeichnet sich dadurch aus, daß er Eigenschaften der drei eben genannten, des arithmetischen Mittels, Zentralwertes und des dichtesten Wertes in sich vereinigt; Lexis[1]) einen solchen als *typisches Mittel* bezeichnet. Die Erkenntnis der deutung dieses Mittels auf dem Gebiete der Statistik und seine chweisung in einigen menschlichen Massenerscheinungen ist ein rdienst A. Quetelets[2]).

174. Feststellung eines typischen Mittels. Bei der Entleidung der Frage, ob man anzunehmen berechtigt sei, daß einer ensiven Größe, die an den Individuen einer großen menschlichen sse beobachtet worden ist, ein typischer Wert zugrunde liege, von lchem die Einzelwerte nur infolge zufälliger Störungen abweichen, mmt es darauf an, in welcher Form das Beobachtungsmaterial geen ist.

Die eine Form besteht darin, daß man die Reihe der Einzelwerte bst kennt, die andere, daß ihre Gruppierung in der Weise gegeben, daß für eine Folge von Intervallen die Anzahl der in sie fallen-Einzelwerte zur Verfügung steht.

Wir beginnen mit dem detaillierteren Modus und nehmen an, $a_2, \cdots a_n$ seien die n Einzelwerte der unbekannten Größe X. Da typisches Mittel arithmetisches Mittel, Zentralwert und dichtester ert zugleich ist, so wird man von diesen drei Hauptwerten jenen hlen, der die einfachste Bestimmung zuläßt; dies ist das arithmetische ttel und es sei

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}. \tag{1}$$

e Frage, ob x mit zureichender Sicherheit als ein typisches Mittel trachtet werden dürfe, kommt darauf zurück, ob sich $a_1, a_2, \cdots a_n$ gleich genaue, nur von zufälligen Fehlern beeinflußte Beobachtungen ier festen Größe auffassen lassen. Um dies zu entscheiden, bilde n die Reihe der Abweichungen

$$\lambda_i = -a_i + x \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{2}$$

d wenn diese die Forderung der symmetrischen Anordnung um all in zureichendem Maße erfüllt, dann kommt es zur Prüfung des mstandes, ob sie sich dem Gaußschen Gesetze

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\lambda^2}$$

nügend anschmiegt; die *Präzision* h wäre dabei aus der Formel

$$h = \sqrt{\frac{n}{2[\lambda\lambda]}} \tag{3}$$

1) Zur Theorie der Massenerscheinungen, p. 28. 2) Anthropométrie.

zu berechnen[1]). Man hat nun für verschiedene Intervalle $(-\theta, \theta)$ zu untersuchen, ob die Anzahl der darin enthaltenen λ mit der wahrscheinlichsten Zahl

$$n\Phi(\gamma) = \frac{2n}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2}dt \tag{4}$$

übereinstimmt; darin ist $\gamma = h\theta$. Auf volle Übereinstimmung ist dabei nicht zu rechnen; das Gesamtbild, das die für eine Anzahl von Intervallen abgeleiteten Resultate darbieten, muß darüber Aufschluß geben, ob man von einer zureichenden Anpassung an das Gesetz sprechen kann.

Eine Probe kann auch darin bestehen, daß man aus der Reihe der a_i neben dem arithmetischen Mittel auch den Zentralwert ableitet. Zu diesem Zwecke sind die a_i in steigender Folge zu ordnen, wobei gleiche a_i so oft gesetzt werden müssen, als ihrem wiederholten Auftreten entspricht; das mittelste a_i (bei ungerader Anzahl) oder ein Zwischenwert, etwa das Mittel, der beiden mittelsten (bei gerader Anzahl) gibt eine Bestimmung des Zentralwertes. Dieser darf sich nun über gewisse, durch die Natur der Sache bedingte Grenzen von dem arithmetischen Mittel nicht unterscheiden, soll von der Existenz eines typischen Mittels die Rede sein dürfen.

Anders gestaltet sich die Untersuchung, wenn bloß eine nach Intervallen geordnete Tabelle von Zahlen gegeben ist, die angeben, wie vielmal der beobachtete Wert von X in jedes einzelne Intervall zu liegen kam. Es sei

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \cdots \quad \alpha_{n-1} \tag{5}$$

diese Reihe von Zahlen, wobei α_0 die Einzelwerte zählt, die zwischen a_0 und $a_0 + \delta = a_1$; α_1 die Einzelwerte, die zwischen a_1 und $a_1 + \delta = a_2$, $\cdots$; α_{n-1} die Einzelwerte, die zwischen a_{n-1} und $a_{n-1} + \delta = a_n$ gefallen sind. Das Intervall (a_0, a_1) enthält somit den kleinsten, jenes (a_{n-1}, a_n) den größten zur Wahrnehmung gelangten Wert von X; δ ist die Intervallgröße.

In dem Intervall, welchem das größte α entspricht, und wir nehmen an, daß nur *ein* solches existiere, ist der dichteste Wert zu suchen, der zugleich eine Bestimmung von X liefert. Seine Lage in dem Intervall näher zu bestimmen, ist Aufgabe einer Interpolation, auf die hier nicht eingegangen werden soll[2]). Es sei also α_g die

---

1) Die Präzision mit Bezug auf den wahren Wert X wäre $h_1 = \sqrt{\frac{n-1}{2[\lambda\lambda]}}$; in Ermangelung der Kenntnis desselben und der wahren Abweichungen $\varepsilon_i = -a_i + X$ wird die Untersuchung an der Reihe der λ vorgenommen und dieser kommt nach Nr. 136 die Präzision $h = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\, h = \sqrt{\frac{n}{2[\lambda\lambda]}}$ zu.

2) S. Nr. 175.

größte der Zahlen (5) und $a_g + \vartheta\delta$ der dichteste Wert $(0 < \vartheta < 1)$; auch sei α_g bereits in die beiden Teile α_g', α_g'' aufgeteilt, von denen der erste dem Intervallteil $(a_g, a_g + \vartheta\delta)$, der zweite dem Intervallteil $(a_g + \vartheta\delta, a_{g+1})$ angehört.

Bildet man nun (für ein $i < g$) die Summen

$$\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{g-1} + \alpha_g' = \sigma,$$
$$\alpha_0 + \alpha_1 \quad + \cdots + \alpha_{g-1} + \alpha_g' = \Sigma,$$

so ist $\frac{\sigma}{\Sigma} = P$ ein empirischer Wert für die Wahrscheinlichkeit, daß die Abweichung λ zwischen $-(a_g + \vartheta\delta - a_i) = -\theta$ und $+\theta$ falle; dem zugrunde gelegten Gesetze zufolge ist diese Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\theta} e^{-t^2} dt; \tag{6}$$

aus dieser Gleichung, in der P und θ bekannt sind, bestimmt man mit Hilfe der Tafel I die Präzision h.

Eine Probe auf die Giltigkeit jenes Gesetzes würde darin bestehen, daß man die Präzision auf mehrfache Art, diesseits und jenseits des dichtesten Wertes bestimmt[1]); genügende Übereinstimmung der erhaltenen Werte spricht für die Giltigkeit. Eine andere Prüfungsmethode besteht darin, daß man mit Benützung des aus (6) gefundenen h die wirkliche Verteilung der λ mit der erwartungsmäßigen vergleicht, wie dies vorhin geschah; nur hat man sich jetzt an die Intervallgrenzen zu halten.

175. Beispiel LXVII. Lexis[2]) ist durch nähere Betrachtung der Sterblichkeitsverhältnisse und durch die Wahrnehmung, daß die Sterbetafeln allgemein in der Nähe des 70. Lebensjahres eine relative Häufung der Sterbefälle ausweisen, zu der Frage geführt worden, ob der so auftretende *dichteste Wert der Lebensdauer* wenigstens mit gewissen Einschränkungen die Merkmale eines typischen Mittels aufweise. Zur strengen Beantwortung dieser Frage wäre eine kontinuierliche Beobachtung der Individuen einer zahlreichen Generation (etwa der Geborenen eines Landes aus einem Kalenderjahre) bis zu ihrem

1) Fechner, l. c., p. 69 u. 271, behandelt auch den bei Kollektivgegenständen auftretenden Fall, daß die Verteilung um den dichtesten Wert Asymmetrie zeigt, und zwar eine solche, die vermöge ihres Grades, ihres beständigen Auftretens nicht mehr als eine zufällige Störung der Symmetrie, sondern als *wesentlich* aufgefaßt werden muß. Er wendet auf diesen Fall eine Verallgemeinerung des Gaußschen Gesetzes an, die er als „zweiseitiges Gaußsches Gesetz" bezeichnet; ihr Wesen besteht darin, daß zu beiden Seiten des dichtesten Wertes mit verschiedener Präzision gerechnet wird. Von einem typischen Mittel kann dann nicht mehr gesprochen werden.

2) Zur Theorie der Massenerscheinungen, p. 42—64.

Aussterben erforderlich; so weit Sterbetafeln eine angenäherte Lösung zulassen, hat Lexis gefunden, daß tatsächlich zu beiden Seiten des dichtesten Wertes, und zwar nach der Seite der niedrigeren Sterbealter nur bis zu einer gewissen Grenze, nach der Seite der höheren Alter aber bis zu dem höchsten Alter hin die Merkmale des typischen Mittel in ziemlich deutlicher Weise vorhanden sind. Dies führte ihn zu den Begriffen der „normalen Lebensdauer“ und des „normalen oder typischen Sterbens“, welch letzteres nach der Seite der niedrigen Alter allerdings recht bald durch ein „vorzeitiges Sterben“ verwischt wird.

Wir wollen als Beispiel der Untersuchung auf einen typischen Mittelwert und zur Beleuchtung der erwähnten Verhältnisse die Reihen der Zahlen der Gestorbenen in den einzelnen Altersklassen vornehmen, wie sie die „Deutsche Sterbetafel“ für das männliche und weibliche Geschlecht angibt[1]). Sie lauten, zunächst nur an der hier maßgebenden Stelle:

Alter	Anzahl der Sterbefälle	
	Männlich	Weiblich
66	1396	1531
67	1417	1568
68	1431	1597
69	1439	1620
70	**1440**	1636
71	1430	1648
72	1412	**1657**
73	1383	1653
74	1342	1630
75	1289	1587

Hieraus folgt, daß ein dichtester Wert der Lebensdauer bei dem männlichen Geschlecht zwischen 70 und 71, bei dem weiblichen zwischen 72 und 73 Jahre fällt. Um ihn näher zu bestimmen, stellen wir uns vor, das Sterben sei ein kontinuierlicher Vorgang, geregelt nach der Funktion $f(x)$ des Alters x in dem Sinne, daß das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$$

die Menge der Sterbefälle zwischen den Altern x_0 und x_1 bedeutet. Nimmt man für den engen Umkreis von drei aufeinander folgenden Jahren

$$f(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$$

1) Monatshefte zur Statistik d. Deutschen Reiches. 1887. — Man vergleiche Nr. 190 und Tafel II am Ende des Buches.

an, so ergibt sich, nachdem man die Koeffizienten bestimmt hat, der dichteste Wert von x aus der Gleichung

$$f'(x_0) = 6\alpha x_0 + 2\beta = 0.$$

Behufs Durchführung der Rechnung bezeichne man die größte Zahl aus der Reihe mit d_0, die ihr nachfolgende mit d_1, die vorangehende mit d_{-1} und benütze das neben der letzteren stehende Alter als Nullpunkt der Zählung; dann ergeben sich zur Bestimmung von α, β, γ die Gleichungen:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \alpha + \beta + \gamma = d_{-1}$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = 7\alpha + 3\beta + \gamma = d_0$$

$$\int_2^3 f(x)\,dx = 19\alpha + 5\beta + \gamma = d_1;$$

wird weiter

$$d_0 - d_{-1} = \Delta_{-1}, \quad d_0 - d_1 = \Delta_1$$

gesetzt, so findet man:

$$\alpha = -\frac{\Delta_{-1} + \Delta_1}{6}, \quad \beta = \frac{2\Delta_{-1} + \Delta_1}{2}, \quad \gamma = d_{-1} - \frac{5\Delta_{-1} + 2\Delta_1}{6},$$

$$x_0 = 1 + \frac{\Delta_{-1}}{\Delta_{-1} + \Delta_1}.$$

Hiernach ist für das männliche Geschlecht, wo $d_{-1} = 1439$, $\Delta_{-1} = 1$, $\Delta_1 = 10$ ist, $x_0 = 1 + \frac{1}{11}$, somit 70,1 Jahre die dichteste Lebensdauer, ferner $\alpha = -1{,}833$, $\beta = 6$, $\gamma = 1435$; für das weibliche Geschlecht, wo $d_{-1} = 1648$, $\Delta_{-1} = 9$, $\Delta_1 = 4$ ist, $x_0 = 1 + \frac{9}{13}$, also 72,7 Jahre die dichteste Lebensdauer, ferner $\alpha = -2{,}17$, $\beta = 11$, $\gamma = 1639$.

Die größte Zahl teilt sich hiernach bei dem männlichen Geschlechte in

$$\int_1^{1,1} f(x)\,dx = 144 \text{ Sterbefälle vor } x_0 \text{ und } 1296 \text{ nach } x_0,$$

bei dem weiblichen Geschlechte in

$$\int_1^{1,7} f(x)\,dx = 1121 \text{ Sterbefälle vor } x_0 \text{ und } 536 \text{ nach } x_0.$$

Nun kann an die Ermittelung der Präzision geschritten werden; bei dieser ist nur der über dem dichtesten Sterbealter liegende Teil der Tafel zu verwenden, wie dies aus den eingangs gemachten Bemerkungen hervorgeht.

Bei dem männlichen Geschlechte weist die Tafel zwischen dem Alter 70,1 und dem vollendeten 79. Lebensjahre, bei einer Altersdifferenz von 8,9 Jahren,

$$1296 + 1430 + 1412 + \cdots + 1067 = 11596 \text{ Sterbefälle}$$

auf, während die Zahl aller Sterbefälle über 70,1

$$1296 + 1430 + \cdots + 1,0 = 17\,605$$

beträgt; hieraus ergibt sich für die Grenzen $-8,9$ bis $+8,9$ der Abweichung vom dichtesten Werte die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{11\,596}{17\,605} = 0,65867 = \Phi(\gamma),$$

zu der sich aus Tafel I das zugehörige γ findet:

$$\gamma = 0,67287;$$

demnach ist

$$h = \frac{0,67287}{8,9} = 0,0756.$$

Eine mit dem Altersintervall von 72,7 bis zum vollendeten 83. durchgeführte Rechnung gibt für das weibliche Geschlecht

$$h = 0,0866.$$

Die Prüfung der Verteilung der Sterbefälle an der dem Gaußschen Gesetze entsprechenden ergibt nun das folgende Resultat:

Männliches Geschlecht			Weibliches Geschlecht		
Altersintervall	Gestorbene nach der Theorie	Gestorbene nach der Sterbetafel	Altersintervall	Gestorbene nach der Theorie	Gestorbene nach der Sterbetafel
56—59	1810	3248	62—67	5155	7157
59—62	2667	3566	67—70	4471	4785
62—65	3507	3906	70—72,7	4507	4405
65—68	4172	4182	72,7—78	8444	8335
68—70,1	3131	3014	78—83	5396	5517
70,1—73	4284	4138	83—88	2552	2679
73—76	4021	4014	88—93	839	793
76—79	3292	3444	93—98	191	131
79—82	2432	2632	über 98	34	10
82—85	1615	1743			
85—88	980	969			
88—91	533	441			
91—94	260	164			
94—97	116	48			
97—101	54	12			

Der Anschluß der Tafelwerte an die theoretischen ist oberhalb des dichtesten Sterbealters ein unverkennbarer und er hält auch auf eine kurze Strecke in den niedrigeren Altern an, so daß mit dieser Einschränkung von den Merkmalen eines typischen Mittels gesprochen werden kann[1]).

176. Ausdehnung des Dispersionsbegriffes auf extensive Größen[2]). Wenn über eine und dieselbe extensive Größe mehrere, zeitlich oder örtlich verschiedene Beobachtungsreihen und die aus diesen für jene Größe abgeleiteten Hauptwerte vorliegen, so stellt sich die wichtige Frage ein, ob diese Hauptwerte ihrerseits als zufällig gestörte Modifikationen eines einzigen Grundwertes angesehen werden können oder nicht; sollte die Antwort entschieden in letzterem Sinne ausfallen, so wäre dies ein Anhalt für die Annahme, daß die in Rede stehende Größe zeitlichen, respektive örtlichen wesentlichen Schwankungen unterworfen sei.

Angenommen, es lägen z Reihen von je n Einzelwerten einer extensiven Größe X vor:

$$\begin{array}{llll} a_1, & a_2, & \cdots & a_n \\ a_{n+1}, & a_{n+2}, & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{(n-1)z+1}, & a_{(n-1)z+2}, & \cdots & a_{zn}; \end{array} \qquad (1)$$

stellen wir uns auf den Standpunkt, X habe für alle Reihen denselben typischen Wert, für welchen die erste Reihe in ihrem arithmetischen Mittel die Bestimmung x_1, die zweite Reihe die Bestimmung $x_2, \cdots$, die letzte Reihe die Bestimmung x_z ergab, so folgt aus dem ganzen Beobachtungsmaterial die Bestimmung:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_z}{z}, \qquad (2)$$

zugleich das arithmetische Mittel aller als gleich genau erachteten a.

Die Präzision von x läßt nun zwei Berechnungsweisen zu, die in ihren Resultaten bis auf die Unsicherheit, die in der Natur der Sache liegt, übereinstimmen müßten, wenn die gemachten Voraussetzungen zutreffend wären. Einmal ergibt sich für x, wenn man es als Mittel der a auffaßt und

$$\lambda_i = -a_i + x \qquad (i = 1, 2, \ldots zn)$$

setzt, die Präzision

$$h' = \sqrt{\frac{zn(zn-1)}{2[\lambda\lambda]}}; \qquad (3)$$

1) Nur scheinbar ist die Übereinstimmung in der obigen Tabelle geringer als in den vielen von Lexis a. a. O. gerechneten Beispielen. Diesen liegen nämlich Sterbetafeln mit kleiner Grundzahl (1000) zugrunde.

2) Vgl. L. v. Bortkewitsch, Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik. Jahrb. f. Nationalök. u. Statist. (3), X (1895), p. 342 ff.

auf der andern Seite, wenn man x als Mittel der x_i ansieht und

$$A_i = -x_i + x$$ ($i = 1, 2, \ldots$ [redacted] z)

setzt, hat man dafür die Präzision

$$h'' = \sqrt{\frac{z(z-1)}{2[AA]}}.$$ ([redacted] 4)

Das Merkmal für *normale Dispersion* der Werte x_i und somit f[redacted]ür das Vorhandensein eines gemeinsamen Grundwertes, von dem d[redacted]ie Einzelwerte nur zufällig abweichen, wäre das wenigstens sehr ang[redacted]genäherte Bestehen der Relation

$$h' = h'' \quad \text{oder} \quad Q = \frac{h'}{h''} = 1.$$

Wenn dagegen der Grundwert von Reihe zu Reihe ein ander[redacted]er ist, so kommen in den x_i nicht allein die zufälligen Schwankung[redacted]en der a_i um den jeweiligen Grundwert, sondern auch die wesentlich[redacted]en Schwankungen des Grundwertes selbst zum Ausdruck; dies hat ei[redacted]ne Vergrößerung von $[AA]$, daher eine Verkleinerung von h'' zur Fol[redacted]ge; dieser Fall, der der *übernormalen Dispersion* der x_i entspricht, ist also durch

$$h' = h'' \quad \text{oder} \quad Q = \frac{h'}{h''} > 1$$

gekennzeichnet.

Dieser Gedankengang entspricht völlig demjenigen, der bei Unt[redacted]ersuchung von Relativgrößen befolgt worden ist, und es läßt sich a[redacted]ch zeigen, daß h' der dort auf kombinatorischem Wege bestimmten P[redacted]räzision adäquat ist. Stellt man sich nämlich vor, an die Stelle von X träte die unbekannte konstante Wahrscheinlichkeit p eines Er[redacted]gnisses E, für die aus zn Versuchen der Wert p_0 ermittelt worden wä[redacted]e; so heißt dies, daß E im ganzen znp_0-mal eingetroffen, $zn(1-p_0)$-[redacted]al ausgeblieben ist; so oft E eintraf, hat man für p den Wert 1 be[redacted]bachtet, war also $\lambda = 1 - p_0$; so oft es ausblieb, hat man für p d[redacted]en Wert 0 beobachtet und betrug die Abweichung $-p_0$; infolgedes[redacted]en ist also

$$[\lambda\lambda] = znp_0(1-p_0)^2 + zn(1-p_0)p_0^2 = znp_0(1-p_0).$$

Setzt man diesen Wert in (3) ein, so wird

$$h' = \sqrt{\frac{zn-1}{2p_0(1-p_0)}},$$

und dies entspricht [vgl. Nr. 168, Gl. (5) u. (4)] der „kombinatorischen[redacted]“ Präzision aus zn Beobachtungen.

II. Abschnitt. Sterblichkeitsmessung.

§ 1. Sterblichkeitsmaße.

177. Sterbens- und Lebenswahrscheinlichkeit. Wir stellen s zunächst auf den ideellen Standpunkt, es sei möglich, eine große zahl l_0 *gleichzeitig* Geborener in Evidenz zu halten und zu beobnten bis zu ihrem völligen Absterben. Da eine kontinuierliche Beachtung, die sich auf die jeweilige *Menge* der Personen zu beziehen tte, praktisch unausführbar ist, so beschränke man sich darauf, tzustellen, wie viele von den l_0 das Alter von $1, 2, \cdots x, x+1,$ $\omega - 1$ Jahren vollendet haben, wobei vorausgesetzt wird, daß ne der Personen das Alter ω erreicht habe. Dieses Ziel kann darch erreicht werden, daß man in den Zeitpunkten

$$\tau_1 = t + 1, \quad \tau_2 = t + 2, \quad \cdots \quad \tau_x = t + x,$$
$$\tau_{x+1} = t + x + 1, \quad \cdots \quad \tau_{\omega-1} = t + \omega - 1,$$

ntlich in Jahren ausgedrückt, wobei t den Zeitpunkt der Geburt deutet, zählt, wie viele der Personen am Leben sind; die so erltenen Zahlen, mit der ursprünglichen l_0 zusammengestellt, bilden (niemals steigende) Reihe der successive *Überlebenden:*

$$l_0, \quad l_1, \quad \cdots \quad l_x, \quad l_{x+1}, \quad \cdots \quad l_{\omega-1}. \tag{1}$$

steht nichts im Wege, auch die Anzahl der Überlebenden in einem rischenalter $x + \Delta x$, wo $\Delta x < 1$, festzustellen; sie heiße $l_{x+\Delta x}$.

Man kann zu der Reihe (1) auch durch Zählung der Sterbefälle langen, die sich im Laufe der Jahre

$$(t, \tau_1), \quad (\tau_1, \tau_2), \quad \cdots \quad (\tau_x, \tau_{x+1}), \quad \cdots \quad (\tau_{\omega-1}, \tau_\omega)$$

getragen haben; ihre Anzahlen seien

$$d_0, \quad d_1, \quad \cdots \quad d_x, \quad \cdots \quad d_{\omega-1}. \tag{2}$$

bestehen nämlich die Beziehungen

$$\begin{aligned} l_1 &= l_0 - d_0 \\ l_2 &= l_1 - d_1 \\ &\cdots\cdots \\ l_{x+1} &= l_x - d_x \\ &\cdots\cdots\cdots \\ l_{\omega-1} &= l_{\omega-2} - d_{\omega-2} \\ 0 &= l_{\omega-1} - d_{\omega-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Durch Summierung der Gleichungen von l_{x+1} abwärts ergibt sich $0 = l_x - \sum d_x$, woraus

$$l_x = \sum d_x, \tag{4}$$

wobei sich die Summenbildung auf alle Zahlen von d_x an bis zum Schluß der Reihe bezieht.

Die allgemeine Relation zwischen den Überlebenden und den Gestorbenen lautet:

$$d_x = l_x - l_{x+1}. \tag{5}$$

Der Verlauf der Reihen (1) und (2) muß als abhängig von der *Geburtszeit t* erachtet werden, weil ja die zu verschiedenen Zeiten (an demselben Orte, in derselben Bevölkerung) Geborenen unter verschiedenen äußeren Verhältnissen existierend in verschiedener Weise absterben werden. Er wird auch davon abhängen, ob man die beiden Geschlechter vereint oder getrennt beobachtet und somit besondere Reihen (1), (2) für jedes *Geschlecht* feststellt.

Hätte eine vorausgehende Untersuchung gezeigt, daß die für Personen aus verschiedenen Geburtszeiten bestimmten Verhältniszahlen $\frac{d_x}{l_x}$ normale Dispersion aufweisen (vgl. Nr. 172, d), so wäre

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \tag{6}$$

als eine empirische, und zwar als die der wahrscheinlichsten Hypothese (Nr. 94) entspringende Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit anzusehen, nämlich der Wahrscheinlichkeit, daß eine Person, welche das Alter x erreicht hat, vor Erreichung des Alters $x + 1$ sterben werde. Man nennt sie die *Sterbenswahrscheinlichkeit* zum Alter x.

Ihr Komplement:

$$p_x = 1 - q_x = \frac{l_x - d_x}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \tag{7}$$

hätte dann in demselben Sinne die Bedeutung einer Wahrscheinlichkeit, nämlich der, daß eine Person, welche das Alter x erreicht hat, auch das Alter $x + 1$ vollenden werde; man nennt sie die *Lebenswahrscheinlichkeit* zum Alter x.

Jede der Reihen:

$$q_0,\ q_1,\ \cdots\ q_x,\ \cdots\ q_{\omega-1}\ (=1) \tag{8}$$

$$p_0,\ p_1,\ \cdots\ p_x,\ \cdots\ p_{\omega-1}\ (=0) \tag{9}$$

ist ebenso wie die Reihen (1), (2) geeignet, den *Verlauf des Sterbens* darzustellen; es lassen sich in der Tat die Reihen (1), (2) aus jenen (8), (9) mittels der Relationen (6), (7) und des bekannten l_0 ableiten.

178. Sterblichkeitsintensität, Sterblichkeitskoeffizient und zentrales Sterblichkeitsverhältnis. Um die Raschheit des

oder die *Sterblichkeitskraft* in irgend einem Alter zu messen, drei Größen gleichzeitig in Betracht zu ziehen: 1) die der Personen des betreffenden Alters, die am Leben sind; enge der Todesfälle bis zu einem höheren Alter $x + \Delta x$, $l_{x+\Delta x} = - \Delta l_x$; 3) die Größe der Altersdifferenz Δx. Und berechtigt sein, die Sterblichkeitskraft für um so größer zu je größer $- \Delta l_x$ bei demselben l_x und Δx, und je kleiner x bei demselben $- \Delta l_x$ sind; hiernach bildet der Ausdruck

$$- \frac{\Delta l_x}{l_x \Delta x} \tag{10}$$

der Sterblichkeitskraft bei dem Alter x, und zwar ein um so eres, je kleiner das als *konstant* festzusetzende Δx angewird.

Verkleinerung des Δx ist aber durch die Menge der beob- Personen eine Grenze gesetzt. Denn würde Δx so klein ge- daß auf manchen Altersstufen $(x, x + \Delta x)$ kein Todesfall so ergäbe sich bei solchen Altern die Sterblichkeitskraft Null, Vorstellung von dieser Größe widerspricht.

vohl die Verminderung der ursprünglichen l_0 Personen durch unstetig, in diskreten Zeitpunkten vor sich geht, kann man unter l_x eine *stetige* (und differentiierbare) Funktion des vorstellen, die bei ganzzahligen x die Werte (1) besitzt und o brauchbareres Bild der allmählichen Abnahme bietet, je ist; der einem *beliebigen* x entsprechende Wert l_x kann etwa inne die Zahl der Überlebenden bedeuten, als die ihm nächst- ganze Zahl sie angibt. Dadurch erlangt man den Vorteil, den Vorgang des Absterbens die Hilfsmittel der Analysis r werden.

lieser Vorstellung festhaltend, bezeichnet man den Grenzwert enten (10) für $\lim \Delta x = 0$ als die *Sterblichkeitsintensität* bei r x; wird sie mit μ_x bezeichnet, so ist

$$\mu_x = - \frac{1}{l_x} \frac{d l_x}{dx}. \tag{11}$$

wirklich als Funktion von x analytisch dargestellt, so kann er Formel μ_x für *jedes* Alter bestimmt werden.

(11) ergibt sich durch Integration zwischen den Grenzen x l:

$$\text{Log} \frac{l_{x+1}}{l_x} = - \int_x^{x+1} \mu_x dx,$$

$$p_x = e^{-\int_x^{x+1} \mu_x dx}. \tag{12}$$

Diese Formel gestattet, aus der bekannten analytisch dargestellten Sterblichkeitsintensität die Lebenswahrscheinlichkeit für jedes Alter zu bestimmen.

Denkt man sich die Funktion l_x durch die zu den Abscissen x gehörigen Ordinaten einer Kurve, der *Kurve der Überlebenden*, dargestellt, so bedeutet $\frac{d l_x}{d x}$ den Richtungskoeffizienten der Tangente im Punkte $x \mid l_x$[1]); die Sehne, welche die Punkte $x-1 \mid l_{x-1}$, $x+1 \mid l_{x+1}$ verbindet, wird dort, wo l_x keine große Bewegung ausführt, sich in der Richtung nicht wesentlich von jener Tangente unterscheiden; daher kann näherungsweise $\frac{l_{x+1}-l_{x-1}}{2} = \frac{d l_x}{d x}$ und

$$\mu_x = \frac{l_{x-1}-l_{x+1}}{2 l_x} = \frac{d_{x-1}+d_x}{2 l_x} \qquad (12)$$

gesetzt werden; eine Formel, die man zur Bestimmung der Sterbensintensität bei den ganzjährigen Altern verwenden kann, wenn die Reihen (1), (2) gegeben sind.

Die durchschnittliche Sterblichkeitskraft während eines Altersintervalls (x', x'') ist ausgedrückt durch

$$\frac{\int_{x'}^{x''} \mu_x l_x d x}{\int_{x'}^{x''} l_x d x}$$

und heißt der dieser Altersstrecke entsprechende *Sterblichkeitskoeffizient*.

Für den Zähler ergibt sich vermöge (11) der Wert

$$l_{x'} - l_{x''};$$

der Nenner hat die Bedeutung einer Zeit, und zwar bedeutet er, da angenommen werden kann, daß alle l_x Personen, die das Alter x erreicht haben, auch noch die Altersstrecke $(x, x+dx)$ durchleben, die von den unter Beobachtung stehenden Personen auf der Altersstrecke (x', x'') durchlebte Zeit. Insbesondere ist also

$$\mathcal{T}_x = \int_x^{\omega} l_x d x$$

die von den Beobachteten, nachdem sie das Alter x erreicht, noch *durchlebte Zeit*, so daß

$$\int_{x'}^{x''} l_x d x = \mathcal{T}_{x'} - \mathcal{T}_{x''}.$$

---

1) μ_x ist dabei durch den reziproken Wert der Subtangente dargestellt.

Der Sterblichkeitskoeffizient für das Altersintervall (x', x'') drückt sich also durch

$$\frac{l_{x'} - l_{x''}}{\mathcal{T}_{x'} - \mathcal{T}_{x''}} \tag{13}$$

aus.

Die Ermittelung von $\mathcal{T}_x$ erfordert die Verzeichnung des Sterbealters aller beobachteten Personen.

Der für ein Altersjahr $(x, x+1)$ ermittelte Sterblichkeitskoeffizient wird als das *zentrale Sterblichkeitsverhältnis* dieses Altersjahres und mit dem Buchstaben m_x bezeichnet; nach (13) ist

$$m_x = \frac{d_x}{\mathcal{T}_x - \mathcal{T}_{x+1}};$$

macht man die Annahme, daß die Sterbefälle sich gleichmäßig auf das Jahr verteilen, so ist die von den l_x Personen, die das Alter x erreicht haben, bis zum Alter $x+1$ durchlebte Zeit

$$\mathcal{T}_x - \mathcal{T}_{x+1} = \frac{1}{2}(l_x + l_{x+1});$$

folglich

$$m_x = \frac{2d_x}{l_x + l_{x+1}}. \tag{14}$$

Ersetzt man hier d_x durch $l_x - l_{x+1}$ und kürzt den Bruch durch l_x ab, so ergibt sich eine Formel zwischen m_x und p_x, aus der

$$p_x = \frac{2 - m_x}{2 + m_x} \tag{15}$$

folgt.

179. Lebenserwartung. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person, die das Alter x' erreicht hat, in dem (späteren) Altersintervall $(x, x + dx)$ sterben werde, ist

$$-\frac{dl_x}{l_{x'}};$$

da sie bis dahin die Zeit $x - x'$ durchlebt hat, so ist die gesamte *Lebenserwartung* einer Person des Alters x':

$$\overset{0}{e}_{x'} = \int_{x'}^{\infty} -\frac{dl_x}{l_{x'}}(x - x') = \frac{1}{l_{x'}}\int_{x'}^{\infty} -\frac{dl_x}{dx}(x - x')\,dx;$$

wendet man, $x - x' = u$ und $-\frac{dl_x}{dx}dx = dv$ setzend, partielle Integration an, so wird

$$\int_{x'}^{\infty} -\frac{dl_x}{dx}(x - x')\,dx = \int_{x'}^{\infty} l_x dx = \mathcal{T}_{x'},$$

folglich

$$\overset{0}{e}_{x'} = \frac{\mathcal{T}_{x'}}{l_{x'}}. \tag{16}$$

In dieser Form stellt sich die Lebenserwartung in ihrer zweiten, übrigens schon aus dem Begriffe der mathematischen Erwartung hervorgehenden Bedeutung der *mittleren* oder *durchschnittlichen Lebensdauer* dar.

Unter der schon einmal getroffenen Annahme der gleichmäßigen Verteilung der Sterbefälle einer einjährigen Altersstufe über diese läßt sich die Lebenserwartung durch die Zahlen der Reihen (1) und (2), Nr. 177, ausdrücken. Geht man vom Alter x aus, so durchleben die d_x Gestorbenen des ersten Jahres unter dieser Annahme $\frac{d_x}{2}$, die d_{x+1} Gestorbenen des zweiten Jahres $\frac{3\,d_{x+1}}{2}$, die d_{x+2} Gestorbenen des nächsten Jahres $\frac{5\,d_{x+2}}{2}$ Jahre u. s. w.; folglich ist

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_x &= \frac{1}{2}\,(d_x + 3d_{x+1} + 5d_{x+2} + \cdots)\\ &= \frac{1}{2}\,(d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \cdots)\\ &\quad + (d_{x+1} + d_{x+2} + \cdots)\\ &\quad + (d_{x+2} + \cdots)\\ &\quad \cdots\cdots\end{aligned}$$

d. i. nach (4):

$$\mathcal{T}_x = \frac{1}{2}\,l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots. \tag{17}$$

Daraus ergibt sich die Lebenserwartung der x-jährigen

$$\overset{0}{e}_x = \frac{1}{2} + \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots}{l_x}. \tag{18}$$

Neben dieser *vollen* unterscheidet man die *abgekürzte* Lebenserwartung

$$e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots}{l_x} = \overset{0}{e}_x - \frac{1}{2}. \tag{19}$$

Hält man neben diese Formel die Gleichung

$$1 + e_{x+1} = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots}{l_{x+1}} = \frac{l_x}{l_{x+1}}\,e_x = \frac{e_x}{p_x},$$

so erhält man eine Beziehung zwischen Lebenswahrscheinlichkeit und Lebenserwartung, indem

$$p_x = \frac{e_x}{1 + e_{x+1}} \tag{20}$$

ist.

Es muß darauf hingewiesen werden, daß die Lebenserwartung keine Größe ist, die man mit einer allgemein angebbaren Wahrscheinlichkeit zu erwarten hätte; vielmehr hängt die relative Größe dieser unendlich kleinen Wahrscheinlichkeit von dem Sterblichkeitsverlauf ab.

180. Wahrscheinlichste und wahrscheinliche Lebensdauer. Unter der *wahrscheinlichsten Lebensdauer* der x'-jährigen wäre diejenige Dauer zu verstehen, bei deren Ablauf der Eintritt des Todes relativ am wahrscheinlichsten ist. Nun ist die Wahrscheinlichkeit für einen x'-jährigen, in dem Altersintervall $(x, x + dx)$ zu sterben, gleich

$$-\frac{dl_x}{l_{x'}} = -\frac{\frac{dl_x}{dx}}{l_{x'}}\,dx;$$

sie wird am größten, wenn $-\frac{dl_x}{dx}$ ein Maximum, also wenn $\frac{d^2 l_x}{dx^2} = 0$[1] $\left(\text{und } -\frac{d^3 l_x}{dx^3} < 0\right)$ wird; angenommen, diese Bedingung würde nur durch den *einen* Wert $x = \xi$ erfüllt, so wäre $\xi - x'$ die wahrscheinlichste weitere Lebensdauer der x'-jährigen.

Ist in der Reihe der Zahlen (2), Nr. 177, unter jenen, die auf $d_{x'}$ folgen, $d_{x'+\xi}$ die größte, so fällt die wahrscheinlichste Lebensdauer zwischen ξ und $\xi + 1$ (vgl. Nr. 175).

Als *wahrscheinliche Lebensdauer* der x-jährigen wird jene Dauer $\mathfrak{x}$ bezeichnet, nach deren Ablauf die Anzahl l_x dieser Personen sich durch das Absterben auf die Hälfte vermindert hat, so daß $l_{x+\mathfrak{x}} = \frac{1}{2}\,l_x$; es ist dann bezüglich einer beliebigen Person des Alters x ebenso wahrscheinlich, das Alter $x + \mathfrak{x}$ nicht zu erreichen, wie es zu überschreiten.

Man hat, um $\mathfrak{x}$ zu finden, in der Reihe (1) der Überlebenden von l_x ausgehend bis zu jenen Zahlen l_{x+n} und l_{x+n+1} fortzuschreiten, welche $\frac{1}{2}\,l_x$ einschließen; dann liegt $\mathfrak{x}$ zwischen n und $n + 1$.

181. Das Problem der Sterblichkeitsmessung. Dieses Problem, so wie es praktisch gehandhabt wird, läuft darauf hinaus, für eine Reihe nach arithmetischer Progression fortschreitender (ganzzahliger) Werte von x die zugehörigen Werte einer der Größen zu bestimmen, welche zur Darstellung des Sterblichkeitsverlaufes geeignet sind. Man bezeichnet diese Größen als *biometrische Funktionen.*

Unter einer *Sterbetafel,* Sterblichkeitstafel oder Mortalitätstafel im weiteren Sinne des Wortes wäre eine derart gewonnene Wertreihe, also z. B. eine Reihe der Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x, oder der Lebenswahrscheinlichkeiten p_x, oder der (abgekürzten) Lebenser-

1) Wendepunkt in der Kurve der Überlebenden.

wartungen e_x, der Sterblichkeitsintensitäten μ_x od. dgl. zu verstehen. Indessen hat sich die obige Bezeichnung vornehmlich für die Reihe der Zahlen l_x der Überlebenden eingebürgert, die des praktischen Gebrauches wegen wohl auch noch durch andere, abgeleitete Zahlen (d_x, q_x, p_x, e_x u. a.) erweitert wird. Man nennt eine solche Tafel auch *Absterbeordnung* oder *Dekremententafel*.

Die bisherigen Entwicklungen sind unter Voraussetzungen geführt worden, welche sich in Wirklichkeit nicht erfüllen lassen; sie hatten daher lediglich den Zweck, die grundlegenden Begriffe festzustellen, nicht aber die Bestimmung, einen praktisch verwendbaren Weg zur Gewinnung einer Sterbetafel anzugeben.

Es ist zunächst angenommen worden, daß die Beobachtungen an einer großen Zahl *gleichzeitig Geborener* ausgeführt werden. Die nächste, der praktischen Ausführbarkeit näher kommende Modalität wäre die, daß man eine *Generation*, d. i. die Geborenen eines ausgedehnten Zeitraumes, etwa eines Kalenderjahres, beobachtet. Aber auch dieser Vorgang erweist sich wegen der dazu erforderlichen langen Beobachtungsdauer und wegen der Schwierigkeit, ja Unmöglichkeit der Evidenzhaltung einer Generation durch die ganze Dauer ihres Bestandes als zur Erreichung eines praktischen Resultates ungeeignet. Man wird genötigt sein, die Beobachtung auf verschiedene Generationen, auf Personen verschiedener örtlicher und zeitlicher Abkunft zu erstrecken je nach dem Zwecke, den man verfolgt.

Dann aber handelt es sich um die Erkenntnis der Modifikationen, welche die entwickelten Begriffe erfahren müssen, und der Voraussetzungen, an welche ihre Geltung zu knüpfen ist, sowie um die Gewinnung von Methoden, die geeignet sind, den Verlauf einer der biometrischen Funktionen kennen zu lernen. Wie der Verlauf einer andern dieser Funktionen daraus abzuleiten ist, zeigen die bereits entwickelten Relationen.

§ 2. Formale Bevölkerungstheorie.

182. Geometrische und analytische Hilfsmittel der Darstellung. Die praktische Erledigung von Fragen über Sterblichkeit, Lebensdauer, Dauer eines bestimmten Zustandes etc. setzt die genaue Erfassung jener Vorgänge voraus, durch welche der äußere Umfang und die innere Zusammensetzung einer Menschenmasse bedingt wird, sei dieselbe auf natürlichem Wege (Bevölkerung) oder durch eine auf ein bestimmtes Ziel gerichtete Absicht zusammengeführt worden. Es handelt sich dabei um abstrakte oder formale Beziehungen, die unabhängig sind von der Lage des einzelnen Falles, vielmehr die gemeinsame Grundlage bilden für alle.

Für die Klarstellung dieser Beziehungen haben sich die Hilfsmittel der Geometrie in einer eigenartigen, der Sache angepaßten A

wendung als sehr wertvoll erwiesen; an die geometrische Verbildlichung läßt sich dann eine analytische Formulierung der Ergebnisse anschließen. So hat sich als eine wichtige Grundlage für Untersuchungen des Bevölkerungswechsels eine *formale Bevölkerungstheorie* entwickelt, die wieder, je nach den Mitteln, deren sie sich bedient, in eine *graphische* und eine *analytische Statistik* geschieden werden könnte.

Was die geometrischen Darstellungen betrifft, die schon vermöge ihrer Anschaulichkeit den Ausgangspunkt zu bilden haben, so können sie in zwei Gruppen geschieden werden. Die einen sind individualisierend, insofern sie jedes Individuum der Masse gesondert verfolgen und zur Anschauung bringen; die andern fassen die Masse als Ganzes auf und betrachten die Vorgänge als stetige Funktionen der Zeit. Im schließlichen Erfolg treffen beide zusammen; ihr Resultat sind allgemeine Größenbeziehungen. Vom methodischen Standpunkte möchte wohl den Darstellungen der zweiten Art der Vorzug gegeben werden, weil sie zu einer einfacheren analytischen Formulierung führen; dagegen läßt sich nicht leugnen, daß die Darstellungen der ersten Art eine treuere Wiedergabe der tatsächlichen Vorgänge vermitteln.

Bevor an die Mitteilung der Prinzipien einiger Darstellungen geschritten wird, mögen einige Bemerkungen allgemeiner Natur Platz finden.

Bei Beobachtung der Individuen einer Masse kommen Zeit*punkte* und dazwischen liegende Zeit*räume* in Betracht; aber auch die Zeitpunkte werden durch die von einem Zeitnullpunkte gezählten Zeiträume bestimmt. Es werden daher im wesentlichen folgende Zeiten zu unterscheiden sein:

Die *Geburtszeit* t eines Individuums;

die *Beobachtungs-* (oder Erfüllungs-)*Zeit* τ eines bestimmten an ihm beobachteten Ereignisses;

sein *Alter* $x = \tau - t$ bei Eintritt dieses Ereignisses.

Bedeutet das Ereignis das Ableben des Individuums, so ist τ die Sterbezeit und x das Sterbealter. Bedeutet das Ereignis den Eintritt der Person in die Masse, so ist τ die Eintrittszeit und x das Eintrittsalter.

Jede geometrische Darstellung muß diese drei Zeiten entnehmen lassen.

Bei den individualisierenden Methoden entspricht jeder Person eine *Lebenslinie*, deren Anfangspunkt die Geburt, deren Endpunkt das Sterben bedeutet[1]). Die Ebene, in welcher die Darstellung erfolgt, wird dadurch zur Trägerin eines Systemes (paralleler) Lebenslinien, einer Reihe von Geburtspunkten und eines Systemes von Sterbepunkten. Für die Zusammenfassung der Individuen nach gewissen

1) Bei Individuen, welche erst nach der Geburt in die Masse eintreten und eventuell vor dem Tode aus ihr scheiden, tritt an die Stelle der Lebenslinie eine *Beobachtungslinie*.

Raschheit in der Aufeinanderfolge der Geburten erkennen. Die Scheidungslinien (t), (x), (τ) sind der Reihe nach den Linien OX, g, OY parallel; (x) ist die um x in der Richtung OX verschobene g[1]).

183. Fortsetzung. Indem wir nun dazu übergehen, die Veränderungen einer menschlichen Masse, soweit es sich um Geburten und Sterbefälle handelt, als stetig in bezug auf den Verlauf zu betrachten und die aus dieser Vorstellung entsprungene geometrische Darstellung G. Zeuners[2]) zu entwickeln, beginnen wir mit einer analytischen Betrachtung, deren Ausgangspunkt eine Funktion von unmittelbar verständlicher Bedeutung ist.

Nach Knapps[3]) Vorgang wollen wir unter $F(t, x)$ die Menge derjenigen verstehen, die von einem festen Zeitpunkte an bis zur Zeit t geboren das Alter x erreicht haben. Indem wir $F(t, x)$ als stetige und nach beiden Argumenten differentiierbare Funktion auffassen, wird

$$F(t + dt, x) - F(t, x) = f(t, x)\, dt \tag{1}$$

die Menge jener im Zeitintervall $(t, t + dt)$ Geborenen sein, die das Alter x erreicht haben; dabei bedeutet

$$z = f(t, x), \tag{2}$$

nämlich der partielle Differentialquotient von $F(t, x)$ nach t, die *Überlebensdichtigkeit* der zur Zeit t Geborenen im Alter x.

Weiter ist

$$-[f(t, x + dx) - f(t, x)]\, dt = \varphi(t, x)\, dt\, dx \tag{3}$$

die Menge derjenigen aus dem Zeitintervall $(t, t + dt)$ Geborenen, welche in dem Altersintervall $(x, x + dx)$ sterben; es bedeutet also

$$\zeta = \varphi(t, x), \tag{4}$$

oder der negativ genommene zweite Differentialquotient von $F(t, x)$ nach t und x, die *Sterbensdichtigkeit* der zur Zeit t Geborenen im Alter x.

Die Fläche, die sich durch Interpretation der Gleichung (2) in einem rechtwinkligen Raumkoordinatensystem mit den Achsen OT, OX, OZ ergibt, bildet die Grundlage der Zeunerschen Darstellung. Die Fig. 20 soll ein ideelles Bild jenes Teiles der Fläche geben, der von den Kurven

$$z = f(t, 0), \quad z = f(t_1, x), \quad z = f(t_2, x), \quad 0 = f(t, x)$$

begrenzt wird.

1) Vgl. zu diesem Artikel: L. Perozzo, Della rappresentazione di una collectività etc., Annali di Statistica (2), XII (1880), deutsch von W. Lexis, Jahrb. f. Nationalök. u. Statist. 35 (1880).

2) Abhandlungen aus der Mathematischen Statistik. Leipzig 1869.

3) Die Sterblichkeit in Sachsen, p. 112, und: Theorie des Bevölkerungswechsels, p. 32.

Die erste dieser Kurven, $z = f(t, 0)$, veranschaulicht den Verlauf : *Geburtendichtigkeit* und soll *Geburtenkurve* heißen; der Bogen $G_1 G_2$:spricht dem Zeitraume von $OA_1 = t_1$ bis $OA_2 = t_2$.

Die zweite Kurve, $z = f(t_1, x)$, zeigt die Abnahme der zur Zeit $A_1 = t_1$ Geborenen mit dem zunehmenden Alter; daher soll $G_1 S_1$ *Absterbekurve* für die Geburtszeit t_1 heißen. Eine ähnliche Beıtung hat die dritte Kurve $z = f(t_2, x)$, nämlich $G_2 S_2$, für die Gertszeit $OA_2 = t_2$. Diese Kurven fallen im allgemeinen verschieden ; nicht bloß deshalb, weil die relativen Mengen der Geburten zu ı Zeiten t_1, t_2, dargestellt durch $A_1 G_1$, $A_2 G_2$, verschieden sind, ıdern weil auch anzunehmen ist, daß die zu verschiedenen Zeiten borenen in ungleicher Weise absterben.

Die vierte Kurve endlich, $0 = f(t, x)$, in der Figur $S_1 S_2$, vernlicht den Zusammenhang zwischen der Geburtszeit und dem *höchsten*

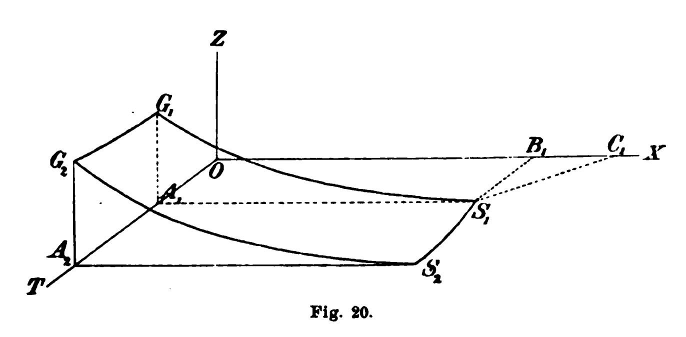


Fig. 20.

ter, das die aus ihr Stammenden erreichen. Hiernach wäre $OB_1 = x_1$ s Alter der zuletzt Gestorbenen aus der Geburtszeit $OA_1 = t_1$ und $C_1 = t_1 + x_1 = \tau_1$ die Erfüllungszeit dieses Alters, wenn $S_1 C_1$ so zogen wird, daß der Winkel $S_1 C_1 B_1$ gleich 45° ist. Die letzte Beırkung zeigt zugleich, wie auf der Achse OX außer dem Alter x ch die Erfüllungszeit τ zum Ausdruck zu bringen ist.

Man kann indessen für viele Zwecke von der räumlichen Darıllung absehen und lediglich mit der Ebene OTX (Fig. 21) operieren, e man sich auf zweierlei Art mit Funktionsırten belegt denkt: einmal mit den Werten der berlebensdichtigkeit $f(t, x)$, ein zweites Mal mit n Werten der Sterbensdichtigkeit $\varphi(t, x)$; beide Werte gehören zu dem Punkte $M(t, x)$, und die obachtungszeit des Ereignisses, das diesem Punkte ıtspricht, ist $OC = \tau$.

Fig. 21.

184. Allgemeine Sätze über Gesamtheiten von Lebenden nd Gestorbenen. *Erster Satz:* „Ist $\chi(t)$ eine eindeutige Funktion nd $x = \chi(t)$ die Gleichung einer Kurve in der Ebene OTX, so ist

das über den Bogen $M_1 M_2$ (Fig. 22) dieser Kurve erstreckte Integral der Funktion $f(t, x)$ der Ausdruck für die Menge der aus der Zeit (t_1, t_2) Geborenen, welche das durch $M_1 M_2$ gesetzte Alter erreicht haben."

Denn es ist tatsächlich

$$\int\limits_{\widehat{M_1 M_2}} f(t, x)\, dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[t, \chi(t)]\, dt$$

vermöge der Bedeutung von $f(t, x)$ die Menge derjenigen, zwischen deren Geburtszeit und Alter die Beziehung $x = \chi(t)$ besteht.

Mit Bezugnahme auf die Zeunersche Fläche interpretiert besagt dieser Satz folgendes: Der Durchschnitt $M_1 M_2 P_2 P_1$ der Fläche Fig. 23 mit einem zur z-Achse parallelen Cylinder gibt in seiner Projektion $A_1 A_2 Q_2 Q_1$ auf der TZ-Ebene die Menge derjenigen, die in der Zeit t_1, t_2 geboren die durch die Kurve $M_1 M_2$ begrenzten Alter erreicht haben.

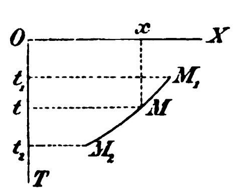


Fig. 22.

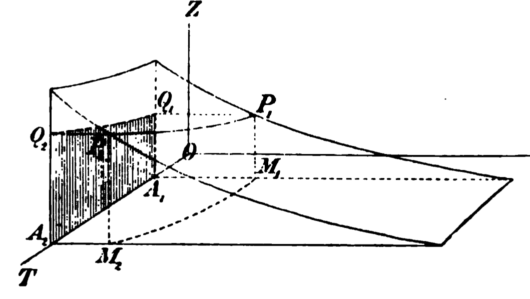


Fig. 23.

Bei den Darstellungen der Nr. 182 würde diese allgemeine *Gesamtheit von Lebenden* durch die Zahl der Schnittpunkte bestimmt, welche die Kurve $M_1 M_2$ mit den Lebenslinien ergibt.

Zweiter Satz: „Das über eine Figur F (Fig. 24) ausgedehnte Integral der Funktion $\varphi(t, x)$, das auch gleichkommt dem im Sinne des Pfeiles über den Umriß Γ der Figur erstreckten Integral der Funktion $f(t, x)$, bedeutet die Menge der in dem Zeitraume (t_1, t_2) Geborenen, welche zwischen den durch Γ bezeichneten Altersgrenzen gestorben sind."

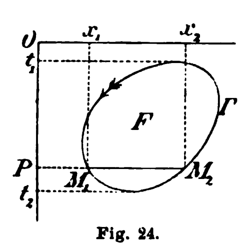


Fig. 24.

Der eine Teil der Aussage folgt unmittelbar aus der Bedeutung von $\varphi(t, x)$ als Dichtigkeit der Sterbefälle an der Stelle $t \mid x$. Weil ferner

$$\varphi(t, x) = -\frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial t\, \partial x} = -\frac{\partial f(t, x)}{\partial x},$$

$$\iint\limits_F \varphi(t, x)\,dt\,dx = -\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\,dx$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} f(t, x_1)\,dt + \int_{t_2}^{t_1} f(t, x_2)\,dt = \int\limits_{F} f(t, x)\,dt.$$

Bei geometrischer Interpretation an der Zeunerschen Fläche ist diese allgemeine *Gesamtheit der Gestorbenen* durch die TZ-Projektion jenes Teiles der Fläche dargestellt, der sich auf der TX-Ebene in die Figur F projiziert (siehe Fig. 25). Bei den Diagrammen der Nr. 182 wäre sie durch die Anzahl der Sterbepunkte bestimmt, welche in die Figur F zu liegen kommen.

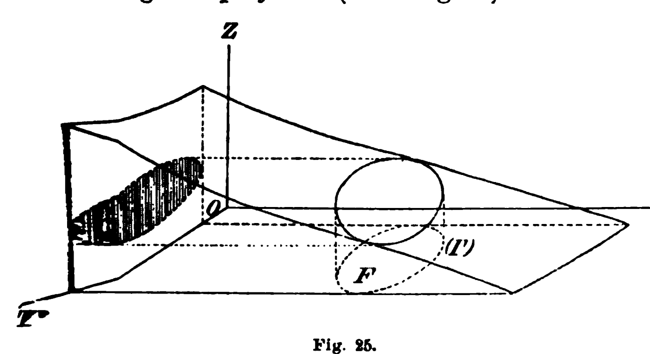


Fig. 25.

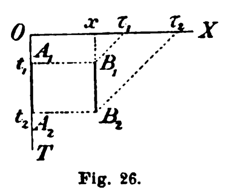


Fig. 26.

185. Hauptgesamtheiten der Lebenden. Unter der Menge von Gesamtheiten Lebender und Gestorbener gibt es nur eine relativ kleine Anzahl solcher, die bei der Sterblichkeitsmessung Verwendung finden; auch sind es nur wenige, die sich, zumal in ganzen Bevölkerungen, statistisch leicht erheben lassen. Bezüglich der Lebenden sind folgende Gesamtheiten von Wichtigkeit.

Die *erste Hauptgesamtheit der Lebenden* ist die Gesamtheit der *Gleichaltrigen*. Sie ist im geometrischen Bilde (Fig. 26) durch eine zu OT parallele Strecke B_1B_2 dargestellt und zählt die Personen, die in der Zeitstrecke (t_1, t_2) geboren ein bestimmtes Alter x erreicht haben. Die Erfüllung dieses Alters erfolgt aber nicht gleichzeitig; von der ersten Person der Gesamtheit wird es zur Zeit

$$\tau_1 = t_1 + x,$$

von der letzten zur Zeit

$$\tau_2 = t_2 + x$$

vollendet; ist also die Geburtsstrecke einjährig, so ist auch die Dauer der Erfüllung eines bestimmten Alters einjährig.

Analytisch ist diese Gesamtheit durch

$$V_x = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x)\,dt$$

ausgedrückt; ein besonderer Fall derselben ist die *Geburtenmenge* aus der Zeitstrecke (t_1, t_2), im Bilde durch die Strecke $A_1 A_2$ vertreten, analytisch durch

$$V_0 = \int_{t_1}^{t_2} f(t, 0)\, dt$$

bestimmt.

Für die Bevölkerungsstatistik hat diese Hauptgesamtheit nur theoretische Bedeutung; ihre direkte Erhebung ist nur dort möglich, wo Individualbeobachtung gepflogen wird, also in geschlossenen Gesellschaften. In der Bevölkerungsstatik wird sie auf andere, zählbare Gesamtheiten zurückgeführt.

Die *zweite Hauptgesamtheit der Lebenden* ist die Gesamtheit der *Gleichzeitiglebenden* oder der *Gezählten*. Im Bilde (Fig. 27) entspricht ihr eine gegen OT und OX gleich geneigte Strecke $C_1 C_2$. Sie umfaßt Personen, welche in der Zeitstrecke (t_1, t_2) geboren zur Zeit τ am Leben sind, *gezählt* werden; dieselben stehen in verschiedenen Altern, und zwar haben die jüngsten das Alter

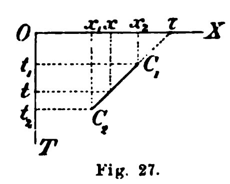


Fig. 27.

$$x_1 = \tau - t_2,$$

die ältesten das Alter

$$x_2 = \tau - t_1,$$

so daß sie einer einjährigen Altersklasse angehören, wenn die Generation einjährig war.

Der analytische Ausdruck für diese Gesamtheit ist

$$V_\tau = \int_{C_1 C_2} f(t, x)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} f(t, \tau - t)\, dt.$$

Diese Gesamtheit wird bei Volkszählungen unmittelbar erhoben, wenn die Gezählten nach Kalenderjahren der Geburt geschieden werden. So stehen bei einer am 31. Dezember 1900 vorgenommenen Volkszählung die Personen aus dem Geburtsjahre 1850 (d. i. vom 1. Januar bis 31. Dezember 1850) auf der Altersstufe von 50 bis 51.

186. Hauptgesamtheiten von Gestorbenen. Der *ersten* Hauptgesamtheit von Gestorbenen entspricht im geometrischen Bilde (Fig. 28) ein Rechteck $B_1 B_2 B_2' B_1'$ mit zu den Achsen parallelen Seiten. Die Gesamtheit besteht aus Personen, die in der Zeitstrecke (t_1, t_2) geboren, nach Vollendung des Alters x_1 und vor Vollendung des Alters x_2 gestorben sind. Das Sterben erfolgte zu verschiedenen Zeiten, bei den ersten zur Zeit

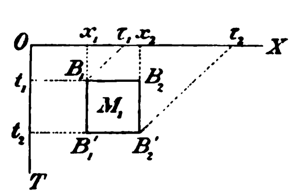


Fig. 28.

bei den letzten zur Zeit

$$\tau_1 = t_1 + x_1,$$
$$\tau_2 = t_2 + x_2.$$

Im ganzen ist also zur Erhebung dieser Gesamtheit der Zeitraum

$$\tau_2 - \tau_1 = t_2 - t_1 + x_2 - x_1,$$

speziell ein Zeitraum von *zwei* Jahren erforderlich, wenn einjährige Generationen und einjährige Altersstufen beobachtet werden. Beispielsweise sterben die im Kalenderjahre 1890 Geborenen auf der Altersstufe von 20 bis 21 Jahren in den beiden Kalenderjahren 1909 und 1910.

Der analytische Ausdruck dieser Gesamtheit ist

$$M_1 = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \varphi(t, x)\, dt\, dx = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x_1)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} f(t, x_2)\, dt;$$

in der letzten Form erscheint M_1 als Differenz von zwei ersten Hauptgesamtheiten Lebender, nämlich

$$M_1 = V_{x_1} - V_{x_2},$$

eine Relation, die aus der Zeunerschen Darstellung unmittelbar zu entnehmen ist.

Die *zweite* Hauptgesamtheit der Gestorbenen ist im Bilde (Fig. 29) durch ein Parallelogramm $C_1 C_2 C_2' C_1'$ vertreten, von dem zwei Seiten parallel zu OX, die zwei andern unter 45° geneigt sind. Sie besteht aus den Personen, die in der Zeitstrecke (t_1, t_2) geboren, nach der Zeit τ_1 und vor der Zeit τ_2 gestorben sind. Das Sterben geschah in verschiedenen Altern, bei den jüngsten im Alter

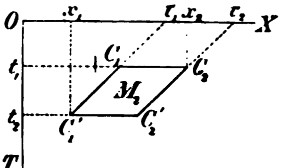


Fig. 29.

$$x_1 = \tau_1 - t_2,$$

bei den Ältesten im Alter

$$x_2 = \tau_2 - t_1,$$

so daß sich die Alter in einem Intervall von

$$x_2 - x_1 = \tau_2 - \tau_1 + t_2 - t_1,$$

also speziell von *zwei* Jahren bewegen, wenn die Gestorbenen aus einem Kalenderjahre stammen und in einem Kalenderjahre beobachtet wurden. So stehen beispielsweise die im Kalenderjahre 1900 verzeichneten Verstorbenen aus dem Geburtsjahre 1850 im Alter von 49 bis 51 Jahren.

Analytisch drückt sich diese Gesamtheit durch

$$M_2 = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\tau_1 - t}^{\tau_2 - t} \varphi(t, x)\, dt\, dx$$

aus, kann aber auch durch Hauptgesamtheiten zweiter Art von Lebenden dargestellt werden, indem

$$M_2 = V_{\tau_1} - V_{\tau_2}$$

ist.

Die *dritte* Hauptgesamtheit von Gestorbenen ist im Bilde (Fig. 30) durch ein Parallelogramm dargestellt, von dem zwei Seiten parallel zu OT, zwei unter 45^0 geneigt sind. Sie umfaßt Personen, welche nach der Zeit τ_1 und nach Vollendung des Alters x_1, jedoch vor der Zeit τ_2 und vor Vollendung des Alters x_2 gestorben sind. Sie stammen aus verschiedenen Geburtszeiten, und zwar die ersten und ältesten aus der Zeit

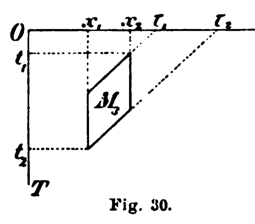


Fig. 30.

$$t_1 = \tau_1 - x_2,$$

die letzten und jüngsten aus der Zeit

$$t_2 = \tau_2 - x_1;$$

die Zeitstrecke der Geburten hat also die Länge

$$t_2 - t_1 = \tau_2 - \tau_1 + x_2 - x_1.$$

Hiernach gehören die während eines Kalenderjahres beobachteten Sterbefälle einer einjährigen Altersklasse *zwei* Geburtsjahren an; beispielsweise die im Jahre 1910 beobachteten Gestorbenen von 30 bis 31 Jahren den Kalenderjahren 1879 und 1880.

Der analytische Ausdruck dieser Gesamtheit ist

$$M_3 = \int_{x_1}^{x_2}\int_{\tau_1 - x}^{\tau_2 - x} \varphi(t, x)\, dt\, dx.$$

Sie kann übrigens auch durch Hauptgesamtheiten erster und zweiter Art von Lebenden ausgedrückt werden, und zwar ist

$$M_3 = V_{\tau_1} + V_{x_1} - V_{\tau_2} - V_{x_2};$$

jedoch beziehen sich die rechts stehenden Gesamtheiten auf verschiedene Geburtsstrecken, die man aus der Figur unmittelbar abliest, nämlich

V_{τ_1} auf $\tau_1 - x_2$ bis $\tau_1 - x_1$
V_{x_1} „ $\tau_1 - x_1$ „ $\tau_2 - x_1$
V_{τ_2} „ $\tau_2 - x_2$ „ $\tau_2 - x_1$
V_{x_2} „ $\tau_1 - x_2$ „ $\tau_2 - x_2$.

187. Elementargesamtheiten von Gestorbenen. Die vorhin chteten Hauptgesamtheiten von Gestorbenen kennzeichnen sich rch, daß im geometrischen Bilde zweierlei Scheidelinien an ihrer enzung teilnehmen; bei M_1 sind es Linien (t) und (x); bei M_2 n (t) und (τ); bei M_3 Linien (x) und (τ). Wenn man bei zweien naßgebenden Größen ein einjähriges Intervall annimmt, stellt sich mal für die dritte ein zweijähriges Intervall heraus.

Für das Problem der Sterblichkeitsmessung von Bevölkerungen n sich Gesamtheiten als wichtig und notwendig erwiesen, die im durch Linien aller drei Arten begrenzt die Form von Dreiecken n; man bezeichnet sie nach Lexis[1]) als *Elementargesamtheiten.* ibt deren zwei Arten.

Die Gesamtheit M', dargestellt durch das Dreieck $B_1 C_1 C_2$ (Fig. 31), ßt Personen aus dem Geburtsjahre (t, $t+1$), die im Kalender- (τ, $\tau+1$) auf der Altersstufe $+ 1$) gestorben sind, wobei hen t, τ und x die Beziehung $+ x$ besteht.

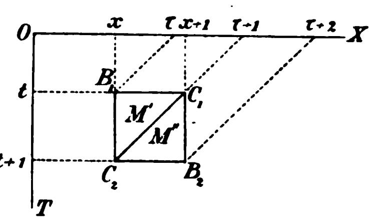


Fig. 31.

Die Gesamtheit M'', dargestellt das Dreieck $C_1 C_2 B_2$, vereinigt nen desselben Geburtsjahres und lben Altersstufe, die aber in Kalenderjahre ($\tau+1$, $\tau+2$) ge- en sind.

Elementargesamtheiten von Gestorbenen erstrecken sich also auf eburtsjahr, ein Beobachtungsjahr und eine einjährige Altersklasse. große Bedeutung liegt in dem Zusammenhange, den sie mit den tgesamtheiten der Lebenden aufweisen. Man entnimmt der Figur t, daß die durch $B_1 C_2$ repräsentierte Gesamtheit von Lebenden h den Abgang von M' sich verwandelt in die Lebendengesamt- $C_1 C_2$, und diese wieder durch den weiteren Abgang von M'' in ebendengesamtheit $C_1 B_2$; in Zeichen heißt dies:

$$V_x - M' = V_{\tau+1}$$
$$V_{\tau+1} - M'' = V_{x+1}.$$

1) Einleitung in die Theor. d. Bevölk.-Statist., p. 13. Ihre Bedeutung für angeführten Zweck ist schon von G. Meyer, Jahrb. f. Nat.-Ök. u. Statist. (1867), p. 19, hervorgehoben und dann von Knapp, Becker u. a. bedet worden.

Erwägt man nun, daß die Gesamtheit V_{x+1} der Beobachtung zugänglich ist (Volkszählung), und daß auch die Gesamtheiten M', M'' erhoben werden können — man hat nur die Gestorbenen nach Geburtsjahren *und* Altersklassen zu sondern —, so bieten diese Relationen das Mittel zur Feststellung der Hauptgesamtheiten erster Art, V_x, V_{x+1}, von welchen in Nr. 185 bemerkt wurde, daß sie der direkten Beobachtung unzugänglich sind.

Übrigens erkennt man aus den Diagrammen, daß jede Hauptgesamtheit von Gestorbenen, die sich auf einjährigen Intervallen aufbaut, durch eine Diagonale in Elementargesamtheiten zerlegt wird.

§ 3. Sterbetafeln.

189. Sterbetafeln aus bevölkerungsstatistischem Material. Das wissenschaftliche oder biologische Interesse an der Sterblichkeitsuntersuchung wäre in erster Linie auf die Feststellung des Verlaufes im Absterben einer *Generation*, d. i. der Geborenen eines oder mehrerer Kalenderjahre aus einer großen Gemeinschaft, der Bevölkerung eines Landes oder einer Stadt, gerichtet. Diese Aufgabe könnte durch Beobachtung der aus der Generation hervorgehenden Elementargesamtheiten von Gestorbenen voraussetzungslos nur dann gelöst werden, wenn weder Ein- noch Auswanderung stattfände. Ein solches Material wäre geeignet, den Verlauf des Absterbens sowohl *nach der Zeit* wie *nach dem Alter* darzustellen, d. h. die Hauptgesamtheiten der Lebenden in jahreweisen Absätzen zu bestimmen. Wie nämlich aus Fig. 32 ersichtlich, wären die *Überlebenden nach 1, 2, 3, ... Jahren* vom Beginne des Geburtsjahres der Generation gerechnet, durch folgende Zahlenreihe dargestellt:

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= V_0 - M_0' \\ V^{(2)} &= V^{(1)} - M_0'' - M_1' \\ V^{(3)} &= V^{(2)} - M_1'' - M_2', \end{aligned} \tag{1}$$

wobei V_0 die Geburtenmenge, also die Stärke der Generation bedeutet, die sich übrigens aus den beobachteten Sterbefällen von selbst ergibt, indem nach (1)

$$V_0 = M_0' + M_0'' + M_1' + M_1'' + \cdots$$

ist. Dagegen hätte man für die *Überlebenden bei den Altern von 1, 2, 3, ... Jahren* die Werte

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 - M_0' - M_0'' \\ V_2 &= V_1 - M_1' - M_1'' \\ V_3 &= V_2 - M_2' - M_2'' \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{2}$$

Diese Reihe, am Anfange durch V_0 ergänzt, wäre es, die unter Bezeichnung

$$l_0,\ l_1,\ l_2,\ \cdots$$

Ausgangspunkt zur Bestimmung der übrigen biometrischen ıktionen gebildet hat (s. Nr. 177).

Die lange Beobachtungsdauer ist ›ch eines der Haupthindernisse der ktischen Durchführung dieses Vorges.

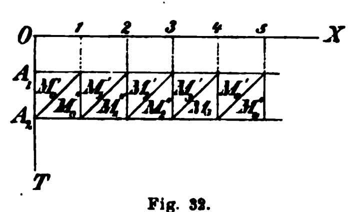


Fig. 32.

Man könnte nun daran denken, durch ·zeichnung der Sterbefälle *eines* Bechtungsjahres nach Hauptgesamtheiten ;ter Art das Material zu gewinnen, das Absterben einer Generation darzustellen. Das setzte aber das ·handensein von Bedingungen voraus, die sich längst als unzufend erwiesen haben. Es müßte nämlich Absterben aller Generationen, welche ›r des Beobachtungsjahres bis zur längsten ›ensdauer vorangehen, in gleicher Weise sich gegangen sein und alle in Betracht ogenen Generationen müßten von gleicher rke und gleichartiger Verteilung über das ır sein. Unter diesen Voraussetzungen ren nämlich die beobachteten, parallelo-.mmatischen Hauptgesamtheiten M_0, M_1, ı, ⋯ von Verstorbenen gleich den korre›ndierenden quadratischen der Fig. 33, und ın hätte in der Reihe

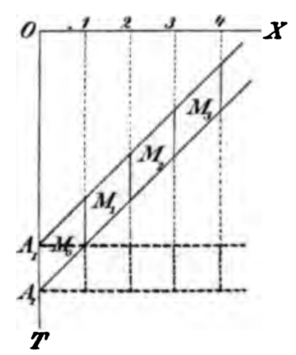


Fig. 33.

$$V_1 = V_0 - M_0$$
$$V_2 = V_1 - M_1$$
$$V_3 = V_2 - M_2,$$
$$\cdots\cdots$$

bei wieder $V_0 = M_0 + M_1 + M_2 + \cdots$ wäre, die Reihe der Überenden nach dem Alter, auf eine Generation bezogen. Dieser Ge-.ke lag der von Halley[1]) benützten Methode zur Herstellung der *en* Sterbetafel zugrunde.

Aus dritten Hauptgesamtheiten von Gestorbenen und zweiten ıptgesamtheiten von Lebenden in bestimmter Anordnung und bei ıntnis der Geburtenmengen aller in Betracht kommenden Generationen ·e sich das Absterben einer Generation *angenähert*, aber nicht voraus-

1) An estimate of the Degree of the Mortality of Mankind etc. Philos. ıns. London XVII (1693).

setzungslos, ermitteln[1]). Angenommen, man hätte während der Kalenderjahre $(\tau - 1, \tau)$ und $(\tau, \tau + 1)$ dritte Hauptgesamtheiten von Gestorbenen erhoben und an der Grenze zwischen den zwei Jahren eine Zählung nach Altersklassen vorgenommen; M, M_1, V_τ seien die auf die Altersklasse $(x, x + 1)$ bezüglichen Zahlen. Fig. 33 zeigt, daß die Gestorbenen aus drei Jahrgängen stammen, deren Geburtenmengen V_0, V_0', V_0'' als bekannt vorausgesetzt werden. Nimmt man nun an, daß die Gestorbenen eines Geburtsjahres *und* einer Altersklasse sich nach Geburtszeit und Alter gleichförmig verteilen, so sind die beiden Elementargesamtheiten m'' und m_1', welche die quadratische Gesamtheit aus dem mittleren Geburtsjahre zusammensetzen, einander gleich; wenn ferner das Absterben aller Generationen als gleichartig vorausgesetzt wird, so unterscheiden sich die Elementargesamtheiten m' und m_1', m'' und m_1'' *nur* insofern von einander, als sie aus verschiedenen Geburtenmengen stammen. Dies alles ermöglicht die Berechnung von m'' und m_1' aus den beobachteten M und M_1. Es ist nämlich

Fig. 34.

$$m'' = m_1' = m' \frac{V_0'}{V_0},$$

daraus

$$\frac{m''}{m'} = \frac{V_0'}{V_0}, \quad \frac{m''}{m' + m''} = \frac{V_0'}{V_0 + V_0'}$$

und

$$m'' = \frac{V_0'}{V_0 + V_0'} M;$$

ebenso findet sich

$$m_1' = \frac{V_0''}{V_0' + V_0''} M_1.$$

Hiermit erkennt man die Abminderung der x-jährigen auf die $x + 1$-jährigen für die Generation V_0', indem

$$V_x = V_\tau + m''$$
$$V_{x+1} = V_\tau - m_1';$$

auf diese Generation oder irgend eine andere aus dem Bereiche lasse sich alle Altersklassen reduzieren.

In dem Maße, als gewisse gleich anzuführende Voraussetzungen zutreffen, ließe sich durch eine einmalige Zählung der Lebenden und

1) W. Lexis, Einleit. in d. Theor. d. Bevölk.-Stat., p. 39.

:heidung nach Altersklassen ein angenähertes Bild des Ab- ; einer Generation gewinnen. Diese Voraussetzungen wären: Gesetz des Absterbens ist unabhängig von der Geburtszeit; :rhalb eines engen Gebietes, etwa innerhalb eines Quadrates jährigen Intervallen, darf die Zeunersche Fläche durch eine ərsetzt werden; 3) die jährlichen Geburtsmengen der der Zählung 'ehenden Periode von etwa 100 Jahren sind bekannt.

rmöge der zweiten Voraussetzung projizieren sich die beiden lie Mitte des quadratischen Feldes Fig. 35 gelegten Vertikal- B_1B_1, C_1C_2 der Fläche in die Ebene TOZ (siehe deren Um- als gerade Linien $B_1'B_2'$, infolgedessen sind die Flächen $_2'B_1'$, $A_1A_2C_2'C_1'$ inhalts- d. h. die durch B_1B_2, C_1C_2 ellten Hauptgesamtheiten von en gleich groß; die erste, V_x, Gesamtheit der x-jährigen ›enden, die andere, zählbare

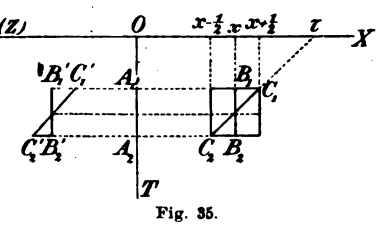


Fig. 35.

heit V_τ die der Überlebenden zur Zeit τ zwischen den Altern und $x + \frac{1}{2}$, beide Gesamtheiten aus demselben Geburtsjahre 1) stammend. Dabei gilt die Beziehung

$$\tau = t + x + \frac{1}{2}.$$

tzt man beispielsweise $t = 1880$, $x = 20$, so ergibt sich)0 $+ \frac{1}{2}$, d. h. wenn man bei einer Zählung am 1. Juli 1901 sonen zusammenfaßt, die aus dem Geburtsjahre 1880 stammend Altersintervall von $19\frac{1}{2}$ bis $20\frac{1}{2}$ leben, so erhält man damit ıngenäherten Wert der Gesamtheit der 20-jährigen aus jenem ;jahre. Denkt man sich dies für alle Altersjahre durchgeführt ; V_x auf *eine* Geburtenmenge, etwa die des Zählungsjahres (1901), rt [Voraussetzung 3)], so wäre damit ein beiläufiges Bild der ›eordnung gewonnen. Auf die ersten Altersjahre dürfte jedoch raussetzung 2) nicht angewendet werden.

ıch in einer andern Art könnte das Verfahren durchgeführt . Setzt man z. B. $\tau = 1902$ (31. Dezember) und $x = 30$, so $= 1871\frac{1}{2}$ und $t + 1 = 1872\frac{1}{2}$, d. h. zählt man am 31. Dezember lie Überlebenden, welche der Geburt nach aus dem Zeitraume Juli 1872 bis 30. Juni 1873 stammen, so ist damit eine an- rte Bestimmung der Gesamtheit der überlebenden 30-jährigen m bezeichneten Zeitraume gewonnen. Die Zählung würde sich

einfach gestalten, wenn man von vornherein alle, die in der zweiten Hälfte des Kalenderjahres 1872 und in der ersten Hälfte des Jahres 1873 geboren sind, mit dem Geburtsjahre 1872 verzeichnete[1]).

189. Fortsetzung. Die Erforschung des Absterbens einer Generation darf nach dem vorgeführten als ein Ziel bezeichnet werden, dem heute und wohl noch auf lange hinaus nur theoretische Bedeutung zukommt.

Dagegen läßt sich durch geeignete Verbindung von Volkszählungsergebnissen mit entsprechend angelegten Totenregistern eine Zahlenreihe gewinnen, welche formell die Struktur einer Sterbetafel aufweist, von der Sterbetafel einer Generation aber dadurch abweicht, daß sie die Abminderung der einzelnen Altersklassen, die ihnen entsprechenden Lebenswahrscheinlichkeiten, aus ebenso vielen *verschiedenen* Generationen ableitet. Weil die Grundlage einer solchen Tafel in der Altersgruppierung der Gezählten, also gleichzeitig Lebenden besteht, hat Zeuner[2]) sie als „Sterbetafel gleichzeitig Lebender" bezeichnet.

Wenn man über den Wert einer solchen gegenüber der Sterbetafel einer Generation urteilen will, so muß man auf den angestrebten Zweck Rücksicht nehmen. Vom Standpunkte der Biologie müßte den Sterbetafeln von Generationen der höchste Wert beigemessen werden; die Vergleichung mehrerer derartiger Tafeln auf die verschiedenen biologischen Funktionen hin würde zu wichtigen Aufschlüssen führen über die Veränderung in der Lebenskraft der Bevölkerung, aus der die Generationen hervorgegangen sind. Immer aber wäre in einer Sterbetafel einer Generation nichts mehr als ein historischer Bericht über eine bereits abgestorbene menschliche Masse zu erblicken, der zu Schlüssen auf die Gegenwart streng genommen nicht verwendet werden dürfte.

Handelt es sich um praktische Zwecke, dann wird eine Tafel gleichzeitig Lebender den Vorzug verdienen, namentlich während einer Periode, die über den Zeitpunkt der Entstehung der Tafel nicht allzu weit hinausgeht. Denn die angestellten Untersuchungen weisen darauf hin, daß die auf die Sterblichkeit der einzelnen Altersklassen bezüglichen Relativzahlen — von den untersten Klassen abgesehen — wenigstens innerhalb der bisher beobachteten Zeiträume [vgl. Nr. 172 *d)*] nur zufälligen Schwankungen unterworfen sind, daß also innerhalb nicht zu weiter Zeitgrenzen von festen Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeiten gesprochen werden könne. Der Unterschied beider Tafelarten aus diesem Gesichtspunkte möge aus dem folgenden Beispiele beurteilt werden. Wendet man eine im Jahre 1900 konstruierte Tafel gleichzeitig Lebender im Jahre 1930 auf 30-jährige Personen

1) Vgl. G. Zeuner, Abhandlungen etc., p. 61 ff.
2) Abhandlungen etc., p. 53.

ı, so vergleicht man diese mit einer Generation, die um 30 Jahre ırückliegt; könnte man auf dieselben Personen eine im Jahre 1900 rtig gewordene Tafel einer Generation anwenden, so käme das einer ergleichung dieser Personen mit einer um rund 130 Jahre zurück- ›genden Generation gleich; es unterliegt keinem Zweifel, welche Ver- eichung statthafter ist.

Diese Erwägungen können selbstverständlich nur auf theoretischen 'ert Anspruch erheben, da Sterbetafeln von Generationen überhaupt cht vorliegen.

Zur Sache selbst übergehend nehmen wir an, das Ergebnis einer ım Zeitpunkte τ ausgeführten Volkszählung sei derart geordnet, daß e gezählten Personen (des männlichen, des weiblichen Geschlechtes) ıch Geburtsjahren oder, was dasselbe ist, nach einjährigen Alters- assen geordnet seien, vorausgesetzt nämlich, daß die Zählung an ›r Grenze zweier Kalenderjahre stattgefunden hat. Dadurch sind auptgesamtheiten zweiter Art von Lebenden festgestellt. Eine solche esamtheit sei die, welche der Strecke $C_1 C_2$ Fig. 36 entspricht, und eiße V_τ; sie umfaßt Personen, welche aus dem Geburtsjahre $(t, t+1)$ ammen, oder anders ausgedrückt, welche im Alter von $x = \tau - t - 1$ is $x + 1$ Jahren stehen. Solcher Gesamtheiten gibt die Volks- ihlung so viele, als sie Altersklassen von Lebenden antrifft, also ınd 100.

Weiter seien in dem der Zählung vorangehenden und dem nach- ›lgenden Kalenderjahre die Totenregister derart geführt worden, daß sie *lementargesamtheiten* von estorbenen zu entnehmen estatten. Somit kennt man ıch die beiden Elementar- esamtheiten M', M'', die ı V_τ anstoßen und geo- ıetrisch durch die Drei- :ke $B_1 C_2 C_1$, $C_1 C_2 B_2$ ver- ınnlicht sind; die erste ihlt die Verstorbenen der lterstufe $(x, x+1)$ aus em vorangehenden, die weite die Verstorbenen erselben Altersstufe aus em nachfolgenden Kalen- erjahre, *beide* aus dem Geburtsjahre $(t, t+1)$. Aus diesen drei ›aten berechnen sich — von Wanderungen abgesehen — die beiden esamtheiten:

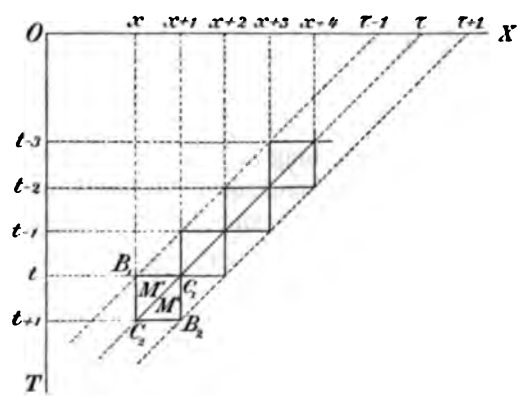


Fig. 36.

$$V_x = V_\tau + M'$$
$$V_{x+1} = V_\tau - M'',$$

und daraus die Lebenswahrscheinlichkeit der x-jährigen:

$$p_x = \frac{V_{x+1}}{V_x}.$$

Auf solche Weise erhält man eine vollständige Reihe von Lebenswahrscheinlichkeiten:

$$p_0, \quad p_1, \quad p_2, \quad \cdots$$

aus der sich die Werte aller andern biometrischen Funktionen ableiten lassen, insbesondere die Zahlen der Überlebenden; man wählt zu diesem Zwecke eine (runde) Zahl l_0 als *Basis* und rechnet successive:

$$l_1 = p_0 l_0, \quad l_2 = p_1 l_1, \quad l_3 = p_2 l_2, \quad \cdots;$$

diese Zahlen drücken aus, wie eine fiktive Gesamtheit von l_0 Geborenen mit fortschreitendem Alter abnimmt.

Die vorgeführte Methode baut sich auf der Voraussetzung auf, daß die Volkszählung an einer Jahreswende stattfinde. Ist dem nicht so, erfolgt die Volkszählung zu einem andern Zeitpunkte, z. B. wie in Deutschland am 1. Dezember (Mitternacht vom 30. November auf den 1. Dezember), so ist eine *Fortschreibung* ihrer Ergebnisse bis zur nächsten Jahreswende, beziehungsweise eine detailliertere Nachweisung der Geburts- und Sterbefälle im Kalenderjahre der Volkszählung erforderlich. Dieser letztere Vorgang soll an dem Beispiele der von Zeuner[1]) durchgeführten Konstruktion von Sterbetafeln für die Gesamtbevölkerung des Königreiches Sachsen erläutert werden.

Die Volkszählung zur Zeit $\tau - \theta$ (Fig. 37), wo θ einen Bruchteil, hier $\frac{1}{12}$, des Jahres bedeutet, trifft die Personen aus dem Geburtsjahre $(t, t+1)$ in den Altersgrenzen $x - \theta$ und $x + 1 - \theta$ (wobei $x = \tau - t - 1$), während eine an der Jahreswende τ selbst vorgenommene Zählung sie in der Altersklasse $(x, x+1)$ antreffen würde. Um nun aus dem Zählungsergebnis, das geometrisch durch $C_1'C_2'$ dargestellt ist und mit $V_{\tau-\theta}$ bezeichnet werden soll, die beiden Gesamtheiten

$$V_x, \quad V_{x+1}$$

abzuleiten, die in der Figur durch die Linien B_1C_2, C_1B_2 vertreten sind, ist die Beobachtung folgender Gesamtheiten von Gestorbenen notwendig:

M_1': Personen, welche in der Zeit $(\tau - \theta, \tau)$ *vor* Vollendung des Alters x gestorben sind;

M_2': Personen, die im Kalenderjahre der Zählung, aber vor dieser, *nach* Vollendung des Alters x gestorben sind;

1) Zeitschr. d. Königl. Sächs. Statist. Bur. XI (1894).

M_3': Personen, die im Kalenderjahre der Zählung, aber nach dieser und *nach* Vollendung des Alters x starben;

M'': Personen, die in dem *folgenden* Kalenderjahre *vor* Vollendung des Alters $x+1$ starben,

lle stammend aus dem Geburtsjahre $(t, t+1)$. Die Figur läßt dann nmittelbar erkennen, daß

$$V_x = V_{\tau-\theta} - M_1' + M_2',$$
$$V_{x+1} = V_{\tau-\theta} - (M_1' + M_3' + M'');$$

araus ergibt sich wieder ie Lebenswahrscheinlicheit der x-jährigen:

$$p_x = \frac{V_{x+1}}{V_x}.$$

So ergab beispielseise die sächsische Volksählung vom 1. Dezember 890 an Lebenden männchen Geschlechtes aus dem eburtsjahre 1888

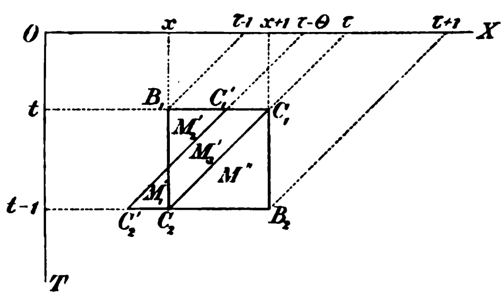


Fig. 37.

$$V_{\tau-\theta} = 46443;$$

rner lieferten die für diesen Zweck besonders angelegten Sterbeegister folgende Daten:

$M_1' = 6$ (Gestorbene unter zwei Jahren aus dem Dezember 1890, geboren 1888);

$M_1'' = 591$ (Gestorbene über zwei Jahren aus Januar bis November 1890, geboren 1888);

$M_1''' = 135$ (Gestorbene über zwei Jahren aus dem Dezember 1890, geboren 1888);

$M'' = 591$ (Gestorbene unter drei Jahren aus dem Jahre 1891, geboren 1888);

raus berechnet sich

$$V_2 = 46443 - 6 + 591 = 47028$$
$$V_3 = 46443 - (6 + 135 + 591) = 45711,$$
$$p_2 = \frac{45711}{47028} = 0{,}97200.$$

In der untersten Altersklasse (0, 1) entfällt die Gesamtheit M_1' d es treten an ihre Stelle die Geborenen aus der Zeit $(\tau - \theta, \tau)$, jedoch *additiv* in Rechnung zu stellen sind.

190. Die Deutsche Sterbetafel. Die vorstehenden Prinzipien sind bei der Konstruktion der Deutschen Sterbetafel von 1887[1]), der ersten, welche die Sterblichkeit der deutschen Reichsbevölkerung darstellt, zur Anwendung gebracht worden. Um der Berechnung eine möglichst breite Grundlage zu geben und dadurch den Einfluß der unvermeidlichen Fehler nach Möglichkeit einzuschränken, sind die Ergebnisse dreier Volkszählungen, derjenigen in den Jahren 1871, 1875 und 1880, und die Sterbefälle aus dem Zeitraume 1871 bis 1881 benützt worden, wobei jedoch die beiden äußersten Kalenderjahre, nämlich 1871 und 1881, nur mit einem Teile der beobachteten Sterbefälle in Rechnung kommen. Selbstverständlich ist auch auf die Wanderungen Rücksicht genommen worden. Da die Volkszählungen je am 1. Dezember der genannten drei Jahre stattfanden, so war die Fortschreibung ihrer Ergebnisse auf den nächsten Jahresschluß erforderlich; von dieser im vorigen Artikel erwähnten Prozedur sehen wir hier ab und stellen uns auf den Standpunkt, als hätten die Volkszählungen je am Ende der Jahre 1871, 1875, 1880 stattgefunden. Ihre Ergebnisse bestehen dann in einer Gruppierung der gezählten Personen, nach dem Geschlecht gesondert, nach Geburtsjahren, womit auch ihre Gruppierung nach Altersklassen gegeben ist.

Aus der für eine Jahreswende durch Zählung festgestellten Gruppierung läßt sich die für eine andere Jahreswende geltende Gruppierung rechnungsmäßig feststellen, wenn in der Zwischenzeit Geburten, Sterbefälle und Wanderungen in entsprechender Weise registriert worden sind; man nennt diesen Vorgang die Fortschreibung, beziehungsweise Rückschreibung der betreffenden Volkszählungsergebnisse. Unter den hierfür erforderlichen Elementen sind es die Wanderungen, über welche namentlich mit Rücksicht auf die Altersverhältnisse nur unvollkommene Aufzeichnungen vorliegen; dies nötigt dazu, die Altersverteilung der Wanderungsgewinne und -Verluste auf hypothetischem Wege, durch ein Ausgleichungsverfahren, festzustellen. Hierin liegt der Grund, warum die Fortschreibung der Zählung von 1871 zum Schlusse des Jahres 1875 und die Rückschreibung jener von 1880 zu demselben Zeitpunkte unter einander und mit dem unmittelbaren Ergebnisse der Zählung von 1875 differierende Altersgruppierungen ergeben haben; um diesen Widerspruch aufzuheben, ist aus den drei Zahlen jeder Altersklasse das arithmetische Mittel genommen worden, mit der Maßgabe jedoch, daß dem unmittelbaren Zählungsergebnisse das doppelte Gewicht verliehen wurde. Aus der auf diese Weise rechnungsmäßig hergestellten Altersgruppierung zu Ende 1875 hätten nun die Altersgruppierungen für die Jahreswenden von 1871/72 bis 1880/81 berechnet werden können, wodurch z. B. mit

1) Monatsh. z. Statist. d. Deutschen Reiches. Jahrg. 1887, Nov.-Heft, p. 1—65.

sicht auf eine Altersklasse (32, 33) die in Fig. 38 durch $C_0 C_0'$, $, C_2 C_2', \cdots C_9 C_9'$ dargestellten Gesamtheiten von Lebenden er-n worden wären. Da ferner die aus der Figur ersichtlichen ıentargesamtheiten $m_0'', m_0'; m_1'', m_1'; m_2'', \cdots m_9'', m_9'$; von ›rbenen be-ıtet worden so wären alle mittel vor-en gewesen, die Lebens-Sterbens-rscheinlich-n der 32-jäh-, so weit sie len zehn Ge-jahren 1839 1848 stam-zu bestim-und ähnlich le andern Al-lassen. Die-detaillierte ;ang ist je-

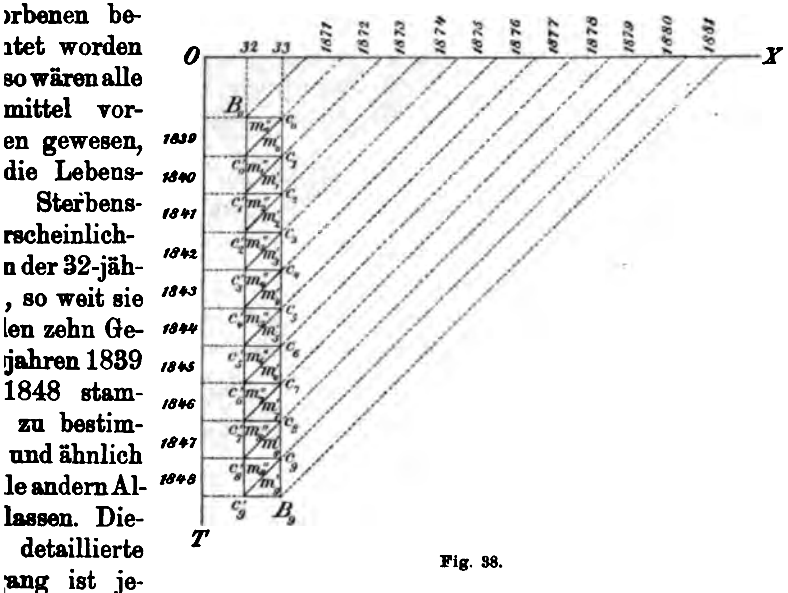


Fig. 38.

nur beispielsweise für *eine* Altersklasse, nämlich für Männer von is 33 Jahren ausgeführt worden und ergab das folgende bemerkens-ɜ Resultat:

3 Jahre alte Männer		Hierzu eine Elementargesamtheit von Gestorbenen[2]) u. der Wanderungsgewinn	Rechnungsmäßige Zahl d. Überlebenden im Alter v. 32 Jahren[3])	Davon sind bis zum Alter von 33 Jahren gestorben[4])	Sterbenswahrscheinlichkeit d. 32-jähr. Männer
stammend aus d. Geburtsjahre	Anzahl[1])				
2	3	4	5	6	7
1839	275 289	1657	276 946	3108	0,01122
1840	278 179	1518	279 697	3011	0,01077
1841	280 651	1570	282 221	2857	0,01012
1842	293 498	1403	294 901	2765	0,00938
1843	275 610	1305	276 915	2749	0,00993
1844	283 713	1273	284 986	2650	0,00930
1845	292 720	1341	294 061	2763	0,00940
1846	276 749	1313	278 062	2650	0,00953
1847	266 950	1143	268 063	2495	0,00931
1848	280 217	1085	281 302	2630	0,00935

1) Mit Bezug auf die Figur die durch $C_0 C_0'$, $C_1 C_1'$, $\cdots$ $C_9 C_9'$ dargestellten ntheiten. 2) Es sind dies die Gesamtheiten $m_0'', m_1'', \cdots m_9''$.
3) Die Gesamtheiten $B_0 C_0'$, $C_0' C_1'$, $\cdots$ $C_8' C_9'$.
4) Es sind dies die Summen $m_0'' + m_0'$, $m_1'' + m_1'$, $\cdots$ $m_9'' + m_9'$.

Aus den zufälligen Schwankungen der Sterbenswahrscheinlichkeit während der zehn Jahre leuchtet die Tendenz ihrer Abnahme deutlich hervor.

Um für jede Altersklasse nur einen auf das ganze Material basierten Wert der Sterbenswahrscheinlichkeit zu gewinnen, wurde die Summe der in der Spalte 5 angegebenen Überlebenden und die Summe der in der Spalte 6 angeführten Gestorbenen gebildet; der Quotient der letzteren Summe durch die erstere ergab die Sterbenswahrscheinlichkeit.

Was die Summenzahlen der Überlebenden betrifft, so dienten zu ihrer Bildung die summierten Bevölkerungszahlen der betreffenden Altersklasse an den Jahreswenden der Periode 1871/72 bis 1880/81, also die Summen:

$$V_\tau = C_0 C_0' + C_1 C_1' + \cdots + C_9 C_9';$$

ferner die summierten Elementargesamtheiten von Gestorbenen:

$$M'' = m_0'' + m_1'' + \cdots + m_9'';$$

endlich eine Korrektur wegen der Unregelmäßigkeit der Wanderung:

$$W;$$

aus diesen Daten ergibt sich die Zahl der Überlebenden für die untere Altersgrenze:

$$V_x = V_\tau + M'' + W.$$

Die Summenzahl der Gestorbenen hingegen ist:

$$M_x = m_0'' + m_0' + m_1'' + m_1' + m_2'' + \cdots + m_9'' + m_9'.$$

Daraus berechnet sich die Sterbenswahrscheinlichkeit der x-jährigen:

$$q_x = \frac{M_x}{V_x}.$$

Auf Grund der a. a. O. gegebenen Übersichten stellt sich beispielsweise für die Altersklasse (20 bis 21) und das männliche Geschlecht die Rechnung wie folgt:

		$V_\tau = 3\,611\,632$	
m_0''	= 1745	$W = + 332$	$m_0' = 1589$
m_1''	= 1580		$m_1' = 1503$
m_2''	= 1459		$m_2' = 1320$
m_3''	= 1282		$m_3' = 1255$
m_4''	= 1261		$m_4' = 1292$
m_5''	= 1253		$m_5' = 1289$
m_6''	= 1247		$m_6' = 1293$
m_7''	= 1273		$m_7' = 1305$
m_8''	= 1273		$m_8' = 1336$
m_9''	= 1300		$m_9' = 1330$
M''	= 13673		13512

$$V_{20} = 3611632 + 13673 + 332 = 3625637$$
$$M_x = 13673 + 13512 = 27185$$
$$q_x = \frac{27185}{3625637} = 0{,}00750.$$

Die so bestimmten Sterbenswahrscheinlichkeiten sind einer Aus-ichung (s. Nr. 196) unterworfen worden; mittels der *ausgeglichenen* rbenswahrscheinlichkeiten wurde sodann mit Zugrundelegung der is 100000 für die Lebendgeborenen (0-jährigen) die Sterbetafel ›t konstruiert. In etwas abgeänderter Anordnung ist dieselbe in el II am Ende des Buches mitgeteilt. Über die Bedeutung der lumnen ist nach dem vorgeführten nichts weiter zu bemerken, bis die Kolumne mit der Überschrift: Bevölkerung L_x.

Die Zahlen dieser Kolumne bezeichnen die Altersgruppierung, che eine *stationäre Bevölkerung* mit 100000 jährlichen Lebend-urten aufweisen würde, d. i. eine Bevölkerung, in welcher alljähr-ı dieselbe Zahl von Kindern lebend geboren würde und eine ebenso ße Zahl von Personen, stets nach dem Gesetze der Sterbetafel, rbe, wobei auch noch die Geburten sich immer gleichmäßig über Jahr verteilten. Eine *wirkliche Bevölkerung* richtet sich nach sen Zahlen schon deshalb nicht, weil wegen des allenthalben be-ıchteten Überschusses der Geborenen über die Gestorbenen ein An-chsen der Bevölkerung und daher auch ein Anwachsen der jähr-ıen Geburten stattfindet.

Was die Ermittelung der Zahlen L_x aus den Zahlen der Über-›nden l_x und den Zahlen der Gestorbenen d_x anlangt, so kann sie erster Näherung in folgender Weise geschehen. Von den l_x Per-›n, welche das Alter x überleben, sterben vor Erreichung des ›rs $x+1$ im ganzen $d_x = l_x - l_{x+1}$ Personen; diese Gesamtheit ällt in zwei Elementargesamtheiten, die, wenn man sich die befälle gleichmäßig über die Altersklasse verteilt denkt, gleich k und von der Größe $\frac{1}{2} d_x$ sind; bringt man eine dieser Ele-targesamtheiten von l_x in Abzug, so erhält man (s. Nr. 187) die ahl derjenigen Personen, welche zwischen den Altern x und $x+1$ *hzeitig* leben; also ist unter diesen Annahmen

$$L_x = l_x + \frac{1}{2} d_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}. \tag{1}$$

Eine dem Gange der Zahlen besser angepaßte Bestimmung von ist bei der Konstruktion der Deutschen Sterbetafel befolgt worden. kt man sich die durch die Zahlen l_x und d_x der Tafel ausgedrückten ıptgesamtheiten als zu *einer* Generation gehörig, so sind

$$d_{x-1} = a, \quad d_x = b, \quad d_{x+1} = c$$

durch drei neben einander liegende Quadrate (Fig. 39),

$$l_x, \quad l_{x+1}$$

durch deren Trennungslinien $B_1 C_2$, $C_1 B_2$, und das unbekannte

$$L_x$$

durch die Diagonale $C_1 C_2$ des mittleren Quadrates dargestellt. Teilt man auch a und c in die beiden Elementargesamtheiten, so handelt es sich darum, aus den der Tafel entnommenen Hauptgesamtheiten a, b, c von Gestorbenen nach einer plausibeln Annahme die Elementargesamtheiten α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 zu bestimmen; ist dies geschehen, so ist

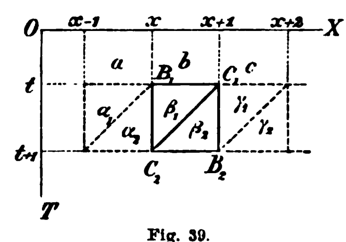


Fig. 39.

$$L_x = l_x - \beta_1, \qquad (2)$$

wie die Figur unmittelbar erkennen läßt. Die Annahme soll nun darin bestehen, daß die sechs Elementargesamtheiten eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden; man hat dann zu ihrer Bestimmung die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 &= a \\
\beta_1 + \beta_2 &= b \\
\gamma_1 + \gamma_2 &= c \\
\alpha_1 - 3\alpha_2 + 3\beta_1 - \beta_2 &= 0 \\
\alpha_2 - 3\beta_1 + 3\beta_2 - \gamma_1 &= 0 \\
\beta_1 - 3\beta_2 + 3\gamma_1 - \gamma_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Die Determinante des Systemes der Koeffizienten:

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & -3 & 3 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -3 & 3 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -3 & 3 & -1
\end{vmatrix}$$

hat den Wert -64; die zu β_1 gehörige Zählerdeterminante:

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & a & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & c & 0 & 1 & 1 \\
1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -1
\end{vmatrix}$$

berechnet sich zu $-4(8b + a - c)$; mithin ist

$$\beta_1 = \frac{b}{2} + \frac{a-c}{16}$$

und daher nach (2):

$$L_x = l_x - \frac{d_x}{2} - \frac{d_{x-1} - d_{x+1}}{16}. \qquad (3)$$

So ergibt sich auf Grund der Kolumnen l_x, d_x von Tafel II für $x = 10$ bei dem männlichen Geschlechte

$$L_{10} = 62089 - \frac{289}{2} - \frac{342 - 253}{16} = 61939$$

als die Zahl derjenigen, welche von 100000 Lebendgeborenen männlichen Geschlechtes auf der Altersstufe von 10 zu 11 Jahren *gleichzeitig* leben[1]).

191. Sterblichkeitskurven. Von den biometrischen Funktionen eignen sich zur geometrischen Darstellung des Sterblichkeitsverlaufes die Zahlen der Überlebenden l_x und die Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x am besten. Eine Kurve, welche l_x als zur Abscisse x gehörige Ordinate besitzt, zeigt die successive Abnahme einer Grundmasse von Geborenen mit zunehmendem Alter; eine Kurve, deren Ordinate q_x ist, wie die Erwartung, im Laufe des nächsten Altersjahres zu sterben, mit dem Alter sich ändert. Beide Kurven bezeichnet man als *Sterblichkeitskurven.*

Fig. 40 zeigt ihren Verlauf mit Zugrundelegung der Zahlen der Deutschen Sterbetafel für das männliche Geschlecht. Der Ordinatenmaßstab für die „Kurve der Überlebenden“ ist links, jener für die „Kurve der Sterbenswahrscheinlichkeiten“ rechts aufgetragen. Übrigens gibt die letztere Kurve auch eine Darstellung der Lebenswahrscheinlichkeiten, wenn man die Alter auf der oberen Begrenzungslinie des Diagrammes abliest und den rechts befindlichen Maßstab umgekehrt bezeichnet.

---

1) Von andern Tafeln für ganze Bevölkerungen seien hier angeführt: Die *preußische* Sterbetafel, berechnet von Firks aus dem Mittel der Sterbetafeln von 1867, 1868, 1872, 1875, 1876, 1877 (Zeitschr. d. k. pr. Stat. Bur. 1882); die *schweizerische* Sterbetafel, gegründet auf die Sterbefälle aus der Periode 1876/77 bis 1880/81 (Schweizer. Statist. LVI, 1883); die *französische* Sterbetafel aus Beobachtungen des Zeitraumes 1877 bis 1881, nach fünfjährigen Altersklassen fortschreitend (Stat. d. la France XI, 1884); die *englische* Sterbetafel aus Beobachtungen des Zeitraumes 1871 bis 1880, zum großen Teil interpoliert, da die Sterbefälle nur nach 5- und 10-jährigen und nur in den untersten Jahren nach 1-jährigen Altersklassen ausgewiesen waren (Suppl. of the 45th annual report of the Registral-General of birthes, deaths and mariages, 1885); die *niederländische* Sterbetafel, aus den Volkszählungen am 1. XII. 1869 und 1. XII. 1879 und den zwischenliegenden Geburten und Sterbefällen von van Pesch berechnet (Bijdragen van het statistisch Instituut 1885).

Die Unterschiede zwischen den beiden Geschlechtern zum Ausdruck zu bringen, ist der gewählte Maßstab wenig geeignet. Dagegen zeigt die genauere Verfolgung der beiderseitigen Sterbenswahrscheinlichkeiten, daß im großen Ganzen das weibliche Geschlecht dem männlichen gegenüber begünstigt ist; nur in den Perioden 9 bis 15

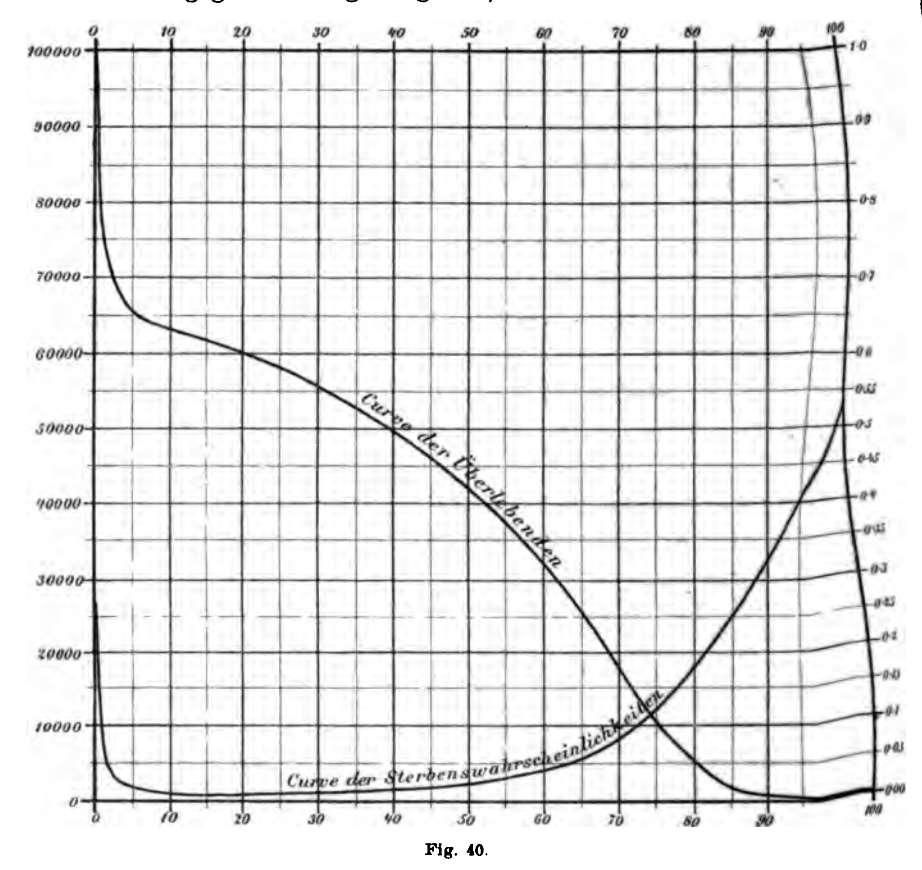


Fig. 40.

und 27 bis 35 erhebt sich die Sterbenswahrscheinlichkeit des weiblichen Geschlechtes ein wenig über die des männlichen, wogegen sie in manchen Alterslagen, so zwischen 50 und 60, recht erheblich hinter ihr zurückbleibt. Die Kurve der Überlebenden des weiblichen Geschlechtes verbleibt in ihrem ganzen Verlaufe oberhalb jener des männlichen Geschlechtes, mit der sie bei 100 000 einen gemeinsamen Ausgangspunkt hat.

192. Sterbetafeln aus Beobachtungen an Versicherten. In Versicherungs- und andern „geschlossenen" Gesellschaften, die über ihre Mitglieder einen Kataster führen, tritt an die Stelle der Massenbeobachtung die *individuelle* Beobachtung. Jedes Mitglied bleibt vom

itpunkte seines *Eintrittes* bis zu dem Zeitpunkte seines *Austrittes* Evidenz, und die zwischen beiden verflossene Zeit bestimmt die ›sem Mitgliede entsprechende *Beobachtungsdauer*. Was den Grund s Austrittes anlangt, so kann er in dem Ablaufe der Versicherung, der Nichterfüllung der Bedingungen, in einer freiwilligen Entnließung des Versicherten oder in dem Ableben gelegen sein; Austte der letzten Art bilden die in der Gesellschaft beobachteten *desfälle*.

Erfolgte der Eintritt immer nur an einem Geburtstage, so würde h die Sterblichkeitsmessung einfach gestalten: die Summe aus denligen, welche das Alter x in der Gesellschaft überschritten, und njenigen, welche genau im Alter x eintraten, gäbe den Nenner, und Anzahl jener, welche in einem Alter zwischen x und $x + 1$ in r Gesellschaft gestorben sind, den Zähler für eine empirische Bemmung der Sterbenswahrscheinlichkeit der x-jährigen, eine Bemmung allerdings, welche von der Geburtszeit absieht.

In Wirklichkeit aber geschieht der Eintritt ebenso wie der Austt zu beliebigen Zeiten.

Eine Person, welche im Alter $x - \theta$ eintritt und im Alter $+ k + \theta'$ austritt — x, k sind positive ganze Zahlen, θ, θ' positive ıte Brüche —, steht durch $k + \theta + \theta'$ Jahre unter Beobachtung; überschreitet während derselben die Altersgrenzen $x, x + 1, \cdots x + k$ d durchlebt somit k *volle* Altersklassen innerhalb der Gesellschaft; ırde man also von den Jahresbruchteilen θ, θ' der Beobachtungsuer absehen, so könnte die an der Person vollzogene Beobachtung die Sterblichkeitsmessung der k Alter $x, x + 1, \cdots x + k - 1$ verrtet werden. Ein solcher Vorgang wäre aber mit einer Schmälerng des Beobachtungsmaterials verbunden, wie dies auch aus der lgenden Betrachtung hervorgeht.

Angenommen, es handle sich um die Sterbenswahrscheinlichkeit r x-jährigen. Man hat unter den Mitgliedern der Gesellschaft zu ıterscheiden:

1) solche, welche das Alter x unter Beobachtung überschritten ben;

2) solche, welche auf der Altersstufe $(x, x + 1)$ in die Gesellıaft eingetreten sind.

Die Gruppe 1) zerfällt wieder in solche,

a) die das nächste Alter $x + 1$ unter Beobachtung überschreiten;

b) die auf der Altersstufe $(x, x + 1)$ in der Gesellschaft sterben;

c) die auf dieser Altersstufe austreten.

Die Gruppe 2) hinwiederum trennt sich in solche,

a) die das nächste Alter $x + 1$ unter Beobachtung überschreiten;

b) die vor Erreichung dieses Alters in der Gesellschaft sterben;

c) die vor Erreichung desselben aus der Gesellschaft austreten.

Für den gedachten Zweck würden bei dem oben erwähnten Vorgange nur die Gruppen 1a) und 1b) zur Verwendung kommen, und zwar wäre q_x der Quotient aus 1b) durch 1a) + 1b). Gänzlich außer Betracht blieben die Gruppen 2b) und 2c), während 2a) erst bei der nächst höheren Altersstufe $x + 1$ in Verwendung gezogen würde.

Man hat nun gesucht, die *ganze* Beobachtungsdauer auszunützen; tatsächlich ist dies mit gewissen Annahmen erreichbar, die wenigstens bei Ausschluß der jüngsten Altersstufen, welche aber hier ohnehin nicht in Betracht kommen, sich von den wirklichen Verhältnissen nicht viel entfernen dürften. Die bezüglichen Entwicklungen bilden den Gegenstand des nächsten Artikels.

193. Einbeziehung der Ein- und Austretenden. Es handle sich um die Ermittelung der Sterblichkeitswahrscheinlichkeit q_x der x-jährigen. Dabei sollen folgende Daten zur Verwendung kommen:

Die A Personen, welche das Alter x unter Beobachtung *überschritten* haben;

die B Personen, welche zwischen den Altern x und $x+1$ *eingetreten* sind;

die C Personen, welche zwischen den Altern x und $x+1$ *ausgetreten* sind;

die M Personen, deren *Ableben* auf der genannten Altersstufe beobachtet wurde.

In der nachfolgenden Betrachtung bezeichne $l(z)$ die Menge der Überlebenden des Alters z und werde als stetige Funktion von z vorausgesetzt.

Zunächst ist eine plausible Annahme über die Verteilung der Ein- und Austritte erforderlich, um eine allgemeine Rechnung aufnehmen zu können; als solche darf wohl die gelten, *daß sich die Ein- und die Austritte gleichmäßig über die einjährige Altersstufe verteilen.*

Dies vorausgesetzt, stellt sich die Anzahl derjenigen, welche in dem Zeitintervall $x + h$ bis $x + h + dh$ (h und $h + dh$ positiv und kleiner als 1) eingetreten sind, auf Bdh; diesen entsprechen

$$Bdh \cdot \frac{l(x)}{l(x+h)}$$

Personen, die durch das Alter x gingen, ohne hierbei beobachtet worden zu sein; folglich sind davon

$$Bdh \cdot \frac{l(x)}{l(x+h)} - Bdh = \left\{\frac{l(x)}{l(x+h)} - 1\right\} Bdh \tag{1}$$

auf der Altersstufe $(x, x+1)$ gestorben, ohne daß die betreffenden Todesfälle in der Gesellschaft zur Beobachtung gekommen wären.

In demselben Zeitintervall sind ferner Cdh Personen aus der Gesellschaft ausgetreten; von diesen werden

$$Cdh \cdot \frac{l(x+1)}{l(x+h)}$$

Alter $x+1$ überschreiten, ohne mehr unter Beobachtung zu
ıen; folglich sterben, ebenfalls außer Beobachtung,

$$Cdh - Cdh \cdot \frac{l(x+1)}{l(x+h)} = \left\{1 - \frac{l(x+1)}{l(x+h)}\right\} Cdh \tag{2}$$

sonen.

Es ist also im Ganzen so, als ob

$$A + Bl(x) \int_0^1 \frac{dh}{l(x+h)}$$

sonen unter Beobachtung durch das Alter x gegangen und

$$M + B\left\{l(x) \int_0^1 \frac{dh}{l(x+h)} - 1\right\} + C\left\{1 - l(x+1) \int_0^1 \frac{dh}{l(x+h)}\right\}$$

sonen unter Beobachtung gestorben wären; daraus berechnet sich,
ın man zur Abkürzung

$$\int_0^1 \frac{dh}{l(x+h)} = J$$

zt, die Sterbenswahrscheinlichkeit:

$$q_x = \frac{M + B\{Jl(x) - 1\} - C\{Jl(x+1) - 1\}}{A + BJl(x)},$$

raus auch

$$Aq_x + (B - C)\{1 - l(x+1)J\} = M \tag{3}$$

gt.

Um die Rechnung weiterführen zu können, ist eine Annahme
er die Verteilung der Sterbefälle notwendig, und diese kann, da
n den jüngsten Altersklassen abgesehen werden darf, dahin getroffen
rden, *daß die Todesfälle einer einjährigen Altersklasse sich gleich-
ßig über dieselbe verteilen.*

Analytisch ausgedrückt heißt dies, daß

$$l(x) - l(x+h) = h[l(x) - l(x+1)]; \tag{4}$$

ın aber ist

$$J = \int_0^1 \frac{dh}{l(x) - h[l(x) - l(x+1)]} = \frac{1}{l(x) - l(x+1)} \operatorname{Log} \frac{l(x)}{l(x+1)},$$

1 die Gleichung (3) geht mit Rücksicht darauf, daß $\frac{l(x+1)}{l(x)} = 1 - q_x$
, über in:

$$Aq_x + (B - C)\left\{1 + \frac{1 - q_x}{q_x} \operatorname{Log}(1 - q_x)\right\} = M. \tag{5}$$

Die Entwicklung des den natürlichen Logarithmus enthaltenden Gliedes gibt aber

$$(1-q_x)\left[-1-\frac{q_x}{2}-\frac{q_x^2}{3}-\cdots\right],$$

und dies reduziert sich, wenn man bei der ersten Potenz von q_x mit Rücksicht auf dessen Kleinheit stehen bleibt, auf $-1+\frac{q_x}{2}$. Die Einführung dieses Wertes verwandelt (5) in

$$A q_x + \frac{B-C}{2} q_x = M,$$

woraus schließlich

$$q_x = \frac{M}{A+\frac{B-C}{2}} \tag{6}$$

folgt[1]). Man hat also die Anzahl der in der Gesellschaft beobachteten Todesfälle mit einer ideellen oder *rechnungsmäßigen* Zahl von Überlebenden des untern Alters x zu verbinden, welch letztere erhalten wird, wenn man die Anzahl der beobachteten x-jährigen um die halbe Anzahl der Eingetretenen vermehrt und um die halbe Anzahl der Ausgetretenen vermindert.

Eine andere Hypothese über die Verteilung der Ein- und Austretenden hat Zeuner[2]) der Rechnung unterlegt und eine Formel abgeleitet, die wir wegen der Anwendung, die er von ihr für die Lösung eines andern Problems, die Invalidität betreffend, gemacht hat, hier entwickeln werden; bezüglich der jetzt vorliegenden Aufgabe der Sterblichkeitsmessung führt diese Formel wieder auf das Resultat (6). Die Hypothese Zeuners geht dahin, *daß die relative Häufigkeit der Ein- und Austritte bei irgend einem Alter proportional sei der Menge der Überlebenden dieses Alters.* Sie stützt sich also auf die Vermuthung, daß je mehr Personen eines Alters vorhanden sind, um so mehr Personen dieses Alters ein- und austreten werden.

Auf Grund dieser Annahme beträgt die Menge der in dem Altersintervall $(x+h,\ x+h+dh)$ Eintretenden

$$\beta l(x+h)\,dh, \tag{7}$$

jene der Austretenden

$$\gamma l(x+h)\,dh, \tag{8}$$

wobei β, γ Konstanten bedeuten, die sich auf Grund der Bemerkung ergeben, daß das Integral von (7), über das Intervall (0, 1) erstreckt die bekannte Zahl B der Eingetretenen und das ebenso bestimmte Integral von (8) die Zahl C der Ausgetretenen geben muß; also ist

1) Vgl. Deutsche Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von 23 Lebenversicherungsgesellschaften etc. Berlin 1883, p. XXIX—XXXI; ferner Th. Wittstein im Arch. f. Math. u. Phys., XXXIX.

2) Abhandlungen aus der mathem. Statist., p. 116ff.

$$\beta \int_0^1 l(x+h)\,dh = B,$$

$$\gamma \int_0^1 l(x+h)\,dh = C.$$

.cht man über die Verteilung der Sterbefälle dieselbe Annahme wie rhin, so gilt der Ansatz (4), aus welchem

$$l(x+h) = l(x) - h\,[l(x) - l(x+1)]$$

d

$$\int_0^1 l(x+h)\,dh = \frac{l(x) + l(x+1)}{2} \tag{9}$$

gt; hiermit ergeben die obigen Gleichungen

$$\beta = \frac{2B}{l(x) + l(x+1)}, \quad \gamma = \frac{2C}{l(x) + l(x+1)}.$$

Bezeichnet man die Anzahl derer, welche in der Gesellschaft das ter $x + 1$ erreichen, mit A_1, so kann diese in zweifacher Weise sgedrückt werden. Einmal besteht sie aus den A ursprünglich rhandenen und aus den Eingetretenen, vermindert um die Austretenen und Gestorbenen, so daß

$$A_1 = A + B - C - M; \tag{10}$$

f der andern Seite setzt sie sich aus den Überlebenden der urrünglich Vorhandenen und der successive Eingetretenen, vermindert i die Überlebenden der successive Ausgetretenen; nun leben von n Eingetretenen (7) im Alter $x + 1$ noch

$$\beta l(x+h)\,dh \cdot \frac{l(x+1)}{l(x+h)} \quad \text{oder} \quad \beta l(x+1)\,dh,$$

n allen Eingetretenen also

$$\beta l(x+1) \int_0^1 dh = \beta l(x+1),$$

n den Ausgetretenen (8) noch

$$\gamma l(x+h)\,dh \frac{l(x+1)}{l(x+h)} \quad \text{oder} \quad \gamma l(x+1)\,dh,$$

n allen Ausgetretenen demnach

$$\gamma l(x+1) \int_0^1 dh = \gamma l(x+1);$$

infolgedessen ist auch

$$A_1 = Ap_x + (\beta - \gamma)\, l(x+1)$$

und dies verwandelt sich nach Einsetzung der Werte für β, γ und mit Beachtung des Umstandes, daß $\frac{l(x+1)}{l(x)} = p_x$ ist, in den Ansatz:

$$A_1 = p_x\left[A + \frac{2(B-C)}{1+p_x}\right]. \tag{11}$$

Verbindet man die beiden Ausdrücke (10) und (11) für A_1 zu einer Gleichung und führt dabei q_x statt p_x ein, so wird:

$$A + B - C - M = (1 - q_x)\left[A + \frac{B - C}{1 + \frac{q_x}{2}}\right];$$

entwickelt man rechts bis auf Glieder der ersten Ordnung in q_x, so entsteht weiter

$$A + B - C - M = A(1 - q_x) + (B - C)\left(1 - \frac{q_x}{2}\right),$$

woraus nach entsprechender Reduktion

$$M = \left(A + \frac{B-C}{2}\right) q_x$$

folgt, was im Wesen mit der Gleichung (6) übereinstimmt.

194. Gewinnung des Materials. Da eine Sterbetafel, welche die Sterblichkeit von Versicherten nach dem Alter, eventuell auch nach andern zeitlichen Bestimmungen, zur Darstellung bringen soll, einer breiten Grundlage bedarf, die für alle in Betracht kommenden Alter genügende Daten beibringt, so werden nur sehr große Anstalten aus ihren eigenen Beobachtungen geeignetes Material zur Konstruktion einer solchen Tafel zu gewinnen imstande sein, und dies nur dadurch, daß sie die Erfahrungen eines sehr beträchtlichen Zeitraumes zusammenfassen. Der letztere Umstand ist aber dem Werte der Tafel abträglich, weil während eines sehr langen Zeitraumes auf Beständigkeit der Sterblichkeitsverhältnisse nicht zu zählen ist.

Diese Erkenntnis hat dazu geführt, daß Gesellschaften, welche unter annähernd gleichartigen Verhältnissen arbeiten, ihre Erfahrungen zu einem Material gesammelt haben, das dann vermöge seines bedeutenden Umfanges eine Gewähr bot für die Zuverlässigkeit der erzielten Resultate, gleichzeitig auch die für die Erledigung zahlreicher praktischer Fragen der Lebensversicherung erforderliche Differentiierung der Beobachtungen nach verschiedenen Gesichtspunkten zuließ. So sind aus den vereinigten Beobachtungen von Gesellschaftsgruppen wertvolle Untersuchungen über die Sterblichkeit unter Versicherten hervorgegangen.

Von Tafeln, welche sich auf die Erfahrungen *einer* Gesellschaft ziehen, seien angeführt die *Sterbetafeln von Brune*[1]), gerechnet aus n Aufzeichnungen der Königl. Preußischen Allgemeinen Witwen-rpflegungsanstalt in Berlin (zuerst 1776—1834, später 1776—1845), *Gothaer Tafeln*[2]), abgeleitet von den Erfahrungen der Lebensver-cherungsbank für Deutschland in Gotha (1829—1878), die *Beamten-reinstafel*[3]), gegründet auf die Statistik des Ersten Allgemeinen Be-ntenvereins der österr.-ungar. Monarchie (1865—1888).

Aus vereinigten Beobachtungen sind insbesondere hervorgegangen *Tafeln der 17 englischen Gesellschaften*[4]) (1843), die *Tafeln der britischen Gesellschaften*[5]) (1869), die *Tafeln der 30 amerikanischen esellschaften*[6]) (1881), die *Deutschen Sterblichkeitstafeln* aus den Er-hrungen von 23 Gesellschaften[7]) (1883), die *Tafeln der 4 französi-chen Gesellschaften*[8]) (1885). In England ist die Publikation neuer ntersuchungen im Zuge[9]), und die österreichischen Versicherungs-sellschaften haben eine auf ihr Gebiet bezügliche Aktion begonnen.

Seit dem an der zweiten Stelle genannten Kollektivunternehmen t sich die für die gleichmäßige Durchführung derartiger Arbeiten chst wichtige und zweckmäßige Einrichtung der *Zählkarten* ein-bürgert. Jedem „Fall" wird eine solche Karte zugewiesen, welche e jene Daten in möglichst kurzer und übersichtlicher Darstellung thält, die zur Ausführung der geplanten Untersuchungen erforderlich d. Solche Daten, die bei der Sterblichkeitsforschung teils obligato-che, teils fakultative Verwendung finden, sind:

1) Zeitangaben, welche geeignet sind, das Eintritts- und das strittsalter des „Falles" zu bestimmen; die Schärfe dieser Angaben von dem erheblichsten Einfluß auf den Wert der Resultate; viele r älteren Arbeiten waren durch die Unbestimmtheit dieser Angaben sentlich beeinträchtigt.

2) Angaben über die Art des Austrittes, ob derselbe durch Tod, rch Erleben des versicherten Ereignisses, durch freiwilliges Aus-neiden oder in irgend einer andern noch möglichen Weise erfolgt ist.

---

1) Journal f. d. reine u. angew. Mathem. 16 (1837), p. 16ff. — Allgem. rsicherungszeitung 1847, p. 187 u. 196.

2) Mitteil. a. d. Geschäfts- u. Sterblichkeitsstatist. d. Lebensvers.-Bank f. utschland in Gotha, 1880.

3) Der Erste Allgem. Beamtenverein der österr.-ungar. Monarchie. Denk-rift, Wien 1890.

4) Tables exhibiting the law of mortality etc. London 1869.

5) The mortality experiences of life insurance companies etc. London 1869.

6) System and Tables of Life Insurance. Norwich, Conn. 1881.

7) Deutsche Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von 23 Lebensver-herungsgesellschaften. Berlin 1883.

8) Tables de mortalité du comité des compagnies d'assurances etc. Paris 1885.

9) Das unausgeglichene Material ist 1899—1900 in vier Bänden unter dem tel: „Combined experience of assured lives (1863—1893) etc.", London, erschienen.

3) Bezeichnung des Geschlechtes der betreffenden Personen. Bei allen neueren Untersuchungen werden die Geschlechter auch getrennt behandelt, weil sich die Unterschiede ihrer Sterblichkeit als praktisch von Belang erwiesen haben.

4) Angabe des Aufnahmeaktes, eventuell des Ergebnisses der Auslese (der ärztlichen Untersuchung). Bei gewissen Versicherungen erfolgt die Aufnahme ohne weiteres; bei andern geht ihr eine mehr oder weniger eingehende Untersuchung der konstitutiven Anlage voraus, auf Grund welcher die Person als „normal" oder als „minderwertig" aufgenommen wird; in letzterem Falle erfolgt die Aufnahme unter verschärften Zahlungsbedingungen und der Grad der Verschärfung bildet den Ausdruck für den Grad der Minderwertigkeit. Diese Umstände sind selbstredend von Einfluß auf den Sterblichkeitsverlauf.

5) Angabe der Todesursache, wenn es sich um die Feststellung der Häufigkeit und Wirkung verschiedener Todesursachen auf verschiedenen Altersstufen handelt.

6) Bezeichnung der Versicherungsart. Der Wahl der Versicherungskombination geht eine oft unbewußte Selbstprüfung voraus, die im einzelnen Falle wohl trügerisch sein kann, in der großen Menge aber doch deutlich zum Ausdruck kommt; denn die Erfahrung hat gelehrt, daß unter den Versicherten verschiedener Kombinationen, wie Todesfall-, gemischte und Rentenversicherungen, ungleiche Sterblichkeit herrscht.

7) Angabe der versicherten Summe (in festgesetzten Abstufungen). Die Höhe dieser Summe hängt mit den wirtschaftlichen und daher auch mit den Lebensverhältnissen der versicherten (zahlenden) Person zusammen, ist also ein die Sterblichkeit mitbestimmender Faktor.

8) Angabe des Wohnsitzes, wenn es sich darum handelt, die Sterblichkeit nach Territorien zu beurteilen.

9) Angaben, welche zur Feststellung der Identität des „Falles", eventuell der „Person" geeignet sind. Solche sind die Bezeichnung der Anstalt, die Anführung einer den Fall charakterisierenden Nummer, im zuletzt gedachten Falle die Angabe des Namens (oder der Namen bei weiblichen Personen).

Die sorgfältige Feststellung des Inhaltes der Zählkarte nach Maßgabe der geplanten Arbeitsziele ist eine Angelegenheit von der größten Wichtigkeit. Nebenbei sei bemerkt, daß einzelne der geforderten Merkmale sehr vorteilhaft durch die *Farbe* der Zählkarte zum Ausdruck gebracht werden können.

Eine andere wichtige Frage ist die, was als „Beobachtungsfall" zu gelten habe, die Frage nach der *Zähleinheit*. In dieser Beziehung sind bisher verschiedene Auffassungen des Problems der Sterblichkeitsmessung an Versicherten zur Verwirklichung gekommen, so daß auch

den gewonnenen Resultaten strenge genommen verschiedene innere Bedeutung zukommt. Als Zähleinheit ist verwendet worden:

a) Die Police (d. i. der Versicherungsvertrag) ohne Rücksicht auf die Person, deren Leben sie betrifft, so daß eine mehrfach, bei derselben Anstalt oder bei verschiedenen Gesellschaften, versicherte Person so oft als Beobachtungsfall gezählt wird, als sie Verträge abgeschlossen hat (z. B. bei den 17 englischen Gesellschaften).

b) Die Person. Die Durchführung dieses Grundsatzes erfordert, daß zunächst jede der kooperierenden Gesellschaften für jede Person, mag sie auch mehrfach bei ihr versichert sein, nur eine Karte ausstellt (das Prinzip, nach welchem diese Karte bei mehrfachen Versicherungen ausgefüllt werden soll, muß klar festgesetzt sein), und daß die Stelle, bei welcher das gesamte Material zusammen kommt, für eine und dieselbe Person betreffende Karten nur eine Karte herstellt, wofür wieder klare Bestimmungen erforderlich sind[1]). (Beispiel: 23 deutsche Gesellschaften.)

c) Die versicherte Summe. Bei diesem Vorgange wird nicht nur auf jede neu versicherte Summe, sondern auch auf jede Abänderung dieser Summe im Laufe der Versicherungsdauer eine Zählkarte ausgestellt und als Beobachtungsfall behandelt. (Beispiel: 30 amerikanische Gesellschaften.)

d) Die Auslese (Selektion). Jede Versicherung, die auf Grund einer *selbständigen* ärztlichen Untersuchung abgeschlossen wird, gilt als „Fall" und erhält eine Karte. Über die Behandlung unterbrochener Versicherungen sind genaue Bestimmungen erforderlich, ebenso darüber, wie die Karte über eine Gruppe von Versicherungen zu lauten hat, die auf Grund *eines* Ausleseaktes gleichzeitig abgeschlossen worden sind. (Beispiel: Beamtenvereinstafel.)

Die Frage, welche von diesen Modalitäten den Vorzug verdient, ist nicht so ohne weiteres zu beantworten; es kommen dabei Rücksichten auf den Zweck, auch solche auf die Möglichkeit der praktischen und konsequenten Durchführung des betreffenden Modus in Betracht. Wenn man das biologische Interesse in den Vordergrund stellt, so muß die Person Zähleinheit sein; die konsequente und einwandfreie Verwirklichung dieses Gedankens stößt aber auf erhebliche Schwierigkeiten, die sich hauptsächlich aus der Feststellung der Identität mehrfacher und aus der Behandlung unterbrochener Versicherungen ergeben. Dem rein geschäftlichen Interesse trägt die Zähleinheit c) Rechnung; die auf sie gestützten Resultate haben vom Standpunkte der Biologie geringe, weil unklare Bedeutung. Dem Wesen der Versicherung paßt

1) Es ist selbstverständlich, daß eine Person, die vermöge gewisser Merkmale mehreren untersuchten Kategorien angehört, auch in jeder derselben, aber einfach, gezählt wird.

sich die Modalität d) naturgemäß an, die jede Versicherung, welche auf Grund einer selbständigen Auslese abgeschlossen wird, als einen Beobachtungsfall ansieht; ihr kommt auch der Vorteil der leichten und sicheren Durchführbarkeit zu. Angestellte Untersuchungen haben überdies gezeigt, daß die aus den Modalitäten d) und b) hervorgehenden Resultate nur wenig von einander abweichen.

Ist das Zählkartenmaterial, nachdem es einer sorgfältigen Revision unterzogen und von fehlerhaften, wie zweifelerregenden Karten gereinigt worden, in die Kategorien aufgeteilt, die einer gesonderten Untersuchung zugeführt werden sollen, dann erfolgt die Aufarbeitung desselben für die eigentliche Sterblichkeitsmessung, die wieder eines ins Detail ausgearbeiteten Planes bedarf. Im nachfolgenden werden die Deutschen Tafeln als ein modernes, auf hoher Stufe stehendes Beispiel der Sterblichkeitsmessung an Versicherten in Kürze besprochen[1]).

195. Die Tafeln der 23 deutschen Gesellschaften. Als Zähleinheit wurde die Person festgesetzt. Von den 982 520 Zählkarten, welche die an dem großen Unternehmen beteiligten 23 Gesellschaften (21 deutsche, je 1 österreichische und schweizerische) auf Grund einer Instruktion einsandten, verblieben nach Ausscheidung von 124 020 Stück (davon 115 825 wegen mehrfacher Versicherung)

858 500,

die der Bearbeitung unterzogen wurden.

Aus diesem Material sind durch Zerlegung desselben in vier Kategorien und Trennung jeder Kategorie in die beiden Geschlechter acht Original-Sterbetafeln abgeleitet worden; diese Kategorien sind:

1) Personen mit vollständiger ärztlicher Untersuchung und normaler Prämie (die zugehörigen Tafeln für Männer, beziehungsweise Weiber führen die Bezeichnungen MI., WI.);
2) Personen mit vollständiger ärztlicher Untersuchung und erhöhter Prämie (MII., WII.);
3) Personen mit unvollständiger ärztlicher Untersuchung (Begräbnisgeld- und Sterbekassenversicherungen [MIII., WIII.]);
4) Personen ohne ärztliche Untersuchung (Erlebens- und Rentenversicherungen [MIV., WIV.]).

Die Zeitangaben, die eingefordert wurden, entsprechen den Anforderungen an eine strenge Sterblichkeitsmessung; jede Karte hat zu enthalten: das Datum des Austrittes, des Eintrittes und der Ge-

1) Für eine historisch-kritische Darstellung der älteren und neueren Unternehmungen auf diesem Gebiete vgl. E. Roghés Monographie: Geschichte und Kritik der Sterblichkeitsmessung bei Versicherungsanstalten. Suppl. XVIII der Jahrb. f. Nation-Ök. u. Statist., 1891.

urt nach Jahr, Monat und Tag, so daß Beobachtungsdauer, Eintritts- nd Austrittsalter in voller Schärfe berechnet werden konnten.

Außer diesen Angaben trug die Karte: das Merkmal der Kategorie nd des Geschlechtes, dem sie angehört; die Bezeichnung der Gesellchaft, von der sie stammte, und die Policennummer; die Bezeichnung er Art des Austrittes; die Angabe der Todesursache; die Bezeichnung es Domiziles; die genaue Namensbezeichnung des Versicherten.

Um den Gang der Arbeit klar zu machen, bedienen wir uns der eometrischen Darstellung (Nr. 182—184). Die Zeitangaben gestatten s, für jede beobachtete Person eine *Beobachtungslinie* zu konstruieren, eren Anfangspunkt (E) dem Eintritt, deren Endpunkt dem Austritt nd deren Länge der Beobachtungsdauer entspricht. Die Angaben ber die Art des Austrittes führen ferner zu einer Scheidung der ustrittspunkte in drei Kategorien: in Sterbepunkte (T), in Punkte es Ausscheidens bei Lebzeiten (A), in Punkte des Ausscheidens aus er Beobachtung durch Erreichen des Schlußtermines der Beobachungen im versicherten Zutande (V); dieser Endtermin var mit dem 31. Dezember 1875 estgesetzt.

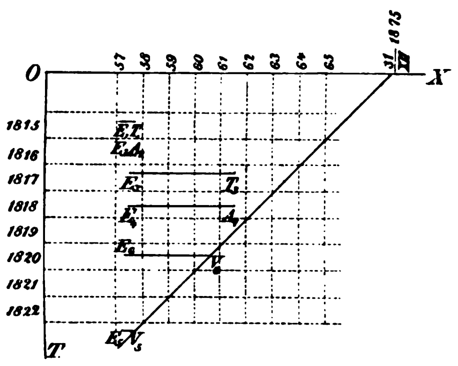


Fig. 41.

Die Fig. 41 zeigt charakteistische Beispiele aller in Beracht kommenden Beobachngslinien. Der Eintrittspunkt egt durchwegs auf der Altersufe 57—58, aber in verschieenen Geburtsjahren: es handelt sich also um Personen, eren Eintrittsalter zwischen 7 Jahren (einschl.) und 58 Jahren (ausschl.) liegt, ohne Rücksicht uf die Zeit der Geburt. Im besonderen betrifft:

$E_1 T_1$ eine Person, die im Eintrittsjahre gestorben ist;
$E_3 T_3$ eine Person, die auf einer späteren Altersstufe starb;
$E_2 A_2$ eine Person, welche im Eintrittsjahre lebend ausschied;
$E_4 A_4$ eine Person, die in einem späteren Altersjahre lebend ausschied;
$E_5 V_5$ eine Person, die im Eintrittsjahre den Endtermin versichert erreichte;
$E_6 V_6$ eine Person, bei der dies auf einer späteren Altersstufe geschah.

Diese Übersicht läßt nun deutlich das Prinzip erkennen, nach elchem die Karten gruppiert und gezählt wurden.

a) Zuerst erfolgte die Bildung von Kartengruppen *gleichen Einittsalters*;

b) jede solche Gruppe wurde in Untergruppen *gleichen Austrittsters* zerlegt;

c) jede dieser Untergruppen wurde nach den drei *Arten des Austrittes* wieder in drei Untergruppen geteilt, und an diesen erfolgte die *Zählung* und *erste Tabellarisierung*.

Hiernach wird der Inhalt der Kolonnen 1, 2, 3, 4 der nachfolgenden Probetabelle sofort verständlich, welche der Kategorie MI. entnommen ist[1]).

MI. Tabelle I.

Eintrittsalter: 57 Jahre einschl. bis zu 58 Jahren ausschl.
Eingetreten: 1213 Personen.

Beobachtungsalter von Jahr einschl. — bis Jahr ausschl.	Ausgeschieden durch Tod	Ausgeschieden bei Lebzeiten	Versich. blieben am 31. Dez. 1875	Summe der Kolonnen 3 u. 4	Hälfte der Kolonne 5	Summe der Kolonnen 2, 3, 4	Summe der Kol. 7 von unten	Erste Zeile: Hälfte der Kol. 8 minus Kol. 6. Folgende Zeilen: Kol. 8 minus Kol. 6
1	2	3	4	5	6	7	8	9
57 — 58	8	37	11	48	24	56	1213	[illegible]82,5
58	40	70	12	82	41	122	1157	11[illegible]16
59	37	22	28	50	25	87	1035	1[illegible]10
60	37	18	29	47	23,5	84	948	[illegible]24,5
61	35	15	21	36	18	71	864	846
62	31	13	35	48	24	79	793	769
63	33	9	52	61	30,5	94	714	683,5
64	25	11	59	70	35	95	620	585
65	32	6	50	56	28	88	525	497
66	19	5	36	41	20,5	60	437	416,5
67	19	4	42	46	23	65	377	354
68	15	1	29	30	15	45	312	297
69	22	1	29	30	15	52	267	252
70	15	—	18	18	9	33	215	206
71	20	2	15	17	8,5	37	182	173,5
72	7	—	7	7	3,5	14	145	141,5
73	12	—	6	6	3	18	131	128
74	11	—	11	11	5,5	22	113	107,5
75	9	1	9	10	5	19	91	86
76	14	—	7	7	3,5	21	72	68,5
77	4	—	6	6	3	10	51	48
78	8	1	2	3	1,5	11	41	39,5
79	8	—	—	—	—	8	30	30
80	4	1	1	2	1	6	22	21
81	4	—	1	1	0,5	5	16	15,5
82	4	—	1	1	0,5	5	11	10,5
83	2	—	1	1	0,5	3	6	5,5
84	1	—	—	—	—	1	3	3
85	—	1	—	1	0,5	1	2	1,5
86	—	—	—	—	—	—	1	1
87	—	—	—	—	—	—	1	1
88	—	—	—	—	—	—	1	1
89 — 90	1	—	—	—	—	1	1	1
Sa.	477	218	518	736	368	1213	10397	9422,5

1) l. c., p. 62.

Man liest aus dieser Tabelle, daß 1213 Personen vom vollendeten bis vor Vollendung des 58. Lebensjahres eintraten, daß 8 davon ɔn auf dieser Altersstufe gestorben, 37 lebend ausgeschieden sind 11 aus der Beobachtung ausgetreten sind, weil sie den Endtermin ichert erreichten; daß diese Fälle beziehungsweise bei 32, 6, 50 Perɔn erst auf der Altersstufe 65—66 sich ereigneten.

Das Verständnis der übrigen Kolonnen, deren Gewinnung durch Überschriften in deutlicher Weise beschrieben ist, wird durch die wicklungen in Nr. 193 vermittelt. Die Zahlen der Kol. 7 geben wie viele von den ursprünglich eingetretenen (1213) Personen auf einzelnen Altersstufen auf die durch die Kol. 2, 3, 4 unteredenen Arten „aus der Beobachtung“ ausgeschieden sind; ihre ıme stimmt daher mit der Anzahl der Eingetretenen überein, die ı als *erste* Zahl der Kol. 8 figuriert; die *zweite, dritte,* ⋯ Zahl er Kolonne bezeichnet somit die Zahl derer, die unter Beobach- das Alter 58, 59, ⋯ überschritten haben. Wenn man also die Nr. 193 bei Formel (6) erläuterte *rechnungsmäßige* Zahl der Überɒden:

$$A + \frac{B-C}{2}$$

die aufeinander folgenden Alter bestimmen will, so ist die Ausıng in der ersten Zeile eine andere als in den übrigen Zeilen, zwar ist in der *ersten* Zeile:

$$A = 0, \quad B = 1213 \text{ (erste Zahl der Kol. 8)},$$

$$\frac{C}{2} = 24 \text{ (erste Zahl der Kol. 6)},$$

$$A + \frac{B-C}{2} = \frac{\text{erste Zahl der Kol. 8}}{2} - \text{erste Zahl der Kol. 6};$$

ɜn *folgenden* Zeilen:

$$A = \text{Zahl der Kol. 8}, \quad B = 0, \quad \frac{C}{2} = \text{Zahl der Kol. 6},$$

$$A + \frac{B-C}{2} = \text{Zahl der Kol. 8} - \text{Zahl der Kol. 6}.$$

Die „Deutschen Sterblichkeitstafeln“ bezeichnen die Zahlen der 9, denen wir hier den Namen „rechnungsmäßige Anzahl der Überıden“ gegeben haben, als „durchlebte Beobachtungsjahre oder Pern unter einjährigem Risiko auf der betreffenden Altersstufe“; diese ichnung wäre nur dann zutreffend, wenn die Todesfälle jeder rsstufe sämtlich am Ende derselben einträten. Wenn jedoch Roghé[1]) iesem Umstande eine Fehlerquelle der Deutschen Sterblichkeitsn erblickt, so beruht dies auf einem Irrtum; denn wie eben ge-

1) l. c., p. 96.

zeigt worden, entspricht die Berechnung dieser Zahlen und ihre weitere Verwendung für die Sterblichkeitsmessung vollkommen der Formel (6) in Nr. 193.

Was diese Verwendung anlangt, so geschieht sie in folgender Weise. Überlebende eines bestimmten Alters und Gestorbene auf der ihm folgenden Altersstufe gibt es aus allen *vorangehenden* Eintrittsaltern; man braucht sie nur aus den Tabellen der eben vorgeführten Art (Kol. 9 und Kol. 2) herauszuheben und zusammenzustellen; dies gibt Anlaß' zu einer *zweiten Tabellarisierung*, von welcher wir nachstehend wieder eine Probe aus der Kategorie MI. mitteilen[1]):

MI. Tabelle III.

Eintrittsalter von Jahr einschl.	Eintrittsalter bis Jahr ausschl.	Durchlebte Beobachtungsjahre Tab. I, Kol. 9	Gestorbene Tab. I, Kol. 2
		Beobachtungsalter 40	
14	**15**	1	—
15		1	—
16		—	—
17		1	—
18		3	—
19		4	—
20		9	—
21		44	—
22		72	—
23		145	2
24		267	3
25		531	3
26		775,5	11
27		1 153	15
28		1 782,5	26
29		2 579,5	32
30		3 381	37
31		4 282	59
32		5 406,5	55
33		6 292	65
34		7 423	75
35		8 112,5	97
36		8 326	91
37		9 053	124
38		9 656	101
39		10 659	103
40	**41**	5 061	41
	Sa.	85 020,5	940

Aus dieser Tafel geht hervor, daß z. B. von den zwischen 25 und 26 Jahren eingetretenen (rechnungsmäßig) 531 das Alter 40 überlebten

1) l. c., p. 84—85.

lavon 3 im Alter von 40 bis 41 Jahren starben, und daß von Eingetretenen der Kategorie (es waren deren 341 744) rechnungs- 85 020,5 das Alter 40 überschritten und 940 vor Vollendung lters 41 durch Tod abgingen; daraus ergibt sich für die Sterbens- cheinlichkeit der 40-jährigen der empirische Wert:

$$q_{40} = \frac{940}{85\,020{,}5} = 0{,}01106,$$

enn auch in der Tabelle IV[1]) bei dem Alter 40 eingetragen und en andern auf gleiche Weise bestimmten Werten zur Konstruktion terbetafel verwendet erscheint. Diese geht in der Weise vor daß der Reihe nach folgende Kolonnen gerechnet werden:

$$(5) \qquad p_x = 1 - q_x$$

$$(6) \qquad \log p_x$$

$$(7) \qquad 4 + \sum_{15}^{x} \log p_x = \log l_x$$

$$(8) \qquad l_x$$

$$(9) \qquad d_x = l_x - l_{x+1}$$

$$(10) \qquad \sum_{x}^{\omega} l_x$$

$$(11) \qquad \frac{\sum\limits_{x}^{\omega} l_x}{l_x} - \frac{1}{2} = \overset{0}{e}_x;$$

ıd also die Lebenswahrscheinlichkeiten; (6) deren Logarithmen; .e Logarithmen der Zahlen der Überlebenden, wenn für das 15 die Basis 10 000 gewählt wird; (8) die Zahlen der Über- .en selbst; (9) die Zahlen der Gestorbenen; (10) die bis zum .en Alter summierten Zahlen der Überlebenden; (11) die vollen ren Lebenserwartungen (vgl. Nr. 177 u. 179).

.uf die beschriebene Art sind alle acht Kategorien von Ver- ten aufgearbeitet worden. Aus den gewonnenen Originalresul- hat A. Zillmer „ausgeglichene Sterblichkeitstafeln" gerechnet, war im ganzen neun, deren Bedeutung aus den nachfolgend zu- engestellten Bezeichnungen ersichtlich ist:

MI., WI., M u. WI.,
MII., WII., M u. WII.,
MIII., WIII., M u. WIII.

)ie letzte Tafel der ersten Gruppe ist in den drei ersten Kolonnen afel IV am Ende dieses Buches mitgeteilt.

196. Ausgleichung von Tafeln. Die unmittelbaren Ergebnisse einer Sterblichkeitsmessung, mögen sie aus bevölkerungsstatistischen oder aus Beobachtungen an Versicherten od. dgl. hervorgegangen sein, bieten in ihrer nach dem wachsenden Alter geordneten Zusammenstellung insofern kein befriedigendes Bild dar, als der Verlauf der Zahlen der Vorstellung, die man sich a priori von ihm bildet, nicht entspricht. Diese Vorstellung geht dahin, daß es *normale* Werte der betreffenden Größe — wir denken an die Sterbenswahrscheinlichkeit — gebe, die sich in den Lauf einer Funktion einfügen, die weder plötzliche, noch innerhalb enger Altersgrenzen häufig wechselnde Änderungen aufweist, vielmehr mit einer gewissen Regelmäßigkeit mit dem Wachsen des Alters fortschreitet. In geometrischer Interpretation geht also die apriorische Erwartung dahin, durch die Endpunkte der graphisch aufgetragenen Einzelwerte der Größe, um die es sich handelt, werde sich eine Kurve legen lassen, die einen im Detail regelmäßigen ruhigen Verlauf zeigt.

Wenn dem nicht so ist, so sind die Gründe hierfür in zwei Umständen zu suchen: In den unvermeidlichen Fehlern, die *jeder* empirischen Bestimmung einer Größe, sei dieselbe konkret oder abstrakt, anhaften, und in Störungen des „normalen" Verlaufes der beobachteten Erscheinung, sowie in Unvollkommenheiten der Beobachtung selbst.

Für die unvermeidlichen, *zufälligen* Fehler läßt sich ein Maß aus der Beobachtungsgrundlage ableiten. Ist s die (wirkliche oder rechnungsmäßige) Anzahl der Personen, welche ein bestimmtes Alter x überlebt haben, und m die Anzahl der aus ihnen hervorgegangenen Sterbefälle, so ist man berechtigt, mit der Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt \qquad (1)$$

zu erwarten, die Sterbenswahrscheinlichkeit q des betreffenden Alters liege zwischen den Grenzen:

$$\frac{m}{s} - \gamma \sqrt{\frac{2m(s-m)}{s^3}} \quad \text{und} \quad \frac{m}{s} + \gamma \sqrt{\frac{2m(s-m)}{s^3}}; \qquad (2)$$

bezeichnet man also den empirischen (wahrscheinlichsten) Wert $\frac{m}{s}$ von q mit q_0, seine Ergänzung zur Einheit mit p_0, so ist

$$h = \sqrt{\frac{s}{2 p_0 q_0}} \qquad (3)$$

die Präzision und damit zugleich ein Maß der Unsicherheit der Bestimmung q_0 von q, insbesondere ist

$$r = 0{,}67449 \sqrt{\frac{p_0 q_0}{s}} \qquad (4)$$

er wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung (s. Nr. 164). Diese 'ormeln zeigen, daß in den schwach besetzten Altersklassen aus dieser Quelle allein eine erhebliche Unsicherheit in der Bestimmung von q nd daher auch eine beträchtliche Unregelmäßigkeit in den gewonnenen Einzelwerten entspringen kann.

Die zweite Fehlerquelle entzieht sich der rechnerischen Behandung. Störungen können sich dadurch ergeben, daß besondere Sterblichkeitsursachen für kürzere oder längere Zeit mit verstärkter Intenität auftreten. Unvollkommenheiten haften ferner auch der mit rößter Sorgfalt durchgeführten Beobachtung an (unrichtige Altersngaben, hypothetische Behandlung der Wanderungen, der Ein- und Austritte etc.). Man sucht durch möglichste Erbreiterung der Grundage sowohl der Menge der Individuen, wie auch dem Beobachtungseitraume nach den Einfluß der Störungen möglichst einzuschränken.

Aus dem Bestreben, die durch den Zufall verursachten Unregelnäßigkeiten einer Tafel — und dies gilt auch von andern als Sterbeafeln allein — zu beseitigen und sich dem „normalen" Verlaufe zu ähern, sind die zahlreichen *Ausgleichungsmethoden* hervorgegangen, velche heute ein wichtiges und vielgepflegtes Kapitel der Tafelkonstruktionspraxis bilden; dabei darf nicht verschwiegen werden, daß es nicht an fachmännischen Stimmen fehlt, die für die unveränderte Beibehaltung der unmittelbaren Ergebnisse eintreten; die Aufbewahrung und die Publikation *dieser* Ergebnisse ist unter allen Umständen geboten, weil jede wissenschaftliche Untersuchung zu ihnen zurückkehren nuß. Das Bestreben der neueren Methoden geht dann auch dahin, nur dort, wo offenkundig zufällige Störungen des normalen Verlaufes vorliegen, sich von den Originalzahlen zu entfernen und einer allzustark eingreifenden Ausgleichung, die auch in der Natur der Sache gelegene und daher charakteristische Bewegungen verwischen kann, aus dem Wege zu gehen; daneben freilich besteht der Wunsch, die Endresultate so regelmäßig zu gestalten, als ob sie tatsächlich aus einem analytischen Gesetze hervorgegangen wären.

Existierte ein solches und befände man sich im Besitze seines analytischen Ausdruckes, dann wäre die ganze Frage gelöst. Angenommen, die Sterbenswahrscheinlichkeit q_x bei dem Alter x hätte den allgemeinen Ausdruck

$$q_x = F(x, a, b, c, \cdots), \tag{5}$$

wobei F das Zeichen für eine bekannte Funktion ist und $a, b, c, \cdots$ Konstanten (Parameter) bedeuten. Dann würde sich das Absterben irgend einer Masse nur als eine Modalität des Gesetzes oder der *Sterblichkeitsformel* (5) darstellen und durch die Spezialwerte der Konstanten gekennzeichnet sein. Zu einer genäherten Berechnung dieser Spezialwerte genügte im Grunde die empirische Bestimmung von so

vielen Einzelwerten von q_x, als es Konstanten gibt; ihre möglichst gesicherte Berechnung aus einer vollständigen Beobachtungsreihe hätte nach der Methode der kleinsten Quadrate zu geschehen, wobei je nach der Zusammensetzung von F der eine oder der andere der beiden in Nr. 150 entwickelten Rechnungsvorgänge sich besonders empfehlen würde.

Nach dem ersten Vorgange entwickelt man, nachdem Näherungswerte a_0, b_0, c_0, $\cdots$ für die Konstanten bestimmt worden sind,

$$F(x,\ a_0 + \Delta a,\ b_0 + \Delta b,\ c_0 + \Delta c,\ \cdots)$$

bis auf Glieder erster Ordnung in Δa, Δb, Δc, $\cdots$, setzt

$$F_a'(x,\ a_0,\ b_0,\ c_0,\ \cdots) = \alpha_x, \quad F_b'(x,\ a_0,\ b_0,\ c_0,\ \cdots) = \beta_x,$$
$$F_c'(x,\ a_0,\ b_0,\ c_0,\ \cdots) = \gamma_x, \quad \cdots,$$

bildet mit Hilfe des beobachteten Wertes $\mathfrak{q}_x$ von q_x die Differenz

$$\mathfrak{q}_x - F(x,\ a_0,\ b_0,\ c_0,\ \cdots) = \delta_x;$$

mit Hilfe dieser Werte ergibt sich für jedes Alter eine Fehlergleichung von der Form:

$$\gamma_x = -\,\delta_x + \alpha_x \Delta a + \beta_x \Delta b + \gamma_x \Delta c + \cdots;$$

aus dem System der Fehlergleichungen erhält man unter Berücksichtigung ihrer Gewichte g_x die Normalgleichungen:

$$\begin{array}{l}
[g\alpha\alpha]\Delta a + [g\alpha\beta]\Delta b + [g\alpha\gamma]\Delta c + \cdots = [g\alpha\delta] \\
[g\alpha\beta]\Delta a + [g\beta\beta]\Delta b + [g\beta\gamma]\Delta c + \cdots = [g\beta\delta] \\
[g\alpha\gamma]\Delta a + [g\beta\gamma]\Delta b + [g\gamma\gamma]\Delta c + \cdots = [g\gamma\delta] \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

zur Bestimmung der Korrektionen Δa, Δb, Δc, $\cdots$ der Näherungswerte. Mit der definitiven Formel ist dann nicht bloß eine Ausgleichung der Beobachtungsreihe, sondern auch deren *Interpolation* gewonnen, da man imstande ist, q_x auch für nicht ganze x zu berechnen. Was das Gewicht g_x betrifft, so ergibt es sich aus der Präzision (3) von $\mathfrak{q}_x$, und zwar ist nach Nr. 137

$$g_x = \varkappa \frac{s}{\mathfrak{p}_x \mathfrak{q}_x},$$

wobei $\varkappa$ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet, den man zweckmäßig so wählen wird, daß die g_x sich in bequemen Zahlen ausdrücken.

Der zweite Vorgang kommt vorteilhaft zur Anwendung, wenn es eine Funktion $\varphi(q_x)$ von q_x gibt, die in bezug auf die Konstanten a, b, c, $\cdots$ linear ist; es kann dann das direkte Verfahren der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen (Nr. 145 u. 148) zur Anwendung

ebracht werden; nur kommt an die Stelle des Gewichtes g_x von $\mathfrak{q}_x$ as Gewicht g_x' von $\varphi(\mathfrak{q}_x)$ in Rechnung, das sich nach Nr. 150 mit

$$g_x' = \frac{g_x}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{q}_x}\right)^2}$$

estimmt.

Damit ist die eine Methode der Ausgleichung von Tafeln, die ıit Zugrundelegung einer *analytischen Formel*, gekennzeichnet. Neben ieser gibt es *mechanische* Methoden, die auf eine ausgleichende :ombination der Beobachtungsresultate hinzielen, und die *graphische* ıusgleichung.

Zur Wahl der Methode kommt im einzelnen Falle noch die 'rage, an welcher Größenreihe die Ausgleichung vorzunehmen ist. ßei Sterbetafeln kann es sich nur um die Entscheidung zwischen den Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x und den Zahlen der Überlebenden, l_x, ıandeln. Der seit langem schon befolgte Vorgang, die Sterbenswahrcheinlichkeiten auszugleichen und aus ihren ausgeglichenen Werten rst die Tafel aufzubauen, hat sich auch theoretisch als der vorteilıaftere erwiesen[1]) (dort, wo mit Gewichten zu arbeiten ist, sprechen ıuch praktische Gründe für ihn, weil die Gewichtsbestimmung der l_x ımständlich ist).

197. Sterblichkeitsformeln. Die Formeln von Gompertz ınd Makeham und Beispiel ihrer Verwendung. Seit De Moivre, lem ersten, der eine Hypothese über den Verlauf des Absterbens aufıtellte[2]), dahin gehend, die Reihe der Zahlen der Überlebenden vom [2. bis zum 86. Jahre (Lebensende) sei eine arithmetische Progression nit konstanter Differenz, bis in die Gegenwart sind zahlreiche Verıuche unternommen worden, die Erscheinung des Absterbens in eine ınalytische Formel zu fassen; und sicherlich werden auch in der Zucunft solche Versuche wiederholt werden. Bei vielen Autoren bestand lie Meinung, in der Formel den Ausdruck eines Naturgesetzes ge'unden zu haben; der Glaube an die Existenz eines solchen geht auch ıus den Worten hervor, mit welchen Wittstein die Vorrede zur :weiten Auflage seiner Schrift: „Das mathematische Gesetz der nenschlichen Sterblichkeit“ (Hannover 1883) schließt, das Ziel derırtiger Untersuchungen sei, „gleichwie der Astronom jetzt aus wenigen 3eobachtungen eines Gestirnes dessen ganze Bahn berechnet, so auch lereinst aus der Beobachtung weniger Altersklassen mit Sicherheit ine ganze Sterblichkeitstafel aufbauen zu können“[3]).

1) J. Karup, Über eine neue mechanische Ausgleichungsmethode. Transıctions of the second internat. actuarial congress 1898, London 1899, p. 53.

2) Treatise of Annuities on Lives, London 1725.

3) Zur geschichtlichen Entwicklung des Gegenstandes vgl. des Verf.s „Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie etc.“, Jahresber. der Deutschen Mathem.-Verein. VII (1899), p. 238—243.

Die neuere Anschauung erblickt in den Sterblichkeitsformeln nichts mehr als analytische Ausdrücke, welche sich der einen Beobachtungsreihe besser, einer andern mit minder gutem Erfolge anpassen, und hält es für ausgeschlossen, daß es einmal gelingen könnte, eine Formel zu finden, die alle Beobachtungsreihen gleich gut wiederzugeben vermöchte. Sie darf sich dabei nicht bloß auf die bisher gemachten Erfahrungen, sondern hauptsächlich auf die Natur der in Frage stehenden Erscheinung berufen, deren zeitlicher und örtlicher Wechsel eine alles umfassende analytische Formulierung tatsächlich auszuschließen scheint.

Unter den vielen Formeln haben es die von B. Gompertz und Makeham zu einem hohen Ansehen gebracht; viele der neueren wichtigen Sterblichkeitsmessungen sind nach ihnen bearbeitet worden und man muß zugeben, zum Teil mit überraschendem Erfolg.

Die Grundidee der Gompertzschen Theorie der menschlichen Sterblichkeit[1]) läßt sich mit Hilfe des Begriffes der Sterblichkeitsintensität (s. Nr. 178) dahin ausdrücken, daß der Wert dieser biologischen Funktion mit dem Alter nach geometrischer Progression wachse, daß also

$$\mu_x = Bc^x \qquad (1)$$

sei; da nun $\mu_x = -\frac{dl_x}{l_x dx}$ ist, so folgt daraus:

$$\operatorname{Log} l_x = -\frac{B}{\operatorname{Log} c} c^x + \operatorname{Log} k;\ ^{2)}$$

und setzt man $-\frac{B}{\operatorname{Log} c} = \operatorname{Log} g$, so wird

$$\operatorname{Log} l_x = \operatorname{Log} k + c^x \operatorname{Log} g$$

und

$$l_x = kg^{c^x}. \qquad (2)$$

Dies ist die Gompertzsche Sterblichkeitsformel mit den drei Parametern c, g, k. Die Zahl dieser reduziert sich auf zwei, wenn man zur Darstellung der Lebens- oder Sterbenswahrscheinlichkeit übergeht; denn aus

$$l_{x+1} = kg^{c^{x+1}}$$

und (2) folgt

$$p_x = g^{c^x(c-1)}. \qquad (3)$$

Gompertz selbst beschränkte die Formel auf die Alter von 10 oder 15 bis 55 oder 60 Jahren und bemerkte, auf die Kinderjahre sei sie

---

1) On the nature of the function expressive of the law of human mortality etc. Lond. Transact. (part II) 1825.

2) Log ist hier die Bezeichnung des *natürlichen* Logarithmus.

… auch über die Vorzeichen der Loga- …t, zeigt, daß es nicht wohl möglich ist, … Formel befriedigend darzustellen; sie … Grad der Empfindlichkeit der Konstanten … in einem so gearteten Falle einen mög- …ß der Formel an die Beobachtungsreihe …us den verschiedenen Bestimmungen der

… bei der Herstellung der Tafel eingeschlagen …ndlage aller Tabellen des Text Book bildet …ungen H^M[1]) der 20 britischen Gesellschaften

…auf ausgehend, möglichst viele Beobachtungs- …ung der Konstanten mitwirken zu lassen, be-

… Summen von je t aufeinander folgenden $\log l_x$, …ig gewählten x und t vorgehend; nach Formel (5)

$$\ldots + (x + \overline{x+1} + \overline{x+2} + \cdots + \overline{x+t-1}) \log s$$
$$+ c^x (1 + c + c^2 + \cdots + c^{t-1}) \log g,$$

$$\ldots t \log k + \frac{t}{2}(2x + t - 1) \log s + c^x \frac{c^t - 1}{c - 1} \log g;$$

$$\ldots l_x = t \log k + \frac{t}{2}(2x + 3t - 1) \log s + c^{x+t} \frac{c^t - 1}{c - 1} \log g$$

$$\ldots \log l_x = t \log k + \frac{t}{2}(2x + 5t - 1) \log s + c^{x+2t} \frac{c^t - 1}{c - 1} \log g$$

$$\ldots \log l_x = t \log k + \frac{t}{2}(2x + 7t - 1) \log s + c^{x+3t} \frac{c^t - 1}{c - 1} \log g.$$

…it diesen vier Summen wird genau so verfahren, wie es vorhin …en vier Einzelwerten, deren erster mit (7) bezeichnet war, ge-…n ist.

---

1) H^M ist die Abkürzung für Healthy Males Lives (= gesunde männliche …). Die Ergebnisse der Beobachtungen finden sich in dem bereits zitierten „…Mortality Experience“ auf p. 273—274.

Vier äquidistante Werte von l_x reichen theoretisch zur Bestimmung der vier Konstanten c, g, k, s hin, und die Rechnung kann zweckmäßig wie folgt geführt werden. Man bilde im gemeinen Logarithmensystem die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\log l_x &= \log k + x \log s + c^x \log g \\ \log l_{x+t} &= \log k + (x+t) \log s + c^{x+t} \log g \\ \log l_{x+2t} &= \log k + (x+2t) \log s + c^{x+2t} \log g \\ \log l_{x+3t} &= \log k + (x+3t) \log s + c^{x+3t} \log g;\end{aligned} \tag{7}$$

durch Bildung der ersten Differenzen in der Reihe der linken Seiten entsteht:

$$\begin{aligned}\Delta \log l_x &= t \log s + c^x (c^t - 1) \log g \\ \Delta \log l_{x+t} &= t \log s + c^{x+t} (c^t - 1) \log g \\ \Delta \log l_{x+2t} &= t \log s + c^{x+2t} (c^t - 1) \log g;\end{aligned} \tag{8}$$

die Bildung der zweiten Differenzen führt weiter zu:

$$\begin{aligned}\Delta^2 \log l_x &= c^x (c^t - 1)^2 \log g \\ \Delta^2 \log l_{x+t} &= c^{x+t} (c^t - 1)^2 \log g.\end{aligned} \tag{9}$$

Dividiert man die letzte Gleichung durch die vorletzte und logarithmiert das Resultat, so ergibt sich:

$$\log \Delta^2 \log l_{x+t} - \log \Delta^2 \log l_x = t \log c. \tag{10}$$

Daraus berechnet sich $\log c$ und c. Die Einführung dieses Wertes in (9) ermöglicht die Bestimmung von $\log g$ und damit von g selbst. Mit den Werten von c und g liefert die Gleichung (8) den Wert von $\log s$ und somit von s selbst. Mit diesen Daten kann schließlich aus (7) $\log k$ und k berechnet werden.

Folgten die l_x tatsächlich in aller Strenge dem Gesetze (5), so wäre es gleichgiltig, wie man die vier äquidistanten Alter auswählt. Hingegen bietet die wiederholte Rechnung der Konstanten aus verschiedenen Altersgruppen einen Anhalt dafür, ob und wie weit die Formel sich der Reihe der l_x anpaßt. Als Beispiel in letzterem Sinne diene die wiederholte Berechnung aus der Sterbetafel, welche J. Milne [1]) für die Stadt Carlisle konstruierte; dieselbe ergab:

log	Altersgruppe			
	15, 35, 55, 75	20, 40, 60, 80	25, 45, 65, 85	30, 50, 70, 90
c	0,0364852	0,0411317	0,0404469	0,0397194
g	— 0,0007393	— 0,0003083	— 0,0003272	— 0,0003694
s	— 0,0029073	— 0,0034071	— 0,0038187	— 0,0039126
k	4,8452254	4,8549296	4,8681803	4,8743597

1) Treatise on Annuities and Assurance, 1815.

Diese Tabelle, die nebenbei auch über die Vorzeichen der Logaithmen der Konstanten belehrt, zeigt, daß es nicht wohl möglich ist, ie genannte Tafel durch *eine* Formel befriedigend darzustellen; sie ißt auch den verschiedenen Grad der Empfindlichkeit der Konstanten rkennen. Man könnte, um in einem so gearteten Falle einen mög-.chst gleichmäßigen Anschluß der Formel an die Beobachtungsreihe u erzielen, Mittelwerte aus den verschiedenen Bestimmungen der Konstanten bilden.

Ein anderer Weg ist bei der Herstellung der Tafel eingeschlagen vorden, welche die Grundlage aller Tabellen des Text Book bildet nd auf den Beobachtungen H^M[1]) der 20 britischen Gesellschaften eruht.

Das Verfahren, darauf ausgehend, möglichst viele Beobachtungswerte an der Bestimmung der Konstanten mitwirken zu lassen, beteht in folgendem.

Man bildet vier Summen von je t aufeinander folgenden $\log l_x$, nit einem zweckmäßig gewählten x und t vorgehend; nach Formel (5) st zunächst

$$\sum_{x}^{x+t-1} \log l_x = t \log k + (x + \overline{x+1} + \overline{x+2} + \cdots + \overline{x+t-1}) \log s$$
$$+ c^x (1 + c + c^2 + \cdots + c^{t-1}) \log g,$$

lso definitiv:

$$\sum_{x}^{x+t-1} \log l_x = t \log k + \frac{t}{2}(2x + t - 1) \log s + c^x \frac{c^t - 1}{c - 1} \log g;$$

benso:

$$\sum_{x+t}^{x+2t-1} \log l_x = t \log k + \frac{t}{2}(2x + 3t - 1) \log s + c^{x+t} \frac{c^t - 1}{c - 1} \log g$$

$$\sum_{x+2t}^{x+3t-1} \log l_x = t \log k + \frac{t}{2}(2x + 5t - 1) \log s + c^{x+2t} \frac{c^t - 1}{c - 1} \log g$$

$$\sum_{x+3t}^{x+4t-1} \log l_x = t \log k + \frac{t}{2}(2x + 7t - 1) \log s + c^{x+3t} \frac{c^t - 1}{c - 1} \log g.$$

Mit diesen vier Summen wird genau so verfahren, wie es vorhin nit den vier Einzelwerten, deren erster mit (7) bezeichnet war, gechehen ist.

---

1) H^M ist die Abkürzung für Healthy Males Lives (= gesunde männliche eben). Die Ergebnisse der Beobachtungen finden sich in dem bereits zitierten The Mortality Experience" auf p. 273—274.

Nach mehrfachen Versuchen ist als die vorteilhafteste Gruppenbildung die gefunden worden, welche $x = 17$, $t = 18$ entspricht; dadurch sind die 72 Altersklassen von 17 bis 88 zur Verwendung gekommen, und die Rechnung ergab:

$$\log c = 0{,}03965686 \qquad c = 1{,}0956122$$
$$\log g = \bar{9}{,}9995432 \qquad g = 0{,}9989465$$
$$\log s = \bar{9}{,}997390673 \qquad s = 0{,}9938272$$
$$\log k = 4{,}0404723 \qquad k = 10\,976{,}7.$$

Mit diesen Werten der Konstanten sind nun die l_x für alle Alter (von 10 aufwärts, da die Beobachtung für die untersten Alter ein völlig unzulängliches Material ergeben hatte) zu *rechnen*. Die Rechnung wurde auf Grund der folgenden Betrachtung vollzogen. Es ist:

$$\log l_x = \log k - x(-\log s) - c^x(-\log g)$$

und vermöge $\frac{l_{x+1}}{l_x} = p_x$ weiter

$$\Delta \log l_x = \log p_x = -(-\log s) - c^x(c-1)(-\log g);$$

daraus folgt durch neuerliche Differenzenbildung:

$$\Delta \log p_x = -c^x(c-1)^2(-\log g),$$
$$\log(-\Delta \log p_x) = x \log c + 2\log(c-1) + \log(-\log g),$$

und hieraus schließlich mittels desselben Prozesses:

$$\Delta \log(-\Delta \log p_x) = \log c.$$

Man erhält also, von einem Anfangswerte $\log(-\Delta \log p_x)$ ausgehend, durch fortgesetzte Addition von $\log c$ die ganze Reihe der Werte von $\log(-\Delta \log p_x)$; nimmt man hierzu die Numeri, so hat man die Reihe der $-\Delta \log p_x$. Aus dem direkt gerechneten Anfangswerte von $\log p_x$ ergibt sich mittels der letzterwähnten Reihe die Reihe der $\log p_x$; aus dieser mit Hilfe des direkt gerechneten Anfangswertes von $\log l_x$ die ganze Reihe der $\log l_x$ und schließlich die der l_x. Bei dieser letzten Stufe der Rechnung ist $\log l_x$ oder, was dasselbe bedeutet, $\log k$ um eine Einheit erhöht worden, um eine größere Basis zu gewinnen.

Die direkt gerechneten Anfangswerte sind:

$$\log(-\Delta \log p_{10}) = \bar{5}{,}0173009, \quad \log p_{10} = \bar{1}{,}99720183,$$
$$\log l_{10} = 5{,}0124407;$$

damit ergibt sich für die durch bloße Additionen und den Übergang von Logarithmen zu Zahlen geführte Rechnung folgendes Schema:

x	log (— Δ log p_x)	— Δ log p_x	log p_x	log l_x	l_x
	2	3	4	5	6
0	$\bar{5}$,0173009	0,0000104	$\bar{1}$,9972018	5,0124407	102 906
1	,0569578	,0000114	,9971914	,0096425	102 245
2	,0966146	,0000125	,9971800	,0068339	101 586
3	,1362715	,0000137	,9971675	,0040139	100 928
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

e Zahl der Kolonne 2 entsteht aus der vorangehenden durch Addon von log $c = 0{,}03965686$; jede Zahl der Kolonne 4 aus der über stehenden durch Subtraktion der links daneben befindlichen; jede l der Kolonne 5 endlich aus der über ihr stehenden durch Adon der links daneben befindlichen.

Vergleicht man die so berechneten l_x mit den Originalzahlen der -Tafel, so zeigen sie vom Alter 25 aufwärts eine sehr befriedigende ereinstimmung; unterhalb dieses Alters aber halten sich die geaneten Zahlen beständig über den Originalzahlen, und die Divergenz mt von 25 gegen 10 hin in ausgesprochener Weise zu; der Ver- der Sterblichkeit macht also um das 25. Lebensjahr eine Wendung, che die Formel nicht wiedergibt.

Um eine im ganzen Verlaufe dem Original sich anschmiegende, elmäßig verlaufende Reihe zu erhalten, wurde der *Exceß* der geneten l_x über die originalen in dem betreffenden Teile der Tafel ler einer Makehamschen Formel angepaßt, dabei jedoch die ere Konstante c, die erfahrungsmäßig nur geringen Variationen liegt, beibehalten; dagegen traten an die Stelle von g, s, k neue tanten γ, σ, $\varkappa$, deren Berechnung aus den Altern 10, 16, 22 ergab:

$$\log \gamma = \bar{9}{,}54698$$
$$\log \sigma = 0{,}06820$$
$$\log \varkappa = \dot{3}{,}9103.$$

sen Werten ist der Exceß für 10 bis 28 gerechnet und von der ersten Rechnung hervorgegangenen l_{10} bis l_{28} in Abzug t worden; so ergab sich die endgiltige Reihe der l_x von 10

e ausschlaggebende Prüfung des Anschlusses der Formel an en der Originalreihe lieferte nun die Vergleichung der „ermäßigen" mit den „wirklichen" Todesfällen. Bezeichnet λ_x nungsmäßige) Anzahl der unter Beobachtung gestandenen , δ_x die Anzahl der aus ihnen hervorgegangenen, also be- Todesfälle[1]), q_x die Sterbenswahrscheinlichkeit nach der

e diese Zahlen in „The Mortality Experience" p. 244.

ausgeglichenen Tafel, so ist $q_x \lambda_x = \delta_x'$ die Anzahl der erwartungsmäßigen Todesfälle. Die folgende Tabelle zeigt für die von fünf zu fünf Jahren fortschreitenden Alter das Größenverhältnis von δ_x und δ_x'.

x	λ_x	δ_x	δ_x'	$\delta_x' - \delta_x$
10	379	3	2	— 1
15	908	2	3	+ 1
20	3 293,5	19	19	0
25	13 622,5	70	96	+ 26
30	27 112,5	224	209	— 15
35	35 818,5	295	309	+ 14
40	38 195	377	382	+ 5
45	34 735,5	429	425	— 4
50	28 855,5	476	454	— 22
55	22 170,5	509	471	— 38
60	15 672,5	488	468	— 20
65	9 984,5	435	432	— 3
70	5 622	315	360	+ 45
75	2 693	254	259	+ 5
80	995	140	144	+ 4
85	254,5	55	55	0
90	43,5	10	14	+ 4
95	1,5	1	2	+ 1
In *allen* Altersklassen zusammen		20 517	20 496	— 21

Schließlich wurde die Tafel für die Alter unter 10 Jahren ergänzt mit Hilfe der Lebenswahrscheinlichkeiten aus Farrs Sterbetafel für die „gesunde männliche Bevölkerung" Englands[1]).

An Beispielen der Ausgleichung einer Beobachtungsreihe unter Zugrundelegung einer Sterblichkeitsformel und mit Benützung der Methode der kleinsten Quadrate seien angeführt:

Die Tafel des Ersten Allgemeinen Beamtenvereins der österr.-ungar. Monarchie[2]); ausgeglichen wurden die Logarithmen der Lebenswahrscheinlichkeiten nach der Makehamschen Formel (6), der zufolge $\log p_x = \log s + c^x (c-1) \log g$ ist; die benützten Alter gehen von 30 bis 86.

Die Tafel H^M der 20 britischen Gesellschaften, ausgeglichen von Wittstein[3]) nach der von ihm selbst aufgestellten Sterblichkeitsformel:

$$q_x = a^{-(M-x)^n} + \frac{1}{m} a^{-(mx)^n},$$

worin M das höchste Alter bedeutet, in welchem noch Lebende vorhanden sind (im vorliegenden Falle mit 97 angenommen); die Konstante m ergibt sich vor der Ausgleichungsarbeit durch das Alter

1) London, Philos. Trans. 1860.
2) Siehe die Literaturnachweise in Nr. 194.
3) Das mathematische Gesetz der menschlichen Sterblichkeit 1883, p. 35 ff.

gster Sterbenswahrscheinlichkeit und *M* (in dem behandelten ist sie mit 6 angenommen). Es bleiben noch zwei Konstante, 1 *n*, zu bestimmen, und dieser Teil der Ausgleichung ist an der ten Stelle mit allen Einzelheiten dargelegt.

198. Mechanische Ausgleichungsmethoden. Die mechaen Ausgleichungsmethoden gehen von der Erwägung aus, daß törung eines Einzelwertes in einer Beobachtungsreihe sich auch in den beiderseits benachbarten Gliedern bemerkbar mache, daß h eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit dafür bestehe, es werde längere Folge von Einzelwerten in gleichem Sinne beeinflußt viel eher sei zu erwarten, daß sich durch den Wechsel des s auch in kürzeren oder längeren Abschnitten ein Ausgleich im ufe der Erscheinung vollziehe. Auf den Fall des Absterbens vendet heißt dies etwa folgendes: Wenn in einer Altersklasse lig mehr Personen gestorben sind, als es dem „normalen" Verisse entspräche, so kann diese Übersterblichkeit wohl auch noch n nächsten benachbarten Altersklassen anhalten; es ist aber nicht iehmen, daß sie sich über eine längere Folge von Altersklassen rseits erstrecke, vielmehr ist zu erwarten, daß sie sehr bald r durch eine entsprechende Untersterblichkeit wett gemacht werde. Aus diesen Erwägungen sind die verschiedenen Methoden hervorigen, die an der Bestimmung eines Einzelwertes der Reihe nicht die ihm selbst entsprechende Beobachtung, sondern auch die zu n Seiten benachbarten Beobachtungen mitwirken lassen. Von n Verfahren verspricht man sich einerseits einen Ausgleich der ligen Störungen und ein besseres Hervortreten des Zusammens der Erscheinung, andererseits eine größere Regelmäßigkeit in Vertreihe. Wie weit das erste Ziel erreicht ist, darüber ist kein hluß zu erlangen; über das Maß der Erreichung des zweiten belehrt der äußere Erfolg. Mag dieser aber noch so günstig so kann er doch nur dann befriedigen, wenn der Gang der Betungswerte gut gewahrt wird; die Entscheidung darüber ist lings bis zu einem gewissen Grade subjektiv.

Im folgenden werden drei mechanische Ausgleichungsmethoden führt; im übrigen muß auf die Speziallliteratur verwiesen werden[1]).

a) Wittstein[2]) hat zum Zwecke der Ausgleichung einer Beobngsreihe $u_0, u_1, u_2, \cdots u_x, \cdots$ den Vorschlag gemacht, durch anze Reihe von je fünf aufeinander folgenden Gliedern das arithche Mittel zu nehmen und dieses an die Stelle des mittleren es der betreffenden Gruppe zu setzen; wird also das an die

---

1) Siehe insbesondere die zusammenfassende Darstellung E. Blaschkes Methoden der Ausgleichung von Massenerscheinungen", Wien 1893; ferner erf.s „Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie", l. c., p. 243ff.

2) Mathematische Statistik, Hannover 1867, p. 30.

Stelle von u_x tretende „ausgeglichene" Glied mit u_x' bezeichnet, so setzt Wittstein:

$$u_x' = \frac{u_{x-2} + u_{x-1} + u_x + u_{x+1} + u_{x+2}}{5}. \tag{1}$$

Auf diese neue Reihe ist, wenn sie nicht befriedigen sollte, dasselbe Verfahren nochmals anzuwenden; dadurch ergibt sich der definitive Wert:

$$u_x'' = \frac{u'_{x-2} + u'_{x-1} + u'_x + u'_{x+1} + u'_{x+2}}{5}$$

$$= \frac{u_{x-4} + 2u_{x-3} + 3u_{x-2} + 4u_{x-1} + 5u_x + 4u_{x+1} + 3u_{x+2} + 2u_{x+3} + u_{x+4}}{25} \tag{2}$$

$$= 0{,}20u_x + 0{,}16(u_{x-1} + u_{x+1}) + 0{,}12(u_{x-2} + u_{x+2}) + 0{,}08(u_{x-3} + u_{x+3}) + 0{,}04(u_{x-4} + u_{x+4}).$$

Die Formel (1) verwendet fünf Werte und schreibt ihnen gleiche Gewichte zu; die Formel (2) rechnet mit neun Werten, denen sie ungleiche Gewichte beilegt und zwar um so kleinere, je weiter sie vom zentralen Werte abstehen. Die praktische Durchführung gestaltet sich einfach; (1) erfordert Summenbildung an der ursprünglichen Reihe allein, (2) verlangt nochmalige Summenbildung an der Reihe der Summen. Wittstein hat das Verfahren (l. c. p. 44—48) zur Ausgleichung der Bruneschen Erfahrungen[1]) verwendet.

b) Große Beachtung und Verbreitung hat das von W. S. Woodhouse[2]) angegebene Ausgleichungsverfahren gefunden. Es kann ebensowohl auf die Zahlen der Überlebenden, wie auf die Sterbenswahrscheinlichkeiten angewendet werden; wir wollen daher allgemein von einer Reihe $u_0, u_1, u_2, \cdots u_x, \cdots$ sprechen und uns dieselbe graphisch aufgetragen denken.

Die Grundidee besteht im folgenden. Man konstruiere mittels der Reihe fünf Tafeln, die man auf nachstehende Beobachtungswerte stützt:

$u_0, \; u_5, \; u_{10}, \; u_{15}, \; \cdots$ die erste,

$u_1, \; u_6, \; u_{11}, \; u_{16}, \; \cdots$ die zweite,

$u_2, \; u_7, \; u_{12}, \; u_{17}, \; \cdots$ die dritte,

$u_3, \; u_8, \; u_{13}, \; u_{18}, \; \cdots$ die vierte,

$u_4, \; u_9, \; u_{14}, \; u_{19}, \; \cdots$ die fünfte,

die Zwischenwerte jedesmal interpolierend. Dadurch gewinnt man für jedes u_x fünf Werte, wovon einer der aus der Beobachtung selbst hervorgegangene ist, während die vier andern der Interpolation entstammen. Das arithmetische Mittel dieser fünf Werte gilt als der „ausgeglichene" Wert.

1) Siehe Nr. 194.
2) Lond. Journ. Inst. Actuar. 15 (1870), p. 392 und ibid. 21 (1878), p. 37.

Was die Interpolation anlangt, so wird sie auf Grund der Anhme durchgeführt, daß je drei aufeinander folgende Werte, wie , u_5, u_{10}; u_5, u_{10}, u_{15} u. s. w. eine arithmetische Progression zweiter ·dnung bilden; geometrisch gesprochen heißt dies, die Interpolation schehe nach einer Parabel

$$u = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \tag{3}$$

› durch die Endpunkte von drei aufeinander folgenden Ordinaten legt wird.

Um den ausgeglichenen Wert für u_x zu erhalten, werden solche ırabeln durch die fünf Punktetripel

$$\begin{array}{lll} u_{x-7} & u_{x-2} & u_{x+3} \\ u_{x-6} & u_{x-1} & u_{x+4} \\ u_{x-5} & u_x & u_{x+5} \\ u_{x-4} & u_{x+1} & u_{x+6} \\ u_{x-3} & u_{x+2} & u_{x+7} \end{array}$$

legt; ordnet man das Koordinatensystem derart an, daß die Orditenachse mit u_x sich deckt, so sind diese Parabeln in der allgeeinen Gleichung:

$$u = \alpha_\nu x^2 + \beta_\nu x + \gamma_\nu \tag{4}$$

thalten, wenn α_ν, β_ν, γ_ν aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u_{x+\nu-5} &= \alpha_\nu (\nu - 5)^2 + \beta_\nu (\nu - 5) + \gamma_\nu \\ u_{x+\nu} &= \alpha_\nu \nu^2 \qquad\quad + \beta_\nu \nu \qquad\quad + \gamma_\nu \\ u_{x+\nu+5} &= \alpha_\nu (\nu + 5)^2 + \beta_\nu (\nu + 5) + \gamma_\nu \end{aligned} \tag{5}$$

stimmt werden; für ν sind der Reihe nach die Werte $-2, -1, 0, 1, 2$ setzen. Da nun γ_ν jeweilen die Ursprungsordinate der Parabel rstellt, so stellt sich der ausgeglichene Wert von u_x dar durch:

$$u_x' = \frac{\gamma_{-2} + \gamma_{-1} + \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2}{5}.$$

Aus dem System (5) erhält man aber

$$\gamma_\nu = \frac{\nu(\nu+5)}{50} u_{x+\nu-5} + \frac{(5-\nu)(5+\nu)}{25} u_{x+\nu} + \frac{\nu(\nu-5)}{50} u_{x+\nu+5},$$

d die Einführung dieses Wertes in die voranstehende Formel liefert:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{125}[25u_x + 24(u_{x-1} + u_{x+1}) + 21(u_{x-2} + u_{x+2}) + 7(u_{x-3} + u_{x+3}) \\ &\qquad + 3(u_{x-4} + u_{x+4}) - 2(u_{x-6} + u_{x+6}) - 3(u_{x-7} + u_{x+7})] \\ &= \frac{1}{5}[u_x + 0{,}96(u_{x-1} + u_{x+1}) + 0{,}84(u_{x-2} + u_{x+2}) \\ &\qquad + 0{,}28(u_{x-3} + u_{x+3}) + 0{,}12(u_{x-4} + u_{x+4}) \\ &\qquad - 0{,}08(u_{x-6} + u_{x+6}) - 0{,}12(u_{x-7} + u_{x+7})]; \end{aligned} \tag{6}$$

die Formel bezieht, mit Überspringung von u_{x-5} und u_{x+5}, 13 Werte in die Rechnung ein.

Bezeichnet man die Ordinaten der drei Punkte, durch welche die Parabel (3) hindurch gelegt wird, der Einfachheit halber mit y_{-1}, y_0, y_1 (so daß beispielsweise $y_{-1} = u_{x-5}$, $y_0 = u_x$, $y_1 = u_{x+5}$ ist), ihre ersten Differenzen mit Δy_{-1}, Δy_0, die zweite Differenz mit $\Delta^2 y_{-1}$, wird ferner y_0 in die Ordinatenachse verlegt und der Abstand zwischen y_{-1} und y_0, y_0 und y_1 als Einheit angenommen, so ergibt sich aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_{-1} &= \alpha - \beta + \gamma \\ y_0 &= \gamma \\ y_1 &= \alpha + \beta + \gamma \end{aligned}$$

durch Bildung von Differenzen und Auflösung:

$$\alpha = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2}, \quad \beta = \Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2}, \quad \gamma = y_0;$$

in dieser Darstellung lautet also die von Woolhouse benützte Interpolationsformel:

$$y = y_0 + x\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{2}\Delta^2 y_{-1}. \tag{7}$$

c) In jüngster Zeit hat J. Karup[1]) eine neue Ausgleichungsmethode ausführlich entwickelt, die in bezug auf Regelmäßigkeit der Resultate der vorigen und um so mehr vielen andern mechanischen Ausgleichungsarten überlegen ist. Hier soll nur der Grundgedanke dargelegt werden.

Während die Woolhousesche Interpolation, die nach (7) bis zu den zweiten Differenzen geht, in fortgesetzter Anwendung zu Parabelbögen führt, die dort, wo sie zusammenstoßen, Ecken bilden, aus welchen Unregelmäßigkeiten in dem Verlaufe der ausgeglichenen Zahlen entspringen, wendet Karup eine Interpolation an, die auch noch die dritten Differenzen einbezieht und zur Folge hat, daß die Parabelbögen dort, wo sie zusammentreffen, einander auch berühren; er nennt daher seine Interpolation eine *oskulierende.*

Es seien

$$y_{-1} \quad y_0 \quad y_1 \quad y_2$$

äquidistante Beobachtungswerte, und es handle sich um die Interpolation zwischen y_0 und y_1, die durch eine parabolische Kurve MN

1) Transactions of the second internat. actuar. Congr. London 1898, p. 31 ff.

(Fig. 42) erfolgen soll; sorgt man dafür, daß der Differentialquotient in M, y_0', für die hier zusammenstoßenden Parabelbögen LM und MN, ebenso der Differentialquotient in N, y_1', für die Bögen MN und NP denselben Wert besitzt, so ist der oben beschriebene Sachverhalt erreicht.

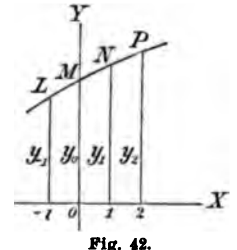


Fig. 42.

Setzt man die Tangentenrichtung in M als parallel zu LN, die in N als parallel zu MP fest, was darauf hinausläuft, bei den zweiten Differenzen stehen zu bleiben, so ist:

$$y_0' = \frac{y_1 - y_{-1}}{2} = \Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2}$$

$$y_1' = \frac{y_2 - y_0}{2} = \Delta y_1 + \frac{\Delta^2 y_0}{2}.$$

Der Forderung, daß die Kurve durch M und N gehe und dort vorgeschriebene Tangentenrichtungen besitze, ist durch eine Parabel dritter Ordnung zu genügen, deren Gleichung lauten möge:

$$y = (1 - x)^2 (A_0 + A_1 x) + x^2 (B_0 + B_1 (1 - x)); \tag{8}$$

zur Bestimmung der Koeffizienten hat man dann die Gleichungen:

$$y_0 = A_0$$

$$y_1 = B_0$$

$$y_0' = -2A_0 + A_1 = \Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2}$$

$$y_1' = \quad 2B_0 - B_1 = \Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2}.$$

Setzt man diese Werte in (8) ein und ordnet nach den Differenzen, dabei $\Delta^2 y_0$ durch $\Delta^2 y_{-1} - \Delta^3 y_{-1}$ ersetzend, so wird

$$y = y_0 + x\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{x^2(x-1)}{2}\Delta^3 y_{-1}. \tag{9}$$

Von dieser Interpolationsformel, die mit ihrem letzten Gliede über (7) hinausgeht, macht Karup Gebrauch, im übrigen dem Gedankengange Woolhouse folgend. Es werden, um den ausgeglichenen Wert für u_x zu erlangen, auf Grund folgender Punktequadrupel Interpolationen nach Maßgabe der Formel (9) vollzogen:

$$\begin{matrix} u_{x-6} & u_{x-1} & u_{x+4} & u_{x+9} \\ u_{x-7} & u_{x-2} & u_{x+3} & u_{x+8} \\ u_{x-8} & u_{x-3} & u_{x+2} & u_{x+7} \\ u_{x-9} & u_{x-4} & u_{x+1} & u_{x+6}; \end{matrix}$$

zwischen das mittlere Paar eines jeden Quadrupels wird der Wert von u_x eingeschaltet, und aus den vier so *berechneten* und dem *beobachteten* u_x wird das arithmetische Mittel als „ausgeglichener" Wert angenommen. Bei der Einschaltung in das erste Quadrupel treten an die Stelle von

$$y_{-1} \quad y_0 \quad y_1 \quad y_2$$

und ihrer Differenzen

$$\begin{matrix} \Delta y_{-1} & \Delta y_0 & \Delta y_1 \\ \Delta^2 y_{-1} & \Delta^2 y_0 & \\ \Delta^3 y_{-1} & & \end{matrix}$$

die Werte u_{x-6}, u_{x-1}, u_{x+4}, u_{x+9} nebst ihren Differenzen, und aus y geht der erste eingeschaltete Wert von u_x hervor, indem man $x = \frac{1}{5}$ setzt, so daß er sich ausdrückt durch:

$$u_{x-1} + \frac{1}{5} \Delta u_{x-1} - \frac{2}{25} \Delta^2 u_{x-6} - \frac{2}{125} \Delta^3 u_{x-6};$$

ähnlich ergibt sich aus dem zweiten Quadrupel $\left(\text{mit } x = \frac{2}{5}\right)$ der zweite interpolierte Wert:

$$u_{x-2} + \frac{2}{5} \Delta u_{x-2} - \frac{3}{25} \Delta^2 u_{x-7} - \frac{6}{125} \Delta^3 u_{x-7},$$

weiter der dritte und vierte:

$$u_{x-3} + \frac{3}{5} \Delta u_{x-3} - \frac{3}{25} \Delta^2 u_{x-8} - \frac{9}{125} \Delta^3 u_{x-8}$$

$$u_{x-4} + \frac{4}{5} \Delta u_{x-4} - \frac{2}{25} \Delta^2 u_{x-9} - \frac{8}{125} \Delta^3 u_{x-9}.$$

Drückt man die Differenzen durch die Glieder der ursprünglichen Reihe aus, so ergibt sich schließlich die Karupsche Formel[1]) für den ausgeglichenen Wert:

$$\begin{aligned} u_x' = 0{,}2000\, u_x &+ 0{,}1824\,(u_{x-1} + u_{x+1}) + 0{,}1392\,(u_{x-2} + u_{x+2}) \\ &+ 0{,}0848\,(u_{x-3} + u_{x+3}) + 0{,}0336\,(u_{x-4} + u_{x+4}) \\ &- 0{,}0128\,(u_{x-6} + u_{x+6}) + 0{,}0144\,(u_{x-7} + u_{x+7}) \\ &- 0{,}0096\,(u_{x-8} + u_{x+8}) - 0{,}0032\,(u_{x-9} + u_{x+9}). \end{aligned} \qquad (10)$$

Dieselbe greift auf neun Altersklassen vor und zurück mit Übergehung der Alter $x - 5$ und $x + 5$, benützt also 17 Zahlen der Originalreihe, ihnen nach außen hin abnehmende und schließlich sehr kleine Gewichte beilegend.

Über den äußeren Erfolg der Ausgleichung belehrt das graphische

1) Das von Karup l. c. angegebene neue Verfahren besteht aber nicht in einer Anwendung dieser Formel allein, sondern setzt sich aus drei Prozessen zusammen, und erst bei dem letzten kommt die Formel zur Geltung.

Auftragen der ausgeglichenen Werte oder die Bildung der Differenzenreihen.

Nachstehend ist eine Probe der Anwendung der vorgeführten mechanischen Methoden auf eine Beobachtungsreihe, bestehend in Sterblichkeitsprozentsätzen (100-fachen Sterbenswahrscheinlichkeiten) mitgeteilt.

Beobachtungen: $H^{M(5)}$.[1])

Alter	Unausgeglichener Sterblichkeitsprozentsatz	Ausgeglichener Sterblichkeitsprozentsatz nach			
		Wittstein		Woolhouse	Karup
		Formel (1)	Formel (2)	Formel (6)	Formel (10)
20	0,51			0,833	0,827
21	0,90			0,966	0,944
22	1,11	0,938		1,028	1,024
23	1,71	1,048		1,071	1,064
24	0,46	1,092	1,014	1,082	1,068
25	1,06	1,084	1,026	1,051	1,051
26	1,12	0,906	1,017	1,006	1,023
27	1,07	1,002	0,990	0,994	0,993
28	0,82	1,000	0,995	0,970	0,968
29	0,94	0,958	0,959	0,946	0,946
30	1,05	0,910	0,947	0,920	0,927
31	0,91	0,924	0,929	0,917	0,917
32	0,83	0,944	0,926	0,926	0,918
33	0,89	0,908	0,944	0,923	0,930
34	1,04	0,942	0,969	0,943	0,956
35	0,87	1,000		1,000	0,994
36	1,08	1,052		1,035	1,035
37	1,12			1,070	1,072
38	1,15			1,107	1,099

199. Graphische Ausgleichung. Ein in der gesamten Beobachtungstechnik vielfach geübtes Verfahren, um den Zusammenhang zwischen zwei variabeln Größen x, y, über den eine Reihe von Beobachtungen vorliegt, zu tabellarisieren, besteht darin, daß man die zusammengehörigen Wertepaare durch Punkte in einem Koordinatensystem darstellt und nun eine Kurve verzeichnet, die dem Zuge der Punkte möglichst getreu folgt und ihnen „möglichst nahe“ liegt (s. Nr. 152). Die Kurve bewirkt dann nicht bloß eine „Ausgleichung“ der Beobachtungsfehler, sondern zugleich eine Interpolation des Zusammenhanges. Der Vorgang gründet sich einerseits auf die Voraussetzung, daß den Werten y, die aus der Beobachtung hervorgingen, zufällige Fehler anhaften, die also bald in dem einen, bald in dem andern Sinne wirken, andererseits auf die Vorstellung, daß zwischen

1) Dies ist das Zeichen für jene Beobachtungen der 20 britischen Gesellschaften, welche an Personen nach 5-jähriger Versicherungsdauer vorgenommen worden sind.

x, y ein analytischer Zusammenhang bestehe, dem geometrisch eine Kurve entspricht.

Das graphische Verfahren ist nun auch zur Ausgleichung von Sterblichkeitsbeobachtungen benützt worden, und man kann nicht sagen, daß es durch die fortschreitende Ausbildung der andern, zumal der mechanischen, Methoden zurückgedrängt wurde; es ist im Gegenteil in jüngster Zeit wieder stärker in Aufnahme gekommen, und zwar nicht nur bei kleineren Beobachtungszahlen, wo es das allein passende ist, sondern auch bei breit angelegten Beobachtungen [Spragues[1]) Ausgleichung der Tafel $H^{M(5)}$].

Als Schattenseite des Verfahrens wird der Umstand hervorgehoben, daß es zeichnerische Geschicklichkeit und gute Beurteilungsgabe erfordere; ferner weist man darauf hin, daß ihm das Merkmal einer eigentlichen Methode insofern abgehe, als ein subjektives Moment zwischen Beobachtung und endgiltiges Resultat trete: verschiedene Personen werden durch das Verfahren zu verschiedenen Ergebnissen gelangen. Diesem Einwurf könnte entgegengehalten werden, daß die Wahl unter den verschiedenen mechanischen Methoden auch ein subjektives Moment bedeute; nachdem sie getroffen, hängt das Resultat allerdings von der Person des Ausführenden nicht mehr ab.

Ein Vorteil der graphischen Ausgleichung muß aber darin erblickt werden, daß sie die Verwertung vorausgehender Erfahrungen gestattet und dadurch oftmals die Wiedergabe charakteristischer Nüancen in dem Verlaufe der Erscheinung ermöglicht, die durch eine mechanische Methode leicht verwischt werden können. Wo also Erfahrung und Geschicklichkeit vorhanden sind, kann das graphische Verfahren zu besseren Resultaten führen als irgend eine andere Methode.

Es sind auch verschiedene Vorschläge gemacht worden, welche darauf hinzielen, die Sicherheit des Verfahrens zu erhöhen, den Spielraum der Willkür zu begrenzen. Ein Mittel, von dem Gebrauch gemacht werden sollte, besteht darin, zu jedem empirischen Werte — als solchen denken wir uns die Sterbenswahrscheinlichkeit oder den Sterblichkeitsprozentsatz als die bisher bei der graphischen Ausgleichung ausnahmslos benutzte Funktion — ein Genauigkeitsmaß, etwa den mittleren oder den wahrscheinlichen Fehler (s. Nr. 164), zu berechnen und in das Diagramm zu beiden Seiten des zugehörigen Punktes einzutragen; durch Verbindung der einer- und anderseits gelegenen Punkte ergibt sich eine sogenannte Fehlerzone, über welche die Ausgleichungskurve nicht hinaustreten soll, wenn bei keinem der

1) Bezüglich seiner Ausbildung des graphischen Verfahrens vgl. London Journ. Inst. Actuar. 21 (1879), p. 445; ibid. 26 (1886), p. 77; ibid. 29 (1891), p. 59, 232.

ausgeglichenen Werte eine über jene Grenze hinausgehende Abweichung von dem wahren (oder normalen) Werte mit der hierzu gehörigen Wahrscheinlichkeit erwartet werden soll.

Ein anderes Mittel, von dem jedoch wegen der damit verbundenen Vermehrung der Beobachtungsarbeit nicht leicht Gebrauch gemacht werden dürfte, bestünde in einer Vermehrung der Altersabstufungen, für welche die Sterbenswahrscheinlichkeit (immer pro Jahr gerechnet) bestimmt wird. So sind bei der Konstruktion der Beamtenvereinstafel die Alter nach Monaten abgestuft und innerhalb eines Altersjahres zwölf Werte der Sterbenswahrscheinlichkeit bestimmt worden[1]).

Liegen über eine Beobachtungsreihe mehrere graphische Ausgleichungen vor, so läßt sich auch ein objektives Urteil über ihre relative Güte *im ganzen*, über den Grad ihrer Annäherung an die Beobachtungswerte gewinnen, und zwar durch die Bildung der Quadratsummen aus den Differenzen zwischen den rohen und den ausgeglichenen Werten, unter Berücksichtigung der Gewichte der der Ausgleichung unterworfenen Größen: Jenes Resultat, das zu der kleinsten Summe führt, darf unter den verglichenen als das beste bezeichnet werden [s. Nr. 152][2]).

III. Abschnitt. Invalidität und Sterblichkeit.

200. Wahrscheinlichkeiten, die aus Invalidität und Sterblichkeit hervorgehen. Eine Gesamtheit von Personen, die sich in den Dienst eines Berufes gestellt haben, erfährt im Laufe der Zeit durch verschiedene Ursachen Änderungen ihres Umfanges und ihrer Zusammensetzung, und zwar:

durch den Beitritt neuer Personen zu dem Berufe;

durch Entlassung und freiwilligen Austritt von Personen aus demselben;

durch den Eintritt der Dienstuntauglichkeit oder Invalidität;

durch Tod.

Der Begriff der Dienstuntauglichkeit bedarf der näheren Bestimmung; es kann sich um dauernde oder vorübergehende, um absolute oder relative Dienstuntauglichkeit handeln. Hier soll fortab hierunter der Eintritt der Unfähigkeit zur Ausübung des der Beobachtung zugrunde liegenden Berufes verstanden und die Invalidität in diesem Sinne als eine dauernde angesehen werden. Fälle, wo in-

---

1) Siehe die Literaturnachweise in Nr. 194.

2) Vorgang J. Kaans, vgl. E. Blaschke, Die Methoden der Ausgleichung etc., p. 51.

folge Aufhörens der Unfähigkeit Reaktivierung für den ursprünglichen Beruf erfolgt, würden als Neueintritt behandelt.

Die Ursachen, welche Invalidität und Tod herbeiführen, sind untrennbar mit einander verbunden; Umstände, unter welchen in dem einen Falle Berufsunfähigkeit sich einstellt, können in einem andern Falle den Tod zur Folge haben; dieselben Ursachen, die die Kräfte für die Berufsausübung aufzehren, mindern auch die Lebenskraft herab und haben daher Einfluß auf die Sterblichkeit; ihre Wirkung macht sich also auch noch geltend, wenn nach erfolgter Invalidisierung der weitere Einfluß des Berufes aufhört.

Die Todesfälle sind zu unterscheiden in solche, die im Zustande der Aktivität eintraten, und in solche, von welchen Invalide betroffen worden sind. Die Unterscheidung kann mitunter von formalen Momenten abhängen. Es kann einem Todesfalle tatsächlich Berufsunfähigkeit vorangehen, ohne daß er der Kategorie der Invaliden beigezählt würde, weil die Dienstuntauglichkeit nicht ausgesprochen und die Ausscheidung aus dem Berufe nicht vollzogen wurde.

Wenn man sich vorstellt, daß mit der Beobachtung in einem Augenblicke begonnen wurde, wo nur Berufsfähige, Aktive, vorhanden waren, so wird nach Ablauf einer Zeit der Bestand sich trennen in Diensttaugliche und in Dienstuntaugliche, *Aktive* und *Invalide.* Die weitere Beobachtung kann sich dann beziehen auf den ganzen *gemischten* Bestand, auf die Aktiven allein und auf die Invaliden allein.

Auf den gemischten Bestand und die Aktiven wirken Invalidisierung und Sterblichkeit zugleich; auf die Invaliden nur (die ihnen eigentümliche) Sterblichkeit. Daß zwischen der Sterblichkeit der Aktiven und der Invaliden unterschieden werden muß, geht aus der Erwägung hervor, daß aus der Tatsache des Eintrittes der Berufsunfähigkeit auf einen höheren Grad der Verminderung der Lebenskraft zu schließen ist als bei den Aktiven desselben Alters.

Die Erscheinungen, welche sich bei der Beobachtung nach (einjährigen) Altersklassen dem Vorangeschickten zufolge einstellen können, führen zu einer Reihe von Wahrscheinlichkeitsbegriffen, unter der Voraussetzung allerdings, daß die Bedingungen, welche dem ganzen Erscheinungscomplex zugrunde liegen, den Wahrscheinlichkeitsbegriff überhaupt zulassen (s. Nr. 168 u. 172). Untersuchungen nach dieser Richtung liegen bisher nicht vor; es muß daher zunächst von dieser Vorfrage abgesehen werden.

Die für das betrachtete Erscheinungsgebiet maßgebenden Wahrscheinlichkeiten sind nun die folgenden:

$p_x^{(aa)}$ die Wahrscheinlichkeit für einen x-jährigen Aktiven, das Alter $x+1$ aktiv zu erleben;

$q_x^{(aa)}$ die Wahrscheinlichkeit für denselben, vor Erreichung dieses Alters als Aktiver zu sterben

$p_x^{(ai)}$ die Wahrscheinlichkeit für einen x-jährigen Aktiven, das Alter $x+1$ als Invalide zu erleben;

$q_x^{(ai)}$ die Wahrscheinlichkeit für denselben, vor Erreichung dieses Alters nach eingetretener Invalidität zu sterben;

w_x die Wahrscheinlichkeit für einen x-jährigen Aktiven, vor Erreichung des Alters $x+1$ dienstuntauglich zu werden (*Invaliditätswahrscheinlichkeit*);

α_x die Wahrscheinlichkeit für einen x-jährigen Aktiven, vor Erreichung des Alters $x+1$ aus der Gruppe der Aktiven, sei es durch Invalidität, sei es durch Tod, auszuscheiden (*Ausscheidewahrscheinlichkeit*);

$p_x^{(ii)}$, $q_x^{(ii)}$ die Lebens-, beziehungsweise Sterbenswahrscheinlichkeit eines x-jährigen Invaliden;

$p_x^{(a)}$, $q_x^{(a)}$ die Lebens-, beziehungsweise Sterbenswahrscheinlichkeit schlechtweg eines x-jährigen Aktiven;

p_x, q_x die Lebens-, beziehungsweise Sterbenswahrscheinlichkeit für einen x-jährigen aus dem gemischten Bestande (*allgemeine* Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeit).

Von diesen Wahrscheinlichkeiten bedürfen die beiden ersten einer näheren Erklärung, weil ihnen verschiedene Deutung zu Teil wurde. Hier soll $q_x^{(aa)}$ das Verhältnis der Sterbefälle unter den Aktiven auf der Altersstufe $(x, x+1)$ zu der Zahl der Aktiven des Alters x, und $p_x^{(aa)}$ das Verhältnis der Zahl der Aktiven, welche das Alter $x+1$ erleben, zur Zahl der Aktiven des Alters x bedeuten, von Ein- und Austritten abgesehen. G. Behm[1]) hingegen dachte im Sinne einer von Wittstein[2]) zuerst entwickelten Anschauung bei $q_x^{(aa)}$ an eine Sterbenswahrscheinlichkeit der Aktiven, die sich einstellen würde, wenn deren Herabminderung nur durch den Tod und nicht auch durch Invalidisierung erfolgte, unter der künstlichen Vorstellung also, daß jeder wegen Dienstuntauglichkeit aus der Gruppe der Aktiven Ausscheidende durch einen gleichaltrigen Aktiven ersetzt werde.

201. Beziehungen zwischen den Wahrscheinlichkeiten und Gewinnung der letzteren aus den Beobachtungen. Die auf Invalidität und Sterblichkeit bezüglichen Wahrscheinlichkeitsgrößen, ihre gegenseitige Abhängigkeit und ihre Ableitung aus Beobachtungen waren in den letzten Dezennien Gegenstand vielfacher Studien und lebhafter Kontroversen. Bot es schon Schwierigkeiten, alle hier maßgebenden Größen zu erkennen und so zu definieren, daß sie der empirischen Bestimmung zugänglich werden, so blieb noch die Aufdeckung der zwischen ihnen bestehenden Beziehungen und

1) Statistik der Mortalitäts-, Invaliditäts- und Morbilitätsverh. bei dem Beamtenpersonal der Deutschen Eisenbahnverwaltungen. Berlin 1876, p. 14.

2) Archiv f. Math. u. Phys. 39 (1862), p. 267 ff.

ihre richtige Einfügung in das System der Wahrscheinlichkeitsrechnung als eine Arbeit übrig, die nicht gleich gelingen konnte[1]).

Die folgende Darstellung folgt dem Gedankengange H. Zimmermanns (l. c.), der seiner Natürlichkeit wegen und vermöge des Anschlusses an die Beobachtungsdaten sich besonders empfiehlt.

An Beobachtungsdaten werden vorausgesetzt:

A Anzahl der Aktiven eines bestimmten Alters x,
P Anzahl der Invaliden desselben Alters

am Beginne des Beobachtungsjahres;

J Anzahl der aus A hervorgegangenen Invaliden;
S_1 Anzahl der im aktiven,
S_2 Anzahl der im invaliden Zustande Gestorbenen

im Laufe des Beobachtungsjahres.

Bei A und P ist bereits die Einbeziehung der im Laufe des Jahres erfolgten Ein- und Austritte (s. Nr. 193) vorausgesetzt, so daß A, P *rechnungsmäßige* Größen bedeuten (die hierfür übliche Ausdrucksweise: unter einjähriger Beobachtung gestandene Aktive, respektive Invalide).

Ohne weitere Erklärung ist zu erkennen, daß das Verhältnis $\frac{S_1}{A}$

---

1) Es seien hier angeführt:

A. Wiegand, Mathematische Grundlagen der Eisenbahnpensionskassen. Halle 1859.

A. Wiegand, Die Sterblichkeits-, Invaliditäts- und Krankheitsverhältnisse bei Eisenbahnbeamten in den Jahren 1868—1869. Journ. d. Colleg. für Lebens-vers.-Wissensch. 2 (1861), p. 67.

G. Behm, Statistik der Mortalitäts-, Invaliditäts- und Morbilitätsverhältnisse bei dem Beamtenpersonal der Deutschen Eisenbahnverwaltungen 1868 bis 1873. Berlin 1876.

H. Zimmermann, Über Dienstunfähigkeits- und Sterbensverhältnisse. Im Auftrage des Vereins Deutscher Eisenbahnverwaltungen. Berlin 1886—1889. (Von 1887 ab unter dem Titel: Beiträge zur Theorie der Dienstunfähigkeits- und Sterbensstatistik, und unter diesem Titel 1890 fortgesetzt von A. Zillmer.)

Die letztgenannten drei Publikationen haben wesentlich beigetragen zur Entwicklung der hierher gehörigen Theorien und zur Schaffung wertvoller Erfahrungsresultate.

Einen bemerkenswerten Ansatz zur Begründung der Theorie der Invalidität hat G. Zeuner, Abhandlungen aus der Mathematischen Statistik, Leipzig 1869, zweite Abhandl., gemacht; zum Ausgangspunkte nahm er die in Nr. 193 abgeleitete Formel (11), den Vorgang der Invalidisierung als Austritt aus einer geschlossenen Gesellschaft auffassend, zu der keine Beitritte erfolgen. Gleich seinen Vorgängern unterscheidet er nicht zwischen der Sterblichkeit der Aktiven und der Invaliden, identifiziert vielmehr beide mit der allgemeinen Sterblichkeit, ohne es aber zu unterlassen, auf diesen Umstand aufmerksam zu machen, zu dessen Beachtung damals eine praktische Möglichkeit nicht vorhanden war. Zeuners Formeln sind aufs neue abgeleitet und mit jenen G. Behms in Vergleich gestellt worden von W. Küttner, Zeitschr. f. Mathem. u. Phys. 25 (1880), p. 11—24, woselbst auch die J. Karupschen Anschauungen über den Gegenstand zur Sprache gebracht werden.

eine empirische Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, als Aktiver zu sterben, und das Verhältnis $\frac{J}{A}$ eine Bestimmung der Invaliditätswahrscheinlichkeit ergibt; wir setzen daher

$$q_x^{(aa)} = \frac{S_1}{A}, \tag{1}$$

$$w_x = \frac{J}{A}. \tag{2}$$

Da von den A Aktiven des Alters x im Laufe des Jahres S_1 durch Tod, J infolge von Dienstuntauglichkeit abgehen, so ist die Wahrscheinlichkeit für einen solchen, das Alter $x+1$ aktiv zu erleben:

$$p_x^{(aa)} = \frac{A - S_1 - J}{A} = 1 - q_x^{(aa)} - w_x; \tag{3}$$

mithin ist $p_x^{(aa)} + q_x^{(aa)} = 1 - w_x$.

Die S_2 Todesfälle unter den Invaliden stammen nicht allein aus den P Invaliden, die am Beginne des Jahres vorhanden waren, sondern teilweise auch aus den J im Laufe des Jahres invalid gewordenen; diese, als allmählich hinzutretend, können für den Beginn des Jahres nur mit einem Bruchteile, θJ, angesetzt werden, so daß

$$q_x^{(ii)} = \frac{S_2}{P + \theta J}; \qquad (0 < \theta < 1) \tag{4}$$

da bei den Invaliden neben leben oder sterben ein drittes ausgeschlossen ist (von dem Falle der Reaktivierung für den ursprünglichen Beruf wird abgesehen), so ist

$$p_x^{(ii)} = \frac{P + \theta J - S_2}{P + \theta J} = 1 - q_x^{(ii)}. \tag{5}$$

Daraus ergibt sich

$$S_2 = Pq_x^{(ii)} + \theta J q_x^{(ii)}.$$

Beachtet man in dieser Formel, daß $Pq_x^{(ii)}$ die aus den ursprünglich vorhandenen Invaliden hervorgegangenen Sterbefälle bedeutet, so folgt daraus, daß $\theta J q_x^{(ii)}$ die Sterbefälle unter den im Laufe des Jahres invalid gewordenen vorstellt; diese Sterbefälle drücken sich aber auch durch $Aq_x^{(ai)}$ aus; folglich ist

$$Aq_x^{(ai)} = \theta J q_x^{(ii)},$$

woraus

$$q_x^{(ai)} = \theta w_x q_x^{(ii)}. \tag{6}$$

Dieser Ausdruck ist wie folgt als Wahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses zu deuten: w_x ist die Wahrscheinlichkeit, im Laufe des Jahres invalid zu werden, und $\theta q_x^{(ii)}$ die Wahrscheinlichkeit, nach dem Invalidwerden und vor Schluß des Jahres zu sterben.

Da von den J dienstuntauglich erklärten $\theta J q_x^{(ii)}$ noch vor Ablauf

des Jahres starben, so verblieben $J - \theta J q_x^{(ii)}$ am Leben; diese Anzahl ist aber auch durch $A p_x^{(ai)}$ gegeben, so daß

$$A p_x^{(ai)} = J(1 - \theta q_x^{(ii)});$$

daraus bestimmt sich

$$p_x^{(ai)} = w_x(1 - \theta q_x^{(ii)}) = w_x - q_x^{(ai)}, \tag{7}$$

weshalb $p_x^{(ai)} + q_x^{(ai)} = w_x$ und vermöge (3): $p_x^{(aa)} + q_x^{(aa)} + p_x^{(ai)} + q_x^{(ai)} = 1$ ist.

Von den A Aktiven zu Jahresanfang sterben $A q_x^{(aa)}$ als Aktive, $A q_x^{(ai)}$ als Invalide; die Anzahl aller dieser Todesfälle kommt auch gleich dem Produkt $A q_x^{(a)}$; daher ist

$$q_x^{(a)} = q_x^{(aa)} + q_x^{(ai)} = q_x^{(aa)} + \theta w_x q_x^{(ii)}. \tag{8}$$

In den Beobachtungsgrößen ausgedrückt ist also

$$q_x^{(a)} = \frac{S_1}{A} + \theta \frac{J}{A} \frac{S_2}{P + \theta J} = \frac{P S_1 + \theta J (S_1 + S_2)}{A(P + \theta J)}.$$

Durch einen ähnlichen Schluß ergibt sich

$$p_x^{(a)} = p_x^{(aa)} + p_x^{(ai)} = 1 - q_x^{(aa)} - w_x + w_x(1 - \theta q_x^{(ii)}) = 1 - q_x^{(a)}, \tag{9}$$

wie es sein muß, weil es außer den zwei Ereignissen, auf die sich $p_x^{(a)}$, $q_x^{(a)}$ beziehen, eine dritte Möglichkeit nicht gibt.

Für die Ausscheidewahrscheinlichkeit α_x gilt der Definition gemäß der Ansatz:

$$\alpha_x = q_x^{(aa)} + w_x = 1 - p_x^{(aa)} = \frac{S_1 + J}{A}. \tag{10}$$

Um endlich die Sterbens- und Lebenswahrscheinlichkeit für den gemischten Bestand zu erhalten, hat man zu beachten, daß dieser Sterbenswahrscheinlichkeit q_x die Gesamtheit der beobachteten Sterbefälle entspricht, daß also

$$\begin{aligned}(A + P) q_x &= S_1 + S_2 \\ &= A q_x^{(aa)} + P q_x^{(ii)} + \theta A w_x q_x^{(ii)} \\ &= A q_x^{(a)} + P q_x^{(ii)};\end{aligned}$$

daraus bestimmt sich

$$q_x = \frac{A q_x^{(a)} + P q_x^{(ii)}}{A + P}; \tag{11}$$

p_x, als Komplement hierzu, erhält zufolge (5) und (9) den Ausdruck

$$p_x = \frac{A p_x^{(a)} + P p_x^{(ii)}}{A + P}. \tag{12}$$

Es stellt sich sonach q_x als arithmetisches Mittel aus $q_x^{(a)}$ und $q_x^{(ii)}$, ebenso p_x als arithmetisches Mittel aus $p_x^{(a)}$ und $p_x^{(ii)}$ dar, wenn man diesen Zahlen die Gewichte A, P beilegt.

In den Formeln befindet sich noch der unbestimmt gelassene echte Bruch θ, dessen Einführung gelegentlich der Aufstellung von $q_x^{(ii)}$ erfolgte. Man gelangt nun mit Hilfe der folgenden Hypothese zu einer zureichenden Approximation dieses Bruches: Sowohl die Sterbefälle unter den Invaliden, wie auch die Invalidisierungen der Aktiven während einer einjährigen Altersstufe verteilen sich gleichförmig über dieselbe. Darnach drückt sich die Anzahl der in dem Altersintervall $(x+t,\ x+t+dt)$, wobei t eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl bedeutet, erfolgenden Invalidisierungen durch Jdt, die Anzahl der aus diesen Invaliden bis zum Schlusse des Jahres resultierenden Sterbefälle durch $(1-t)\,q_x^{(ii)}Jdt$ aus; folglich sterben von den im Altersjahre $(x,\ x-1)$ invalid gewordenen noch im Laufe desselben im ganzen

$$\int_0^1 (1-t)\,q_x^{(ii)}Jdt = q_x^{(ii)}J\int_0^1 (1-t)\,dt = \frac{1}{2}\,q_x^{(ii)}J;$$

hierzu die $q_x^{(ii)}P$ Sterbefälle aus den anfänglich vorhandenen Invaliden, gibt

$$S_2 = q_x^{(ii)}P + \frac{1}{2}\,q_x^{(ii)}J,$$

woraus

$$q_x^{(ii)} = \frac{S_2}{P+\frac{1}{2}J}. \tag{4*}$$

Die Hypothese führt also zu $\theta = \frac{1}{2}$, und diesen Wert kann man auch beibehalten. Hiermit lautet insbesondere die Formel (6):

$$q_x^{(ai)} = \frac{1}{2}\,w_x q_x^{(ii)}. \tag{6*}$$

202. Tafeln, in welchen Invalidität und Sterblichkeit zum Ausdruck kommen. Aus statistischen Erhebungen, wie sie zu Beginn der vorigen Nummer vorausgesetzt worden sind, können verschiedene Tabellen konstruiert werden, in welchen die Wirkung der Invalidität oder der Sterblichkeit oder beider Momente zugleich zum Ausdruck kommt. Solche Tafeln sind namentlich aus den statistischen Erhebungen, die der Verein Deutscher Eisenbahnverwaltungen in betreff seines großen Personales in dem Zeitraume 1868 bis 1889 vornehmen ließ, wiederholt abgeleitet worden; neben der wirtschaftlich-praktischen Bedeutung kommt diesen Tafeln auch ein hervorragendes allgemeines Interesse zu. Da sie bereits vielfache Verwendung gefunden haben und die Grundlage für neue Tabellenarbeiten geworden sind, wird es nicht unzweckmäßig sein, sie hier anzuführen und den Gang ihrer Konstruktion anzudeuten.

a) *Invalidensterbetafel.* Ist P die rechnungsmäßige Anzahl der Dienstunfähigen eines bestimmten Alters x, abgeleitet aus denjenigen, welche dieses Alter unter Beobachtung überschritten, und jenen, welche nach Erreichung dieses Alters und vor dem Alter $x + 1$ in die Beobachtung eintraten, sowie jenen, welche auf dieser Altersstufe aus der Beobachtung ausschieden; ist ferner S_2 die Anzahl der zwischen diesen Altersgrenzen unter den Dienstunfähigen beobachteten Todesfälle, so berechnet sich aus diesen Daten:

$$q_x^{(ii)} = \frac{S_2}{P}.$$

Mit Hilfe der Reihe dieser Wahrscheinlichkeiten wird eine Abfallsordnung der Invaliden gebildet, welche bei einem Alter n, wo von Invaliden bereits gesprochen werden kann, mit einer willkürlich gewählten runden Zahl $l_n^{(i)}$ beginnt; ihre Zahlen ergeben sich nach dem Schema:

$$\begin{aligned} &l_n^{(i)}, \\ &l_{n+1}^{(i)} = l_n^{(i)} - q_n^{(ii)} l_n^{(i)} \\ &l_{n+2}^{(i)} = l_{n+1}^{(i)} - q_{n+1}^{(ii)} l_{n+1}^{(i)} \\ &\cdots\cdots\cdots; \end{aligned}$$

die Subtrahenden bezeichnen dabei die successiven Sterbefälle unter den Invaliden. Nach dieser Arbeit erübrigt die Ausgleichung der Tafel und eine womöglich auf begründete Erfahrung gestützte Beseitigung offenkundiger, aus der Unvollkommenheit der Beobachtungen zu erklärender Unregelmäßigkeiten.

Invalidensterbetafeln sind berechnet worden von H. Zimmermann[1]) und H. Bentzien[2]). Die erste umfaßt die Beobachtungen aus dem Zeitraume 1868—1884 mit

109 778 Personen unter einjähriger Beobachtung und
6 594 Todesfällen;

die zweite stützt sich auf den Zeitraum 1868—1889 und zählt

209 548 Personen unter einjähriger Beobachtung und
12 375 Todesfälle;

ihre Daten sind aus den vier ersten Kolonnen der Tafel VII am Ende des Buches zu ersehen.

Zu bemerken ist noch, daß diese Tafeln strenge genommen das Absterben von Pensionierten statt von Invaliden darstellen, da auch

1) Über Dienstunfähigkeits- und Sterbensverhältnisse. Berlin 1886, p. 100 bis 101.

2) Vereinsblatt für Deutsches Versicherungswesen 20 (1892), p. 119—127.

solche Fälle einbezogen wurden, wo die Pensionierung aus andern Gründen als wegen Dienstunfähigkeit erfolgte. Der Prozentsatz dieser Personen ist aber ein so geringer (etwa 6%), daß sie die Bedeutung der Tafel wenig alterieren.

b) *Ausscheideordnung der Diensttauglichen.* Die Tafel hat zur Darstellung zu bringen, wie eine Grundmenge von Diensttauglichen sich mit dem fortschreitenden Alter vermindert; ihre zwei Zahlenkolonnen, welche den Überlebenden und Gestorbenen einer Sterbetafel entsprechen, geben die Anzahlen der noch vorhandenen Aktiven und die Anzahlen der auf den einzelnen Altersstufen Ausscheidenden. Man kann daher eine solche Tafel auch wohl Aktivitäts- oder Diensttauglichkeitstafel nennen.

Hat man für jedes Alter x die rechnungsmäßige Anzahl der vorhandenen Aktiven, zu deren Bildung außer denen, die dieses Alter unter Beobachtung überschritten, auch die auf der Altersstufe $(x, x+1)$ Eingetretenen und die wegen Invalidität oder aus andern Gründen Ausgetretenen heranzuziehen sind; ferner die Anzahl S_1 der auf der eben bezeichneten Altersstufe Gestorbenen und die Anzahl J der invalid gewordenen, so berechnet sich daraus die Ausscheidewahrscheinlichkeit

$$\alpha_x = \frac{S_1 + J}{A},$$

deren Komplement $p_x^{(aa)}$ ist.

Mit Hilfe der Reihe der Zahlen $p_x^{(aa)}$ wird nun, bei einem Alter n mit einer runden Zahl $l_n^{(a)}$ beginnend, von dem man annehmen kann, daß es nur Aktive aufweist, die Abfallsordnung der Diensttauglichen nach dem Schema:

$$\begin{aligned} &l_n^{(a)} \\ &l_{n+1}^{(a)} = l_n^{(a)} p_n^{(aa)} \\ &l_{n+2}^{(a)} = l_{n+1}^{(a)} p_{n+1}^{(aa)} \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

konstruiert; die ersten Differenzen dieser Reihe geben die aus der Aktivität Ausscheidenden. Dieser Arbeit folgt die Ausgleichung.

Ausscheideordnungen sind von denselben Autoren, von Zimmermann und Bentzien, für das gesamte Personal[1]), von dem ersteren auch gesondert für Zugbeamte, für das Nichtzugpersonal und für das Bahnbewachungspersonal[2]) berechnet worden. Was die erstgenannten zwei Tafeln betrifft, so bezieht sich die Zimmermannsche auf die Zeit 1868—1884 mit

1) Zimmermann, l. c., p. 102—103; Bentzien, l. c. 22 (1894), p. 5—26.
2) Beiträge zur Theorie der Dienstunfähigkeits- und Sterbensstatistik. Berlin 1887, p. 172—175; ibid. 1888, p. 164—165.

2 125 154 Personen unter einjähriger Beobachtung und
42 734 Ausscheidungen;

die Bentziensche auf die Zeit 1868—1889 mit

3 074 513 Personen unter einjähriger Beobachtung und
66 935 Ausscheidungen;

letztere ist in den ersten vier Kolonnen der Tafel VI am Ende des Buches mitgeteilt.

c) *Invaliditätstafel.* Hierunter wird eine Tafel der Wahrscheinlichkeiten verstanden, auf den einzelnen einjährigen Altersstufen aus dem Zustande der Aktivität in den der Dienstuntauglichkeit überzugehen.

Sind für die einzelnen Alter die Zahlen A wie in b) und für die anschließenden Altersklassen die Anzahlen J der eingetretenen Dienstuntauglichkeitsfälle erhoben worden, so ergeben sich daraus unmittelbar die Wahrscheinlichkeiten

$$w_x = \frac{J}{A},$$

die noch der Ausgleichung zu unterziehen sind.

Zimmermann hat mehrere Dienstuntauglichkeitstafeln berechnet; die eine für das gesamte Personal[1]) gründet sich auf die Beobachtungen des Zeitraumes 1868—1884 mit

2 125 154 Personen unter einjähriger Beobachtung und
19 780 Invalidisierungen;

von den andern[2]), aus demselben Zeitraume abgeleitet, bezieht sich die eine auf Zugbeamte, eine andere auf das Nichtzugpersonal, eine dritte und vierte auf das Bahnbewachungspersonal und auf Bureau- u.s.w. Beamte. Für den ganzen Zeitraum von 1868—1889 hat Bentzien[3]) eine das Gesamtpersonal betreffende Invaliditätstafel konstruiert, die auf

3 074 513 einjährig Beobachteten und
33 808 Dienstunfähigkeitsfällen

beruht; sie ist durch die Zahlen der ersten, fünften und sechsten Kolonne der Tafel VI am Ende des Buches wiedergegeben.

d) *Sterbetafel des gemischten Bestandes.* Diese Tafel soll das Absterben der aus Diensttauglichen und Invaliden zusammengesetzten Gesamtheit, wie sie sich unter der Einwirkung der Berufsausübung entwickelt, zur Darstellung bringen. Ihr Vergleich mit einer für eine

1) Über Dienstunfähigkeits- und Sterbensverhältn. 1886, p. 104—105.
2) Beiträge etc. 1887, p. 176—179; ibid. 1888, p. 164—169.
3) l. c. 22 (1894).

ganze Bevölkerung konstruierten Tafel kann dann über die Frage Aufschluß geben, ob der Beruf gegenüber der Gesamtheit eine ungünstige Beeinflussung der Sterblichkeit zur Folge habe.

Ist $A + P$ die rechnungsmäßige Anzahl der Aktiven und Invaliden eines Alters x, $S_1 + S_2$ die Anzahl der auf der folgenden Altersstufe beobachteten Todesfälle unter den Aktiven wie unter den Invaliden, so ergibt sich aus diesen Daten:

$$q_x = \frac{S_1 + S_2}{A + P}.$$

Mit Hilfe dieser Zahlen ist nun aus einer Basis l_n für das Anfangsalter n die Abfallsordnung

$$\begin{aligned} &l_n \\ &l_{n+1} = l_n - q_n l_n \\ &l_{n+2} = l_{n+1} - q_{n+1} l_{n+1} \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned}$$

abzuleiten; daran schließt sich die Ausgleichung.

Die von Zimmermann und Bentzien verfaßten Tafeln für das gesamte diensttaugliche und invalide Dienstpersonal der Eisenbahnen gründen sich auf die Beobachtungen von 1868—1884, beziehungsweise 1868—1889, und rechnen mit

2 225 332, resp. 3 267 862 einjährig beobachteten Personen und

29 548, resp. 45 402 Todesfällen.

Was die Ausgleichung betrifft, so ist bei allen hier angeführten Tafeln in der Hauptsache das Verfahren von Woolhouse (s. Nr. 198) angewendet worden, und zwar bei a) auf die Zahlen $l_x^{(i)}$, bei b) auf die Zahlen $l_x^{(a)}$, bei d) auf die Zahlen l_x. Bei c) wurde der Weg eingeschlagen, daß aus der ausgeglichenen Reihe der $l_x^{(a)}$ mit Hilfe der rohen Invaliditätswahrscheinlichkeiten w_x die Zahlen der als dienstuntauglich Erklärten berechnet wurden; auf diese Zahlen ist der Ausgleichungsprozeß angewendet worden, und die ausgeglichenen Werte mit den ausgeglichenen $l_x^{(a)}$ lieferten die korrigierte Reihe der w_x. Einzelne unbefriedigende Teile der Tafeln wurden noch überdies einer Detailausgleichung unterzogen, die in einer Interpolation nach einer Parabel oder nach der auf das erste Glied reduzierten Wittsteinschen Sterblichkeitsformel (s. Nr. 197 Schluß) bestand.

Als Anfangsalter ist in allen Tafeln $n = 20$ angenommen.

203. Konstruktion der Ausscheideordnung der Aktiven aus einer allgemeinen Sterbetafel. Auch in einer gemischten Gesamtheit von Personen, wie etwa im Bestande einer Versicherungsanstalt, wo es sich nicht um einen einheitlichen Beruf, sondern um eine Mengung verschiedener Berufsarten handelt, kann von Dienst-

untauglichkeitsfällen, daher auch von Aktiven und von einer Ausscheideordnung derselben gesprochen werden. Während der Bestand, wenn von der Invalidität abgesehen wird, in seinem Absterben nach einer für Versicherte geltenden Tafel zu behandeln ist, kommen bei Berücksichtigung der Invalidisierungen auch Dienstuntauglichkeitswahrscheinlichkeiten und die Sterblichkeit unter Invaliden in Rechnung. Diese Daten sind einem Material zu entnehmen, von dem erwartet werden darf, daß es in bezug auf den Eintritt der Dienstuntauglichkeit mit dem in Rede stehenden Bestande nahezu homogen sei.

Es soll nun das Verfahren entwickelt werden, nach welchem aus einer allgemeinen Sterbetafel unter Zugrundelegung von Dienstunfähigkeits- und Invalidensterbetafeln eine Ausscheideordnung der Aktiven zu konstruieren ist[1]).

Aus der allgemeinen Sterbetafel werden die Werte

$$q_x \quad \text{und} \quad p_x = 1 - q_x$$

entnommen; aus den beiden andern Tafeln die Werte

$$w_x \quad \text{und} \quad q_x^{(ii)};$$

daraus berechnet man

$$q_x^{(ai)} = \frac{1}{2} w_x q_x^{(ii)}$$

$$p_x^{(ai)} = w_x - q_x^{(ai)}$$

$$p_x^{(ii)} = 1 - q_x^{(ii)}.$$

Angenommen nun, bei einem bestimmten Alter x sei $l_x^{(a)}$ die Anzahl der Aktiven, P_x die Anzahl der Invaliden; dann hat man

$$l_{x+1}^{(a)} = l_x^{(a)}(1 - w_x) - l_x^{(a)} q_x^{(aa)},$$

wobei der erste Teil rechts die Anzahl der nicht invalid werdenden, der zweite Teil die Anzahl der aktiv sterbenden bedeutet. Ferner ist

$$(l_x^{(a)} - P_x) q_x = l_x^{(a)} (q_x^{(aa)} + q_x^{(ai)}) + P_x q_x^{(ii)};$$

die linke Seite bedeutet die Gesamtzahl der zu erwartenden Sterbefälle, die rechte Seite läßt ihre Aufteilung in die drei durch (aa), (ai), (ii) gekennzeichneten Kategorien erkennen. Berechnet man aus diesem Ansatze $l_x^{(a)} q_x^{(aa)}$ und setzt den Wert in die vorletzte Gleichung ein, so wird

$$\begin{aligned} l_{x+1}^{(a)} &= l_x^{(a)}(1 - q_x - w_x + q_x^{(ai)}) + P_x(q_x^{(ii)} - q_x) \\ &= l_x^{(a)}(p_x - p_x^{(ai)}) + P_x(p_x - p_x^{(ii)}). \end{aligned} \qquad (1)$$

Andererseits ist

$$P_{x+1} = l_x^{(a)} p_x^{(ai)} + P_x p_x^{(ii)}, \qquad (2)$$

1) Vgl. Beiträge zur Theorie der Dienstunfähigkeit etc. 1888, p. 5 ff.

oder mit Rücksicht auf (1):

$$P_{x+1} = (l_x^{(a)} + P_x)p_x - l_{x+1}^{(a)}. \tag{2*}$$

Mithin kann für (1) auch geschrieben werden:

$$l_{x+1}^{(a)} = (l_x^{(a)} + P_x)p_x - P_{x+1}. \tag{3}$$

Mit Hilfe der Formeln (2) und (3) läßt sich die Ausscheideordnung wie folgt berechnen. Man geht von einem Alter n, das noch keine Invaliden aufweist, so daß $P_n = 0$ ist, mit einer beliebig gewählten (runden) Zahl $l_n^{(a)}$ aus, bestimmt nach (2):

$$P_{n+1} = l_n^{(a)} p_n^{(ai)}$$

und nach (3):

$$l_{n+1}^{(a)} = l_n^{(a)} p_n - P_{n+1};$$

hiermit weiter nach denselben Formeln:

$$P_{n+2} = l_{n+1}^{(a)} p_{n+1}^{(ai)} + P_{n+1} p_{n+1}^{(ii)}$$

$$l_{n+2}^{(a)} = (l_{n+1}^{(a)} + P_{n+1}) p_{n+1} - P_{n+2}$$

u. s. w. bis zum höchsten Alter, das noch Aktive zählt.

In der nachstehenden Tabelle ist der Anfang einer solchen Rechnung dargestellt. Dabei sind die Grundzahlen:

p_x der Tafel MI. der 23 deutschen Gesellschaften (s. Nr. 195),

w_x der Dienstuntauglichkeitstafel für Bureau- u. s. w. Beamte (s. Nr. 202),

$q_x^{(ii)}$ der Sterbetafel für invalides Eisenbahnpersonal (s. Nr. 202)

entnommen. Der weitere Gang der Rechnung ist aus den Überschriften der Kolumnen und aus den Formeln leicht zu erkennen.

x	$l_x^{(a)}$	p_x	w_x	$q_x^{(ii)}$	$p_x^{(ii)}$	$q_x^{(ai)} = \frac{1}{2} w_x q_x^{(ii)}$	$p_x^{(ai)} = w_x - q_x^{(ai)}$	$(l_x^{(a)} - P_x) \times p_x$	$l_x^{(a)} p_x^{(ai)}$	P_x	$P_x p_x^{(ii)}$
20	100 000	0,99375	0,00020	0,1020	0,8980	0,00001	0,00019	99 375	19	0	0
21	99 356	0,99381	0,00023	0,0981	0,9019	0,00001	0,00022	98 760	22	19	17
22	98 721	0,99387	0,00026	0,0943	0,9057	0,00001	0,00025	98 155	25	39	35
23	98 095	0,99374	0,00030	0,0905	0,9095	0,00001	0,00029	97 541	28	60	55
24	97 458	0,99365	0,00034	0,0868	0,9132	0,00001	0,00033	96 922	32	83	76
25	96 814									108	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Vierter Teil.

Lebensversicherungsrechnung.

I. Abschnitt. Versicherungswerte.

§ 1. Grundlagen.

204. Grundlagen der Lebensversicherungsrechnung. Die Lebensversicherungsrechnungen beruhen einerseits auf der Intensität bestimmter menschlicher Massenerscheinungen, andererseits auf der Intensität des Wachstums von Geldsummen in der Zeit infolge der Verzinsung.

Ihre *Grundlagen* bilden demnach aus der Erfahrung abgeleitete *statistische Daten*, welche den Verlauf der in Betracht kommenden menschlichen Massenerscheinung darstellen, und der *Zinsfuß* als der einfachste Ausdruck für die Stärke der Verzinsung.

Die Theorie der Lebensversicherung setzt die *Stabilität* der beiden maßgebenden Momente mindestens für die Dauer der Versicherung voraus.

Was die Stabilität der Massenerscheinung anlangt, so ist jene *relative* Stabilität gemeint, welche nach den Lehren des § 2 im I. Abschnitte des dritten Teiles die Bildung typischer Wahrscheinlichkeitswerte und die Anwendung der Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf diese gestattet. Bezüglich des Zinsfußes wird *absolute* Stabilität angenommen.

In betreff des ersten Punktes wird weiter die Voraussetzung getroffen, daß der versicherte Bestand jenem Bestande *homogen* sei, durch dessen Beobachtung die statistischen Daten gewonnen worden sind, d. h. daß beide Bestände sich in bezug auf die Intensität der in Frage kommenden Erscheinung gleichartig verhalten.

In der Wirklichkeit werden diese Voraussetzungen nur angenähert erfüllt sein. Bei keiner menschlichen Massenerscheinung, die für Versicherungszwecke in Betracht kommt, ist bisher jener höchste Grad von Stabilität streng nachgewiesen worden, der für die Bildung

typischer Wahrscheinlichkeitsgrößen mit normaler Dispersion (s. Nr. 168) erforderlich ist. Als angenähert vorhanden darf er gelten bei den Sterblichkeitsverhältnissen; die auf diese allein sich gründende Lebensversicherung *im engeren Sinne* darf daher als der bestbegründete Zweig der *Personalversicherung* bezeichnet werden. Dagegen entbehren manche Erscheinungen, die bei Versicherungen in Betracht kommen, wie Invalidität, Morbidität, Eintritt von Unfällen, nach den bisherigen Erfahrungen des erforderlichen Grades von Beständigkeit, um sie für längere Zeiträume geltenden Rechnungen unterziehen zu dürfen.

Aber selbst wenn der zur Gewinnung der statistischen Unterlage beobachtete Bestand Stabilität zeigte, bliebe noch die Frage offen, ob der versicherte Bestand ihm homogen sei. Von dem seltenen Falle abgesehen, daß eine Unternehmung die statistischen Daten für die Zukunft durch Beobachtungen an ihrem eigenen der Vergangenheit angehörenden Bestande ableitet und an den Grundsätzen der *Auslese* unverändert festhält, sucht man die Homogenität durch die *Wahl der Tafel* und durch entsprechende Gestaltung der *Auslese* zu erzielen.

In Zusammenfassung dieser Ausführungen sind also nicht allein *zufällige*, sondern auch *systematische* Abweichungen des wirklichen Verlaufes der versicherten Erscheinung von der statistischen Grundlage zu erwarten.

Daß die Verzinsung der in mannigfacher Weise angelegten Geldsummen nicht genau nach dem zugrunde gelegten, überhaupt nicht nach einem konstant bleibenden Zinsfuße vor sich geht, zeigt die tägliche Erfahrung. Sie führt dazu, bei der Wahl des Zinsfußes vorsichtig zu Werke zu gehen und sie so zu treffen, daß die wirkliche Verzinsung voraussichtlich dauernd über der rechnungsmäßigen bleibe[1]).

Systematische Vergleichung der wirklichen Entwicklung der Verhältnisse mit der nach den gewählten Grundlagen zu erwartenden ist ein Gebot der Notwendigkeit. Ihr Ergebnis kann unter Umständen zu einer *Änderung der Grundlagen* Veranlassung geben.

Von den Differenzen zwischen den Rechnungsgrundlagen und der Wirklichkeit hängt die *Gebarung* eines Versicherungsunternehmens ab, dessen Gewinne oder Verluste entweder den Versicherten selbst zugute,

---

1) Gegenwärtig tritt der Zinsfuß von $3\frac{1}{2}$ % immer mehr in den Vordergrund, und mehrere deutsche Gesellschaften sind schon auf 3 % herabgegangen; nur ältere Bestände werden noch mit 4, ganz ausnahmsweise sogar mit $4\frac{1}{2}$ und 5 % gerechnet. Nach dem ersten offiziellen Berichte über „Die privaten Versicherungsunternehmungen in den im Reichsrate vertretenen Königreichen und Ländern im Jahre 1898" (Wien 1901) rechneten von 46 in diesem Gebiete tätigen Gesellschaften 5 mit 3, 16 mit $3\frac{1}{2}$, 18 mit 4 und 1 mit 5 % (bei 6 Gesellschaften ist der Zinsfuß nicht angegeben). — Die wirklich erzielte durchschnittliche Verzinsung der veranlagten Kapitalien bewegt sich gegenwärtig um 4 %; in Deutschland schwankte sie 1899 bei 27 nach dieser Richtung verglichenen Anstalten zwischen 3,72 und 4,24 %.

beziehungsweise zur Last fallen (auf Wechselseitigkeit beruhende Versicherungsanstalten), oder die Träger des Unternehmens treffen (Aktiengesellschaften); in letzterem Falle kann auch den Versicherten eine Anteilnahme an dem erzielten Gewinne eingeräumt werden (Gewinnbeteiligung).

205. Statistische Grundlagen. Wo es sich um Lebensversicherungen im engeren Sinne handelt, bilden *Sterbetafeln* die alleinige statistische Grundlage. Für ihre Wahl sind verschiedene Gesichtspunkte maßgebend; am meisten machen sich geltend und werden gegenwärtig fast ausschließlich berücksichtigt die Art der Versicherung und die der Auslese.

Bei der Wahl der Versicherungsart macht sich neben einer eventuell seitens der Unternehmung veranlaßten ärztlichen Untersuchung auch die Selbstbeurteilung des Versicherungsuchenden bemerkbar und beeinflußt den Sterblichkeitsverlauf der betreffenden Gruppe. In dieser Beziehung hat die Erfahrung zur Unterscheidung dreier Hauptgruppen geführt: der reinen Todesfallversicherung, der reinen Erlebens- und der Rentenversicherung und der gemischten Versicherung. Bei der ersten kommt lediglich das Sterben, bei der zweiten das Erleben eines oder einer Reihe von Zeitpunkten, bei der dritten beides zugleich in Betracht. Indessen werden bisher der gemischten Versicherung nicht besondere, sondern Tafeln zugrunde gelegt, die sich auf Todesfallversicherungen beziehen; dagegen wird zwischen Todesfall- und Rentenversicherung fast allgemein unterschieden.

Die ärztliche Untersuchung, welche dem Abschlusse von Versicherungen vorangeht, bei denen das Sterben zu den versicherten Ereignissen gehört, kann im Sinne eines festgesetzten Umfanges *vollständig* oder *unvollständig* sein, letzteres, wenn sie nur auf einen Teil der auf die Sterblichkeit Einfluß nehmenden Umstände Rücksicht nimmt; es gibt aber auch Versicherungen, wo sie gänzlich unterbleibt (Volksversicherung).

Auf Grund der ärztlichen Untersuchung wird das Leben als ein normales, ein unternormales oder als ein minderwertiges bezeichnet. Ein normales Leben wird unter den Bedingungen, welche für die betreffende Versicherungskombination die Norm bilden, angenommen, ein unternormales unter gewissen erschwerenden Kautelen, ein minderwertiges, d. i. ein solches mit ererbten oder erworbenen Krankheitsanlagen oder mit Krankheitsresiduen in der Regel abgelehnt; doch sind auch schon Anfänge mit der Versicherung solcher Leben, die ja gerade häufig am versicherungsbedürftigsten sind, gemacht worden.

Beispiele von Tafeln, welche Versicherungen auf den Todesfall (und gemischten Versicherungen) bei vollständiger ärztlicher Untersuchung zugrunde gelegt werden, sind die Tafel der 17 englischen Gesellschaften, die Tafeln H der 20 britischen Gesellschaften, die

Tafeln I der 23 deutschen Gesellschaften, die Tafeln A. F. der 4 französichen Gesellschaften u. v. a. Von Tafeln, welche bei Rentenversicherungen Verwendung finden, seien außer der Tafel der 17 englischen Gesellschaften von eigentlichen Rentner-Sterbetafeln genannt die von Deparcieux, die sächsische, die deutsche, die der französischen Gesellschaften. Für unternormale Leben werden besondere Tafeln (die Tafeln II der 23 deutschen Gesellschaften wären solche) in der Regel nicht benützt, der Ausgleich vielmehr durch andere Mittel angestrebt. Bei Versicherungen mit unvollständiger oder fehlender ärztlicher Untersuchung kommen die Tafeln III der 23 deutschen Gesellschaften, zumeist aber Volkstafeln, wie die preußische, die deutsche u. a. zur Verwendung[1]).

Außer den bisher besprochenen Hauptmomenten gibt es noch eine Reihe von Umständen, welche nach den vorliegenden Erfahrungen eine Differentiierung der in eine Gruppe zusammengefaßten Leben bedingen; wenn sie heute bei der Wahl der Grundlagen und zu einer detallierteren Gruppierung der Versicherten nur erst sehr ausnahmsweise benützt werden, so liegt dies zum Teil an der Geringfügigkeit des Einflusses, hauptsächlich aber in dem Mangel gesicherter Erfahrungsergebnisse; der Forschung auf dem Gebiete des Versicherungswesens sind damit für die Zukunft vielfältige Aufgaben gestellt.

So hat der wahrgenommene Unterschied im Sterblichkeitsverlaufe der beiden Geschlechter dazu geführt, diese bei der Beobachtung zu trennen und besondere Tafeln für sie aufzustellen; das ist beispielsweise bei den britischen, den deutschen und den französischen Tafeln geschehen und wird wohl in Hinkunft allgemein beobachtet werden. Praktisch wird hiervon vorläufig zumeist nur dann Gebrauch gemacht, wenn Versicherte des einen oder andern Geschlechtes in großer Mehrzahl vorhanden sind.

Durch die ärztliche Auswahl werden aus der Menge Individuen von guter Gesundheit herausgegriffen; zu einer Gesamtheit zusammengefaßt würden sie günstigere Sterblichkeitsverhältnisse aufweisen als die Menge, aus der sie stammen; dieser Zustand hält aber nicht an, geht vielmehr mit der seit der Auslese verflossenen Zeit zurück, so daß die Sterblichkeit wächst und nach einer Anzahl von Jahren (etwa fünf) in einen gewissen Beharrungszustand kommt: die Wirkung

1) Neben den englischen Tafeln, die vielleicht relativ noch immer die häufigst angewendeten sind, kommen auch deutsche Sterbetafeln immer mehr in Aufnahme; französische und amerikanische Tafeln treten zurück. Nach dem in der vorigen Nummer zitierten Bericht über die in Österreich tätigen Versicherungsgesellschaften nach dem Stande von Ende 1898 waren bei 21 Gesellschaften englische Tafeln (17 engl., 20 brit. Ges., Babbage, Farr), bei 12 deutsche Tafeln (23 deutsche Ges. MI. und MWI., Brune, Brune-Fischer), bei 3 amerikanische Tafeln, bei 3 französische Tafeln und bei 1 eine Tafel eigener Provenienz im Gebrauche.

der Auslese ist dann erloschen. Demnach übt bei einem jeden Alter auch die abgelaufene Vertragsdauer einen Einfluß auf die Sterblichkeit. Untersuchungen über diesen Einfluß sind bereits mehrfach angestellt worden; praktische Verwendung haben ihre Ergebnisse erst ausnahmsweise gefunden.

Auch die Höhe der Versicherungssumme, weil mit den Lebensverhältnissen in einem Zusammenhange stehend, übt auf die Sterblichkeit einen Einfluß aus. Das Gleiche gilt vom Beruf, vom Wohnsitz; auch hierüber sind seitens solcher Gesellschaften, bei welchen bestimmte Berufsarten in stärkerem Maße versichert sind, beziehungsweise welche zahlreichere Versicherungen in tropischen Ländern abschließen, Beobachtungen angestellt worden, um Direktiven für eine richtigere Behandlung solcher Versicherungen zu erlangen.

Die fast allgemeine Annahme, daß Personen eines Alters, die zu einer bestimmten Versicherungsart zugelassen worden sind, eine homogene Gesamtheit oder *gleichwertige Risiken* darstellen, ist demnach streng genommen eine Fiktion. G. Bohlmann[1]) unterscheidet normale Risiken und Extrarisiken; unter den ersteren versteht er männliche Leben, die auf Grund vollständiger ärztlicher Untersuchung unter gewöhnlichen Bedingungen auf den Todesfall versichert sind; alle andern Leben, welche durch irgend einen der angeführten Umstände für die Gesellschaft ungünstiger, eventuell auch günstiger erscheinen, faßt er als Extrarisiken zusammen. Häufiger jedoch versteht man unter normalen Risiken solche Leben, die nach vollständiger ärztlicher Untersuchung vorbehaltlos angenommen worden sind[2]).

Zur Lebensversicherung *im weiteren Sinne* wird auch die Versicherung von Witwenpensionen, Waisengeldern, die Invaliditäts-, die Unfall- und die Krankenversicherung gezählt. Die Invaliditätsversicherung wird gegenwärtig mit der eigentlichen Lebensversicherung vielfach in enge Verbindung gebracht. Für manche dieser Zweige, von welchen einige, wie die Invaliditäts-, die Arbeiterunfall- und die Krankenversicherung, in manchen Staaten als öffentliche Institutionen in großem Umfange betrieben werden, ist bereits bedeutendes stati-

1) Encykl. der mathem. Wissensch. I, p. 864—869.

2) Bezüglich der Konstruktion von Sterbetafeln kann auf den § 3, II. Abschnitt des dritten Teiles hingewiesen werden; die am Schlusse von Nr. 194 zitierte Monographie E. Roghés, sowie C. L. Landrés „Mathem.-techn. Kapitel zur Lebensversicherung" (1895), p. 70—74, können zur näheren Orientierung über Sterbetafeln für Versicherungszwecke dienen; über Rentenversicherungen speziell kann B. Schmerler, „Die Sterblichkeitserfahrungen unter den Rentenversicherten" (1893) zu Rate gezogen werden. Betreffend die Versicherung minderwertiger Leben ist E. Blaschkes „Denkschschrift zur Lösung des Problems der Versicherung minderwertiger Leben" (1895) zu nennen. — Eingehende Literaturnachweise über die hier berührten Fragen finden sich bei G. Bohlmann, Encykl. der mathem. Wissensch. I, p. 852 ff.

stisches Beobachtungsmaterial angesammelt, das noch vielfach der Bearbeitung harrt; doch bleibt hier gegenüber der Lebensversicherung noch vieles zu tun. Über Tafeln, welche Invalidität und Sterblichkeit betreffen, handelt der III. Abschnitt des dritten Teiles.

206. Auf die Verzinsung bezügliche Größen und Formeln. Der einfachste Ausdruck der Verzinsungsstärke eines Kapitals besteht in der Angabe des wirklichen *Zinsfußes*, d. i. des am Ende des Jahres fälligen einjährigen Zinses vom Kapital 1 (beliebige Geldeinheit). Er werde mit i bezeichnet[1]). Dann ist $100\,i$ der *Prozentsatz*, d. i. der in gleicher Weise definierte Zins vom Kapital 100. Demnach entsprechen die Werte $i = 0{,}03,\ 0{,}035,\ 0{,}04,\ 0{,}045, \cdots$ den Prozentsätzen $3,\ 3\frac{1}{2},\ 4,\ 4\frac{1}{2}, \cdots$.

Zu dem Zinfuße tritt der Verzinsungsmodus. Man unterscheidet *einfache* und *zusammengesetzte* Verzinsung; bei den Lebensversicherungsrechnungen tritt namentlich der letztere Modus in Kraft.

Bei der einfachen Verzinsung wächst der Zinsertrag proportional mit der Anzahl der Jahre, durch welche das Kapital zinstragend angelegt ist, so daß das Kapital 1 bei dem Zinsfuße i in n Jahren den Zins ni abwirft und auf die Höhe $1 + ni$ anwächst.

Wird jedoch bedungen, daß von dem jährlichen Zinse i nach jedem m-tel des Jahres die entsprechende Quote $\frac{i}{m}$ fällig, aber nicht ausbezahlt, sondern zum Kapital geschlagen (kapitalisiert) und von da ab in derselben Weise weiter verzinst werde, so tritt zusammengesetzte Verzinsung oder die Ansammlung von Zinseszins ein, und aus dem Kapital 1 wird am Ende des ersten Jahres

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m,$$

so daß der wirkliche Zinsertrag dieses Jahres

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$$

ist. In n Jahren erreicht das Kapital unter diesen Umständen die Höhe

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} \tag{1}$$

und liefert den Zins

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1.$$

1) In diesem Teile des Buches wird von der durch die englischen Aktuare ausgebildeten Bezeichnungsweise Gebrauch gemacht, die sich durch einen hohen Grad von Konsequenz auszeichnet und Aussicht hat, allgemeine Verbreitung zu finden, wie dies aus den Verhandlungen der bisher abgehaltenen internationalen Aktuarenkongresse hervorgeht. Eine Zusammenstellung dieser Bezeichnungen, deren sich auch das Text-Book bedient, befindet sich in den „Transactions of the second international actuarial congress, London 1898“.

Der Annahme $m = 1$ entspricht *ganzjährliche* Kapitalisierung der Zinsen; bei dieser erreicht 1 in n Jahren die Höhe

$$(1 + i)^n; \tag{2}$$

$1 + i$ heißt der *Aufzinsungsfaktor.*

Der Annahme $m = \infty$ entspricht *kontinuierliche* Verzinsung, also bildlich ein gleichmäßiges Fließen des Zinses, der für jedes Zeitteilchen proportional ist diesem und dem Kapital an seinem Beginne; bei ihr erreicht, weil

$$\lim_{m=\infty}\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = e^i, \tag{3}$$

wenn e die Basis des natürlichen Logarithmensystemes bedeutet, das Kapital 1 im ersten Jahre die Höhe

$$e^i$$

und in n Jahren die Höhe

$$e^{ni},$$

liefert also den Zins $e^i - 1$, beziehungsweise $e^{ni} - 1$.

In dem Ansatze

$$1 + i^{(m)} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m \tag{4}$$

bedeutet $i^{(m)}$ den wirklichen Zinsfuß, welcher dem in m gleichen Raten fälligen, dem Zinsfuße i entsprechenden Jahreszinse äquivalent ist; ein Kapital, zu diesem Zinsfuße mit ganzjähriger Kapitalisierung der Zinsen angelegt, erreicht in einer beliebigen Anzahl von Jahren dieselbe Höhe, wie wenn es zum Zinsfuße i, bei m-maliger Kapitalisierung der Zinsen während eines Jahres, auf dieselbe Zeit angelegt wäre. In nachstehender Tabelle sind einige Werte von $i^{(m)}$ zusammengestellt.

i	$i^{(m)}$			
	$m = 2$	$m = 4$	$m = 12$	$m = \infty$
0,03	0,030225	0,030339	0,030416	0,030455
0,035	0,035306	0,035462	0,035567	0,035620
0,04	0,040400	0,040604	0,040742	0,040811
0,045	0,045506	0,045765	0,045940	0,046028
0,05	0,050625	0,050945	0,051162	0,051271

Zu 4 % bei monatlicher Kapitalisierung der Zinsen wächst also ein Kapital ebenso rasch wie zu 4,074 % bei ganzjähriger Fälligkeit der Zinsen.

Aus der Gleichung

$$e^{\delta} = 1 + i$$

ergibt sich derjenige Zinsfuß δ, der bei kontinuierlicher Verzinsung dem Zinsfuße i bei ganzjähriger Zinsfälligkeit äquivalent ist; es ist

$$\delta = \text{Log}\,(1 + i) \tag{5}$$

und wird die *Verzinsungsintensität* genannt; Log bezeichnet den natürlichen Logarithmus.

In dem Ansatze

$$\left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)^m = 1 + i$$

bezeichnet $j_{(m)}$ jenen *nominellen Zinsfuß*, der bei m-maliger Fälligkeit der Zinsen während eines Jahres dem wirklichen Zinsfuße i entspricht; die Auflösung ergibt

$$j_{(m)} = m\left[(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1\right]; \tag{6}$$

$(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1$ bezeichnet aber den auf einen Kapitalisierungstermin entfallenden Zins, $j_{(m)}$ ist also das m-fache dieses terminlichen Zinses. Insbesondere ist

$$j_{(\infty)} = \lim_{m = \infty} \frac{(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}} = \text{Log}\,(1 + i) = \delta; \tag{7}$$

der der kontinuierlichen Verzinsung entsprechende nominelle Zinsfuß fällt demnach mit der Verzinsungsintensität zusammen.

Der *gegenwärtige Wert* des Kapitals 1, zahlbar nach n Jahren, ist unter der Voraussetzung, daß die Zinsen m-mal im Jahre kapitalisiert werden, gleich

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}}, \tag{8}$$

und bei Vereinbarung ganzjähriger Zinsfälligkeit gleich

$$\frac{1}{(1 + i)^n}; \tag{9}$$

die Größe

$$v = \frac{1}{1 + i} = (1 + i)^{-1}$$

heißt der *Abzinsungsfaktor*.

Man kann die Ausdrücke

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} \quad \text{und} \quad \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mn}$$

als Verallgemeinerungen der Ausdrücke

$$(1+i)^n \quad \text{und} \quad (1+i)^{-n}$$

ansehen, wenn man $\frac{1}{m}$ Jahr als Zeiteinheit, $\frac{i}{m}$ als den ihr entsprechenden Zinsfuß auffaßt; mn ist dann die Anzahl der in n Jahren enthaltenen Verzinsungstermine. Die Zinstafeln, welche die Endwerte und die Anfangswerte des Kapitals 1 bei gegebenem Zinsfuße und gegebener Anzahl von Zinsperioden angeben, können demnach ebenso wohl bei ganzjähriger wie bei ratenweiser Fälligkeit der Zinsen angewendet werden. Will man z. B. den Endwert von 1 bei 5% und $\frac{1}{4}$jähriger Kapitalisierung der Zinsen nach $6\frac{3}{4}$ Jahren wissen, so geht man in die Tafel der Endwerte mit $\frac{5}{4} = 1{,}25\,\%$ und mit 27 Zeiteinheiten ein; und der gegenwärtige Wert von 1, zahlbar nach 8 Jahren 5 Monaten, bei Anrechnung von 6% Zinseszins bei monatlicher Kapitalisierung, ergibt sich aus der Tafel der gegenwärtigen Werte bei $\frac{6}{12} = 0{,}5\,\%$ und 101 Zeiteinheiten.

Die Differenz zwischen einer zu einer späteren Zeit zahlbaren Summe und ihrem gegenwärtigen Werte bezeichnet man als *Diskont*.

Der allgemeine Ausdruck für den Diskont ist

$$1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn},$$

wenn i der Zinsfuß, wenn die Zinsen m-mal im Jahre kapitalisiert werden und das Kapital nach n Jahren fällig ist.

Für $m = n = 1$ ergibt sich der *Diskont* d für das Kapital 1, zahlbar nach 1 Jahr bei ganzjähriger Zinsfälligkeit:

$$d = 1 - \frac{1}{1+i} = 1 - v = \frac{i}{1+i} = iv; \tag{10}$$

der letzte Ausdruck gibt eine einfache Bedeutung von d: es ist der einjährige Zins des gegenwärtigen Wertes v.

Jede periodisch wiederkehrende Zahlung wird eine *Rente* genannt; ist ihre Dauer im voraus bestimmt, so heißt sie eine *sichere Rente* oder auch eine *Zeitrente*.

Der *Endwert* einer *pränumerando*, d. i. immer am Beginne des Jahres zahlbaren, sofort beginnenden und n Jahre währenden sicheren Rente 1 am Ende des n-ten Jahres beträgt bei ganzjähriger Zinsfälligkeit

$$s_{\overline{n|}} = (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i). \tag{11}$$

Der *gegenwärtige Wert* der nämlichen Rente ist

$$a_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{d}; \tag{12}$$

insbesondere ist der gegenwärtige Wert einer immerwährend zahlbaren oder *ewigen Rente* gleich

$$a_\infty = \lim_{n=\infty} \frac{1 - v^n}{d} = \frac{1}{d} = \frac{1}{1 - v} = \frac{1}{iv}; \tag{13}$$

für i = 0,03, 0,035, 0,04, 0,045, 0,05

ist a_∞ = 34,333, 29,571, 26,000, 23,222, 21,000;

der gegenwärtige Wert einer immerwährenden jährlichen Zahlung von 1 ist also bei 4% Zinseszins rund 26.

Der Endwert und der gegenwärtige Wert einer *postnumerando*, d. i. immer am Ende des Jahres zahlbaren Rente ist unter den gleichen Bestimmungen wie oben beziehungsweise:

$$_{1|}s_{\overline{n}|} = 1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \cdots + (1 + i)^{n-1} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}, \tag{14}$$

$$_{1|}a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \cdots + v^n = \frac{v(1 - v^n)}{d} = \frac{1 - v^n}{i}. \tag{15}$$

Nachstehende Tabelle enthält eine Zusammenstellung einiger wichtigen, auf die Verzinsung bezüglichen Größen und ihrer gemeinen Logarithmen für die gangbaren Prozentsätze.

Größe	3 %		3½ %		4 %	
	num	log	num	log	num	log
i	0,03	$\bar{2}$,4771213	0,035	$\bar{2}$,5440680	0,04	$\bar{2}$,6020600
$1+i$	1,03	0,0128372	1,035	0,0149403	1,04	0,0170333
$(1+i)^{\frac{1}{2}}$	1,0148891	0,0064186	1,0173495	0,0074702	1,0198039	0,0085167
$(1+i)^{\frac{1}{4}}$	1,0074170	0,0032093	1,0086374	0,0037351	1,0098534	0,0042583
v	0,9708738	$\bar{1}$,9871628	0,9661836	$\bar{1}$,9850597	0,9615385	$\bar{1}$,9829667
$v^{\frac{1}{2}}$	0,9853293	$\bar{1}$,9935814	0,9829465	$\bar{1}$,9925298	0,9805807	$\bar{1}$,9914833
$v^{\frac{1}{4}}$	0,9926376	$\bar{1}$,9967907	0,9914365	$\bar{1}$,9962649	0,9902425	$\bar{1}$,9957417
d	0,0291262	$\bar{2}$,4642838	0,0338164	$\bar{2}$,5291277	0,0384615	$\bar{2}$,5850267
δ	0,0295588	$\bar{2}$,4706867	0,0344014	$\bar{2}$,5365764	0,0392207	$\bar{2}$,5935156
$j_{(2)}$	0,0297783	$\bar{2}$,4738999	0,0346990	$\bar{2}$,5403170	0,0396078	$\bar{2}$,5977807
$j_{(4)}$	0,0296683	$\bar{2}$,4722927	0,0345498	$\bar{2}$,5384454	0,0394136	$\bar{2}$,5956464

Größe	$4\frac{1}{2}$ %		5 %	
	num	log	num	log
i	0,045	$\bar{2}$,6532125	0,05	$\bar{2}$,6989700
$1+i$	1,045	0,0191163	1,05	0,0211893
$(1+i)^{\frac{1}{2}}$	1,0222524	0,0095581	1,0246951	0,0105946
$(1+i)^{\frac{1}{4}}$	1,0110650	0,0047791	1,0122722	0,0052973
v	0,9569378	$\bar{1}$,9808837	0,9523810	$\bar{1}$,9788107
$v^{\frac{1}{2}}$	0,9782320	$\bar{1}$,9904419	0,9759002	$\bar{1}$,9894054
$v^{\frac{1}{4}}$	0,9890562	$\bar{1}$,9952209	0,9878767	$\bar{1}$,9947027
d	0,0430622	$\bar{2}$,6340962	0,0476190	$\bar{2}$,6777807
δ	0,0440169	$\bar{2}$,6436194	0,0487902	$\bar{2}$,6883322
$j_{(2)}$	0,0445048	$\bar{2}$,6484072	0,0493902	$\bar{2}$,6936404
$j_{(4)}$	0,0442600	$\bar{2}$,6460110	0,0490889	$\bar{2}$,6909835

§ 2. Erlebensversicherungen und Renten.

207. Wert einer Anwartschaft. Erlebensversicherung. Unter einer *Anwartschaft* versteht man eine Geldsumme, die zu einem bestimmten Termine fällig wird unter der Voraussetzung, daß ein bestimmter, an sich ungewisser Tatbestand erfüllt ist.

Die Elementaraufgabe der Versicherungsrechnung besteht in der Wertbemessung von Anwartschaften.

Ist die Wahrscheinlichkeit des Tatbestandes bekannt, so versteht man unter dem gegenwärtigen oder kurzweg dem *Werte der Anwartschaft* die auf die Gegenwart diskontierte auf sie bezügliche mathematische Erwartung, also das Produkt aus drei Faktoren: aus der Summe selbst, der Wahrscheinlichkeit ihrer Realisierung und dem der Zwischenzeit entsprechenden Diskontierungsfaktor.

Dieser Wertbestimmung liegt folgende Erwägung zugrunde: Würde für eine große Anzahl gleicher Anwartschaften eine ihrem Werte gleichkommende Summe deponiert und in der Zwischenzeit zu dem der Rechnung unterlegten Zinsfuße verzinst, so erreichte sie eine Höhe, um die mit größter Wahrscheinlichkeit zu gewärtigende Anzahl „günstig" verlaufender Fälle gerade zu befriedigen (s. Nr. 102—103).

In der Lebensversicherungsrechnung hat man es mit Anwartschaften zu tun, die vom Leben und Sterben, im weiteren Sinne von bestimmten Zuständen der Menschen abhängen.

Eine Person des Alters x, welcher für den Fall und für den Moment, wo sie das höhere Alter $x+n$ erreicht, eine bestimmte Summe zugesichert ist, befindet sich im Besitze einer Anwartschaft, *die man als Erlebensversicherung* bezeichnet; n ist die Dauer derselben.

Ist K das versicherte Kapital, ${}_np_x$ die Wahrscheinlichkeit, daß innerhalb der Gesamtheit der versicherten Personen eine solche des Alters x das Alter $x+n$ erlebt, v der dem gewählten Zinsfuße entsprechende Abzinsungsfaktor, endlich ${}_nE_x$ der Wert der Versicherung, so gilt der Ansatz:

$$ {}_nE_x = K\,{}_np_x v^n. $$

Weil K in dieser Formel eine von x und n unabhängige Rolle spielt, so wird in den allgemeinen Rechnungen das versicherte Kapital mit 1 angenommen; alsdann ist

$$ {}_nE_x = v^n\,{}_np_x. \qquad (1) $$

Wenn die Absterbeordnung der versicherten Gesamtheit in Form einer Sterbetafel der üblichen Gestalt (s. § 3, Abschnitt II des dritten Teiles) gegeben ist, so drückt sich ${}_np_x$ durch die Zahlen der Lebenden wie folgt aus:

$$ {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}; $$

dadurch wird

$$ {}_nE_x = v^n\frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{v^{x+n}\,l_{x+n}}{v^x\,l_x}. $$

Für die praktische Durchführung der Rechnungen hat es sich als zweckmäßig erwiesen, aus den Zahlen l_x der Sterbetafel die Zahlen

$$ D_x = v^x l_x \qquad (2) $$

abzuleiten, die man die „diskontierten Zahlen der Lebenden" nennt. Mittels dieser ergibt sich die fundamentale Formel für die Erlebensversicherung:

$$ {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}. \qquad (3) $$

Eine andere Schlußfolgerung zur Ableitung dieser Formel ist die folgende: Von l_x Personen des Alters x, deren jede eine Erlebensversicherung vom Betrage 1 zum Alter $x+n$ besitzt, erleben der wahrscheinlichsten Kombination gemäß l_{x+n} dieses höhere Alter, während $l_x - l_{x+n}$ vorher sterben; an die Überlebenden kommt die Summe l_{x+n} zur Auszahlung, deren gegenwärtiger Wert $v^n l_{x+n}$ ist; der auf eine Person entfallende Anteil dieser Anwartschaft ist somit

$$ \frac{v^n\,l_{x+n}}{l_x}. $$

Aus der Tafel III, welche die Erfahrungen H^M der 20 britischen Gesellschaften in der Ausgleichung des Text-Book wiedergibt und mit $3\frac{1}{2}\,\%$ rechnet, ist beispielsweise

$$ D_{30} = 31953, \quad D_{60} = 7469{,}1 $$

zu entnehmen; hiernach ist der Wert der Erlebensversicherung 1 einer 30-jährigen Person zum vollendeten 60. Lebensjahre

$$ {}_{30}E_{30} = \frac{7469,1}{31953} = 0,2337, $$

der Wert einer solchen Versicherung auf 100 ℳ also 23 ℳ 37 ₰.

208. Begriff der Rente. Die Pränumerando-Leibrente. Unter einer *Rente* im versicherungstechnischen Sinne versteht man, in des Wortes einfachster Bedeutung, die periodisch wiederkehrende Zahlung eines voraus bestimmten Betrages, deren effektive Dauer von der Dauer eines bestimmten Zustandes der (zahlenden oder empfangenden) Person abhängt. Im gewöhnlichen Falle beträgt die Periode ein Jahr.

Besteht der Zustand darin, daß die Person, an welche die Rente gebunden ist, *lebt*, so nennt man die Rente eine *Leibrente*.

Die *pränumerando* zahlbare *Leibrente* 1, deren erste Zahlung sofort, die letzte am Beginne des Sterbejahres der Person (x) erfolgt, stellt sich als eine Summe von Erlebensversicherungen dar, deren erste sofort und sicher, die zweite, dritte, ⋯ nur dann zur Auszahlung kommt, wenn die Person nach einem, zwei, ⋯ Jahren am Leben ist; bezeichnet man ihren Wert mit a_x,[1]) mit $\omega - 1$ das höchste Alter (in ganzen Jahren), das noch vollendet werden kann, so ist

$$ a_x = {}_0E_x + {}_1E_x + {}_2E_x + \cdots + {}_{\omega-1-x}E_x; $$

drückt man die E nach der Formel (3) aus, so ergibt sich:

$$ a_x = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{\omega-1}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}, \tag{4} $$

wenn

$$ N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots $$

gesetzt und die Summierung bis zum Schlusse der Tafel geführt wird [2]).

Die Berechnung der Leibrenten erfordert also die Bildung zweier Zahlenkolonnen: der Reihe der diskontierten Zahlen der Lebenden und ihrer Summenreihe.

Diese Art der Rentenberechnung ist in England von George Barrett 1786 zuerst ersonnen worden; die umfangreichen, danach berechneten Tafeln hat jedoch ihr Verfasser nicht veröffentlicht. Erst durch Francis Baily ist das Verfahren 1812 der Royal Society bekannt gegeben und 1813 in der Schrift: „Doctrine of Life Annuities

---

1) In dieser Bezeichnung weichen wir von der englischen Vorlage ab, welche mit a_x die in der nächsten Nummer behandelte postnumerando zahlbare Leibrente bezeichnet. Wir benützen das *einfachere* Zeichen für die *häufiger* gebrauchte Form der Rente.

2) In der englischen Bezeichnung ist $N_x = D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots$.

and Assurances" veröffentlicht worden. Auf dem Kontinent kam jedoch Johann Nic. Tetens den Engländern zuvor, der schon 1785 das nämliche Verfahren in dem Werke: „Einleitung zur Berechnung der Leibrenten" (Leipzig, 2 Bände, 1785—1786) vorführte; ihm gebührt daher die Priorität der Erfindung der diskontierten Zahlen, die so wichtig geworden ist für die Entwicklung der Lebensversicherungsrechnung[1]).

Tafel III enthält sowohl die Kolonnen der Zahlen D und N, als auch die Werte der Pränumerando-Leibrente für alle Alter; hiernach ist beispielsweise der Wert der Leibrente 1 einer 30-jährigen Person:

$$a_{30} = 19{,}441,$$

der Wert einer solchen Rente im jährlichen Betrage von 100 ℳ gleich 1944 ℳ 10 ₰.

209. Die Postnumerando-Leibrente. Zum Unterschiede von der vorigen ist diese Rente zahlbar am *Ende* eines jeden Jahres, das die Person (x) durchlebt, zum letztenmale daher am Ende des dem Todesjahre vorangehenden Lebensjahres. Gegenüber der pränumerando zahlbaren Rente entfällt die erste sofortige Zahlung des Betrages 1. Bezeichnet man also ihren Wert mit ${}_{1|}a_x$, so ist

$${}_{1|}a_x = a_x - 1, \tag{6}$$

und in den Zahlen D, N ausgedrückt:

$${}_{1|}a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}. \tag{7}$$

Man braucht in der Tafel III die Zahlen der Kolonne a_x nur je um 1 zu vermindern, um die Werte der postnumerando oder nachschüssig zahlbaren Rente zu erhalten. Für eine 30-jährige Person z. B. hat eine solche Rente vom Betrage 1 den Wert 18,441.

210. Aufgeschobene und temporäre Renten. Eine Leibrente heißt *aufgeschoben*, wenn ihr eventueller Beginn auf einen späteren Termin festgesetzt ist. Sie heißt *temporär* oder eine kurze Rente, wenn ihre maximale Dauer nach oben hin begrenzt ist. Beide Merkmale können auch zusammentreffen, und man spricht dann von einer aufgeschobenen kurzen Rente.

Die um n Jahre *aufgeschobene* Pränumerando-Leibrente auf die Person (x), zum erstenmal also zahlbar nach n Jahren und dann jedes folgende Lebensjahr bis zum Tode, hat als Summe der Erlebensversicherungen ${}_nE_x$, ${}_{n+1}E_x$, $\cdots$ den Wert

$${}_{n|}a_x = \frac{D_{x+n} + D_{x+n+1} + \cdots}{D_x} = \frac{N_{x+n}}{D_x}; \tag{8}$$

1) Text-Book II, p. 108ff.; G. Bohlmann, Encykl. der mathem. Wissenschaften I, p. 876.

die in gleicher Weise definierte Postnumerando-Rente, die also zum erstenmal am Ende des $n+1$-ten Jahres fällig wird, hätte das Zeichen ${}_{n+1|}a_x$ und den Ausdruck $\frac{N_{x+n+1}}{D_x}$. Man bemerkt sofort, daß die Postnumerando-Leibrente gleichbedeutend ist mit der um 1 Jahr aufgeschobenen Rente.

Zwischen der um n Jahre aufgeschobenen und der Rente einer $x+n$ Jahre alten Person besteht ein einfacher bemerkenswerter Zusammenhang; aus (8) und $a_{x+n} = \frac{N_{x+n}}{D_{x+n}}$ folgt nämlich

$$ {}_{n|}a_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} a_{x+n} = v^n {}_n p_x \cdot a_{x+n}. \tag{8*} $$

Zu dieser Beziehung gelangt man auch durch folgende Überlegung. In den Bezug der aufgeschobenen Rente kommt (x) nur dann, wenn er das Alter $x+n$ erreicht, wofür ${}_n p_x$ die Wahrscheinlichkeit ist; in diesem Augenblicke hat für ihn die Rente den Wert a_{x+n}; folglich ist der gegenwärtige Wert seiner Anwartschaft $v^n {}_n p_x a_{x+n}$.

Die auf n Jahre abgekürzte *temporäre* Rente, die also höchstens n-mal zur Auszahlung kommt, ist als Summe der Erlebensversicherungen ${}_0E_x (=1)$, ${}_1E_x$, $\cdots$ ${}_{n-1}E_x$ gleich

$$ \frac{D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{x+n-1}}{D_x}; $$

bezeichnet man also ihren Wert durch ${}_{|n}a_x$, so ist:

$$ {}_{|n}a_x = \frac{D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = a_x - {}_{n|}a_x. \tag{9} $$

Der letzte Ansatz bringt die Tatsache zum Ausdruck, daß die temporäre Rente gleichkommt der lebenslänglichen vermindert um die um ihre Dauer aufgeschobene Rente.

Die um n Jahre *aufgeschobene*, auf m Jahre abgekürzte *temporäre* Rente, die zum erstenmal nach n Jahren und dann höchstens m-mal zur Auszahlung kommt, stellt sich als Summe der Erlebensversicherungen ${}_nE_x$, ${}_{n+1}E_x$, $\cdots$ ${}_{n+m-1}E_x$ dar; bezeichnet man ihren Wert mit ${}_{n|m}a_x$, so ist

$$ \begin{aligned} {}_{n|m}a_x &= \frac{D_{x+n} + D_{x+n+1} + \cdots + D_{x+n+m-1}}{D_x} \\ &= \frac{N_{x+n} - N_{x+n+m}}{D_x} = {}_{n|}a_x - {}_{n+m|}a_x. \end{aligned} \tag{10} $$

211. Mittlere Zahlungsdauer einer Leibrente. Beziehungen zwischen der Leibrente und einer Zeitrente. Die Zahlungsdauer einer Leibrente ist unbestimmt und für verschiedene Personen desselben Alters x ungleich. Ihr Mittelwert ist die ab-

gekürzte mittlere Lebensdauer e_x als Durchschnitt der vollen Jahre, welche Personen dieses Alters zu durchleben haben (s. Nr. 179).

Es ist aber ein Irrtum, zu glauben, die Leibrente einer Person (x) könne als sichere Rente für die mittlere Lebensdauer e_x gerechnet werden. Es läßt sich vielmehr erweisen, daß die Leibrente kleiner ist als die so gerechnete Zeitrente.

Beträgt die abgekürzte Lebenserwartung $n + \delta$, wo n die vollen Jahre und δ einen Bruchteil bedeutet, so ist der Wert der Zeitrente

$$a_{\overline{n+\delta}|} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^n + \delta v^{n+1},$$

weil am Beginne des 1., 2., $\cdots$ $\overline{n+1}$-ten Jahres je 1, am Beginne des $\overline{n+2}$-ten Jahres der Betrag δ entsprechend dem durchlebten Bruchteile des letzten Jahres zu bezahlen ist. Hingegen ist die Leibrente

$$a_x = 1 + v\,{}_1p_x + v^2\,{}_2p_x + \cdots + v^\varkappa\,{}_\varkappa p_x,$$

wobei $x + \varkappa = \omega - 1$.

Demzufolge ist

$$\begin{aligned} & a_{\overline{n+\delta}|} - a_x \\ & = v(1 - {}_1p_x) + v^2(1 - {}_2p_x) + \cdots + v^n(1 - {}_np_x) \\ & \qquad + v^{n+1}(\delta - {}_{n+1}p_x) - v^{n+2}\,{}_{n+2}p_x - \cdots - v^\varkappa\,{}_\varkappa p_x \\ & > v^{n+1}[1 - {}_1p_x + 1 - {}_2p_x + \cdots + 1 - {}_np_x + \delta - {}_{n+1}p_x] \\ & \qquad - v^{n+2}\,{}_{n+2}p_x - \cdots - v^\varkappa\,{}_\varkappa p_x \\ & = v^{n+1}[n + \delta - {}_1p_x - {}_2p_x - \cdots - {}_{n+1}p_x] \\ & \qquad - v^{n+2}\,{}_{n+2}p_x - \cdots - v^\varkappa\,{}_\varkappa p_x; \end{aligned}$$

da nun

$$e_x = n + \delta = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots + l_{\omega-1}}{l_x} = {}_1p_x + {}_2p_x + \cdots + {}_\varkappa p_x,$$

so ist

$$n + \delta - {}_1p_x - {}_2p_x - \cdots - {}_{n+1}p_x = {}_{n+2}p_x + \cdots + {}_\varkappa p_x,$$

daher, wie leicht zu erschließen,

$$a_{\overline{n+\delta}|} - a_x > 0,$$

also, wie behauptet worden,

$$a_x < a_{\overline{n+\delta}|}.$$

Der Grund hiervon ist folgender: Wenn man von der Diskontierung absieht, so stellt sich die durchschnittliche Zahlung an einen Leibrentner (x) auf $1 + {}_1p_x + {}_2p_x + \cdots + {}_\varkappa p_x$, d. i. auf $n + \delta + 1$, also ebenso hoch, als wenn er durch die Zeit e_x die sichere Rente 1 bezogen haben würde. Im Falle der Leibrente erstrecken sich aber die eventuellen Zahlungen über eine längere Dauer, werden daher von der Diskontierung stärker getroffen als bei der Zeitrente.

212. Veränderliche Renten. Bisher ist angenommen worden, daß der Betrag der Rente durch ihre ganze Dauer konstant bleibe. In der Versicherungspraxis kommen aber auch veränderliche, insbesondere in arithmetischer Progression wachsende Renten vor. Einige wichtige Formen veränderlicher Renten sollen im nachfolgenden entwickelt werden.

1) Eine pränumerando zahlbare Leibrente auf das Leben (x), die mit 1 beginnt und jährlich um 1 steigt, ergibt sich als Summe der Erlebensversicherungen

$$(n+1)\frac{D_{x+n}}{D_x}$$

von $n = 0$ bis $n = \omega - 1 - x$; denn nach Ablauf von n Jahren, am Beginne des $\overline{n+1}$-ten, beträgt die Auszahlung $n + 1$. Bezeichnet man den Wert dieser Rente mit $(Ia)_x$, so ist hiernach

$$(Ia)_x = \frac{D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+1} + \cdots}{D_x}.$$

Dies läßt folgende Darstellung zu. Es ist

$$\begin{aligned} D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots &= N_x \\ D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots &= N_{x+1} \\ D_{x+2} + \cdots &= N_{x+2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

für den Zähler kann also die Summe

$$N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \cdots = S_x$$

geschrieben werden, die aus den Zahlen N ebenso gebildet ist, wie diese aus den Zahlen D. Hiermit wird

$$(Ia)_x = \frac{S_x}{D_x}. \qquad (11)$$

Tafel III enthält auch die Kolonne der Zahlen S_x. Danach ist beispielsweise der Wert einer in obiger Weise definierten Leibrente eines 30-jährigen

$$(Ia)_{30} = \frac{9\,656\,078}{31\,953} = 302{,}196.$$

Man kann die vorliegende Rente auch als eine Summe von Renten auffassen, deren erste sofort beginnt, während jede folgende gegen die vorangehende um ein Jahr aufgeschoben ist; demnach ist

$$(Ia)_x = a_x + {}_{1|}a_x + {}_{2|}a_x + \cdots,$$

und dies führt mit Benützung der Formel (8), Nr. 210, unmittelbar zur Formel (11).

2) Allgemeiner: der Wert einer mit $\varkappa$ beginnenden, jährlich um h wachsenden, beziehungsweise abnehmenden Leibrente auf das Leben von (x) ist die Summe der Anwartschaften

$$(\varkappa \pm nh)\frac{D_{x+n}}{D_x}$$

von $n = 0$ angefangen bis zum Schlusse der Tafel; gebraucht man das Zeichen $(va)_x$ für eine in dieser allgemeinen Art variierende Rente, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}(va)_x &= \frac{\varkappa D_x + (\varkappa \pm h) D_{x+1} + (\varkappa \pm 2h) D_{x+2} + \cdots}{D_x} \\ &= \frac{\varkappa(D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots) \pm h(D_{x+1} + 2D_{x+2} + \cdots)}{D_x} \\ &= \frac{\varkappa N_x \pm h S_{x+1}}{D_x}. \qquad (12)\end{aligned}$$

Im Falle des unteren Zeichens sind $\varkappa$, h an die Relation $hS_{x+1} < \varkappa N_x$ gebunden, soll der Wert der Rente nicht negativ werden.

Für $\varkappa = 1$, $h = 1$ und das obere Zeichen geht (12) in (11) über.

3) Die auf n Jahre abgekürzte, mit 1 beginnende und jährlich um 1 steigende Rente auf das Leben (x) werde mit $(Ia)_{x\overline{n}|}$ bezeichnet; zunächst ergibt sich für sie der Ausdruck:

$$(Ia)_{x\overline{n}|} = \frac{D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + \cdots + nD_{x+n-1}}{D_x};$$

mit Hilfe der Kolonnen N und S läßt aber der Zähler eine einfachere Berechnung zu; es ist nämlich:

$$\begin{aligned} D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{x+n-1} &= N_x - N_{x+n} \\ D_{x+1} + \cdots + D_{x+n-1} &= N_{x+1} - N_{x+n} \\ \cdots\cdots\cdots & \\ D_{x+n-1} &= N_{x+n-1} - N_{x+n}; \end{aligned}$$

die Summe der linken Seiten ergibt den Zähler, die der rechten ist $S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}$; mithin hat man

$$(Ia)_{x\overline{n}|} = \frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{D_x}. \qquad (13)$$

Mit Hilfe der Tafel III ergibt sich beispielsweise die auf 20 Jahre abgekürzte steigende Rente eines 30-jährigen

$$(Ia)_{30,\overline{20}|} = \frac{9\,656\,078 - 2\,012\,538 - 20 \cdot 184\,709}{31\,953} = 123{,}599.$$

4) Die mit 1 beginnende, jährlich, jedoch nur $n - 1$-mal, um 1 steigende und von da ab konstant bleibende Leibrente auf das

Leben (x) werde mit $(I_{\overline{n}|}a)_x$ bezeichnet; ihr Wert hat zunächst den Ausdruck:

$$(I_{\overline{n}|}a)_x = \frac{D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + \cdots + nD_{x+n-1} + nD_{x+n} + nD_{x+n+1} + \cdots}{D_x};$$

für den Zähler kann aber

$$D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + \cdots - (D_{x+n} + 2D_{x+n+1} + 3D_{x+n+2} + \cdots)$$

geschrieben werden; demnach ist

$$(I_{\overline{n}|}a)_x = \frac{S_x - S_{x+n}}{D_x}. \tag{14}$$

Die durch 20 Jahre, von 1 bis zum Betrage 20, ansteigende und von da ab konstant bleibende Rente eines 30-jährigen, mit den Grundlagen der Tafel III gerechnet, ist

$$(I_{\overline{20}|}a)_{30} = \frac{9\,656\,078 - 2\,012\,538}{31\,953} = 239{,}212.$$

§ 3. Todesfallversicherung.

213. Darstellung einer normalen, lebenslänglichen Todesfallversicherung durch die Leibrente. Eine Anwartschaft, die von dem Sterben einer bestimmten Person abhängt, wird eine *Todesfallversicherung* genannt. Wird das versicherte Kapital ausbezahlt, wann auch der Tod eintreten möge, so daß die Realisierung des Kapitales sicher und nur ihr Zeitpunkt unbestimmt ist, so heißt die Versicherung eine *lebenslängliche* oder vollständige.

Die normalen Bedingungen, unter welchen solche Versicherungen abgeschlossen zu werden pflegen, sind die folgenden. Die Zählung der *Versicherungsjahre* erfolgt vom Zeitpunkte des Versicherungsabschlusses; in diesem Zeitpunkte wird, wenn er nicht zufällig mit dem Geburtstage der Person, auf deren Ableben die Versicherung abgeschlossen wird, dieser jenes Alter x zugeschrieben, das sie an dem dem Abschlusse nächstliegenden Geburtstage besitzt. Die Auszahlung des versicherten Kapitales erfolgt am Ende jenes Versicherungsjahres, in welchem der Tod von (x) eintritt (an den Überbringer der Police oder an eine in der Police namhaft gemachte Person).

Sowie Leben und Sterben in einfacher Beziehung zu einander stehen, weisen auch die Werte der Rente und der Ablebensversicherung auf ein und dasselbe Leben einen innigen Zusammenhang auf.

Rechnet man den Wert einer Rente 1, zahlbar am *Ende* jedes Jahres, in welches die Person (x) *eintritt* — und das ist offenbar der um ein Jahr diskontierte Wert der auf sie begründeten Pränumerando-Leibrente — und subtrahiert davon den Wert einer Rente 1, zahlbar

am *Ende* jedes Jahres, das die Person *vollendet* — und das ist die ihrem Alter entsprechende Postnumerando-Leibrente —, so heben sich alle Zahlungen auf bis auf die am Ende des Todesjahres zu leistende Zahlung 1, und diese stellt die im obigen Sinne definierte Todesfallversicherung dar; bezeichnet man ihren Wert mit A_x, so ist also:

$$A_x = va_x - {}_{1|}a_x = va_x - a_x + 1 = 1 - (1 - v)a_x = 1 - da_x. \quad (15)$$

Man hat hiernach, um den Wert der Todesfallversicherung zu erhalten, die mit dem Diskont multiplizierte Leibrente von der Einheit zu subtrahieren.

214. Direkte Bestimmung des Wertes einer Todesfallversicherung. Die Wahrscheinlichkeit, daß die versicherte Person (x) im Laufe des ν-ten Jahres, vom Abschlusse der Versicherung gerechnet, sterben werde, ist

$$_{\nu-1|}q_x = \frac{d_{x+\nu-1}}{l_x};$$

folglich hat die diesen Fall betreffende Anwartschaft auf das Kapital 1 den Wert

$$v^\nu \, _{\nu-1|}q_x = v^\nu \frac{d_{x+\nu-1}}{l_x} = \frac{v^{\nu+x} d_{x+\nu-1}}{v^x l_x};$$

führt man neben den Zahlen D_x auch die Zahlen

$$C_x = v^{x+1} d_x \quad (16)$$

unter dem Namen der „diskontierten Zahlen der Toden“ ein, so schreibt sich der Wert jener Anwartschaft

$$\frac{C_{x+\nu-1}}{D_x}. \quad (17)$$

Da nun der Tod im ersten, zweiten, $\cdots$ $\overline{\omega - x}$-ten und nur in einem dieser Jahre eintreten kann, so ist die Summe der auf diese Eventualitäten bezüglichen Werte (17) der Wert der ganzen Versicherung, also

$$A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{\omega-1}}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}, \quad (18)$$

wenn neben der Reihe der Zahlen C_x auch deren Summenreihe

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots \quad (19)$$

eingeführt wird.

Tafel III enthält die Kolonnen C_x, M_x und außerdem auch die Werte A_x. Beispielsweise hat die Todesfallversicherung eines 30-jährigen auf das Kapital 1 nach den Grundlagen dieser Tafel den Wert 0,34257, auf das Kapital von 1000 ℳ also 342 ℳ 57 ₰.

Die Übereinstimmung der Formeln (15) und (18) ist leicht zu

erweisen. Ersetzt man in (16) d_x durch die Differenz $l_x - l_{x+1}$, so wird

$$C_x = v^{x+1} l_x - v^{x+1} l_{x+1} = v D_x - D_{x+1};$$

daraus ergibt sich durch Summierung:

$$M_x = v N_x - N_{x+1} = v N_x - N_x + D_x$$

und mittels Division durch D_x:

$$A_x = v a_x - a_x + 1 = 1 - (1 - v) a_x.$$

215. Aufgeschobene und temporäre Todesfallversicherungen. Summiert man den Ausdruck

$$\frac{C_{x+\nu-1}}{D_x}, \qquad (\alpha)$$

welcher den Wert der Anwartschaft 1 der Person (x) für den Fall ihres Ableben im ν-ten Jahre darstellt, erst von $\nu = n + 1$ an, so heißt dies, daß in den n ersten Jahren nach Abschluß der Versicherung der Tod keine Anwartschaft begründet (Karenzzeit von n Jahren); die Todesfallversicherung heißt dann eine (um n Jahre) *aufgeschobene*, und ihr Wert ist

$$_{n|}A_x = \frac{C_{x+n} + C_{x+n-1} + \cdots}{D_x} = \frac{M_{x+n}}{D_x}. \qquad (20)$$

Nach den Daten der Tafel III hat eine um 10 Jahre aufgeschobene Versicherung des Kapitales 1 auf den Todesfall einer 30-jährigen Person den Wert

$$_{10|}A_{30} = \frac{8761{,}58}{31\,953} = 0{,}27420$$

gegenüber dem Werte 0,34257 einer sofort beginnenden Versicherung.

Aus der am Schlusse der vorigen Nummer benützten Relation

$$C_x = v D_x - D_{x+1}$$

folgt auch

$$M_{x+n} = v N_{x+n} - N_{x+n+1}$$

und daraus

$$_{n|}A_x = v\,_{n|}a_x - {}_{n+1|}a_x, \qquad (21)$$

wodurch die aufgeschobene Todesfallversicherung durch aufgeschobene Renten ausgedrückt erscheint.

Summiert man (α) von $\nu = 1$ nur bis $\nu = n$, so heißt dies, daß der Tod, wenn er später als nach n Jahren eintritt, keine Anwartschaft begründet; man nennt die Versicherung eine kurze oder *temporäre* Todesfallversicherung; ihr Wert ist

$$_{|n}A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = A_x - {}_{n|}A_x. \qquad (22)$$

Beispielsweise ist die nur bis zum 60. Jahre währende Todesfallversicherung auf das Kapital 1 bei einem 30-jährigen

$$ {}_{30}A_{30} = \frac{10\,946{,}14 - 4735{,}38}{31\,953} = 0{,}19437. $$

Mittels (15) und (21) läßt sich auch ${}_{|n}A_x$ durch Renten ausdrücken.

Summiert man den Ausdruck (α) von $\nu = n + 1$ bis $\nu = n + m$, so bedeutet dies, daß der Tod keine Anwartschaft begründet, falls er in den n ersten Jahren oder später als nach $n + m$ Jahren eintritt; man spricht dann von einer *aufgeschobenen temporären* Todesfallversicherung, deren Wert gleich ist

$$ {}_{n|m}A_x = \frac{C_{x+n} + C_{x+n-1} + \cdots + C_{x+n+m-1}}{D_x} = \frac{M_{x+n} - M_{x+n+m}}{D_x}. \quad (23) $$

Eine vom vollendeten 40. bis zum vollendeten 60. Jahre währende Todesfallversicherung eines 30-jährigen hat nach Tafel III den Wert

$$ {}_{10|20}A_{30} = \frac{8761{,}58 - 4735{,}38}{31\,953} = 0{,}12600. $$

Mit Rücksicht auf die Formel (20) erscheint ${}_{n|m}A_x$ als Differenz zweier aufgeschobenen Todesfallversicherungen.

216. Variable Todesfallversicherungen. Die Höhe des versicherten Kapitales kann von dem Zeitpunkte abhängig sein, in welchem die Person stirbt, auf welche die Versicherung lautet.

Ein allgemeiner Fall einer derartigen variabeln Todesfallversicherung besteht darin, daß das versicherte Kapital $\varkappa$ beträgt, wenn der Tod im ersten Versicherungsjahre eintritt, und daß es dann von Jahr zu Jahr um h steigt oder fällt. Der Wert $(vA)_x$ dieser Versicherung ist die Summe der Ausdrücke

$$ (\varkappa \pm nh)\,\frac{C_{x+n}}{D_x} $$

von $n = 0$ angefangen, so daß

$$ (vA)_x = \frac{\varkappa C_x + (\varkappa \pm h)\,C_{x+1} + (\varkappa \pm 2h)\,C_{x+2} + \cdots}{D_x} $$
$$ = \frac{\varkappa(C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots) \pm h(C_{x+1} + 2C_{x+2} + \cdots)}{D_x}. $$

Nun ist

$$ C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots = M_{x+1} $$
$$ C_{x+2} + \cdots = M_{x+2} $$
$$ \cdots\cdots\cdots, $$

folglich

$$ C_{x+1} + 2\,C_{x+2} + \cdots = M_{x+1} + M_{x+2} + \cdots = R_{x+1}, $$

wenn man neben den Zahlen M_x auch deren Summen:

$$R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \cdots \tag{24}$$

verwendet; hiermit schreibt sich

$$(vA)_x = \frac{\varkappa M_x \pm h R_{x+1}}{D_x}. \tag{25}$$

Speziell hat die mit 1 beginnende, jährlich um 1 steigende lebenslängliche Todesfallversicherung, da $M_x + R_{x+1} = R_x$ ist, den Wert

$$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x}; \tag{26}$$

in der Form

$$\frac{M_x}{D_x} + \frac{M_{x+1}}{D_x} + \frac{M_{x+2}}{D_x} + \cdots$$

geschrieben erscheint sie als Summe einer sofort beginnenden und der um 1, 2, $\cdots$ Jahre aufgeschobenen Todesfallversicherung.

Nach Tafel III ist

$$(IA)_{30} = \frac{294\,665{,}43}{31\,953} = 9{,}22184;$$

das Versicherungskapital kann hier die Höhe 72 erreichen.

Für die auf n Jahre abgekürzte, mit 1 beginnende und jährlich um 1 steigende Todesfallversicherung ergibt sich der Ausdruck:

$$(IA)_{x\overline{n}|} = \frac{C_x + 2C_{x+1} + \cdots + nC_{x+n-1}}{D_x};$$

es ist aber

$$\begin{aligned} C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1} &= M_x - M_{x+n} \\ C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1} &= M_{x+1} - M_{x+n} \\ \cdots\cdots & \\ C_{x+n-1} &= M_{x+n-1} - M_{x+n}, \end{aligned}$$

daher drückt sich der Zähler mittels der Zahlen M und R durch

$$R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}$$

aus und es wird, wenn diese Zahlen zur Verfügung stehen:

$$(IA)_{x\overline{n}|} = \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x}. \tag{27}$$

Die Tafel III gibt als Wert einer auf 20 Jahre abgekürzten steigenden Todesfallversicherung eines 30-jährigen:

$$(IA)_{30,\overline{20}|} = \frac{294\,665{,}43 - 116\,652{,}80 - 20 \cdot 6788{,}01}{31\,953} = 1{,}32233.$$

Die mit 1 beginnende, bis zum n-ten Jahre jährlich um 1

steigende und von da ab unveränderliche Todesfallversicherung hat den ursprünglichen Ausdruck

$$(I_{\overline{n}|}A)_x = \frac{C_x + 2C_{x+1} + \cdots + nC_{x+n-1} + n(C_{x+n} + C_{x+n-1} + \cdots)}{D_x};$$

der Zähler aber ist identisch mit

$$C_x + 2C_{x+1} + 3C_{x+2} + \cdots - (C_{x+n} + 2C_{x+n+1} + 3C_{x+n+2} + \cdots)$$
$$= R_x - R_{x+n},$$

so daß in einfachster Form

$$(I_{\overline{n}|}A)_x = \frac{R_x - R_{x+n}}{D_x}. \tag{28}$$

Beispielsweise hat die mit 1 beginnende, bis 20 steigende und auf dieser Höhe verbleibende lebenslängliche Todesfallversicherung eines 30-jährigen nach Tafel III den Wert

$$(I_{\overline{20}|}A)_{30} = \frac{294\,665{,}43 - 116\,652{,}80}{31\,953} = 5{,}57108.$$

§ 4. Gemischte Versicherungen.

217. Die gemischte Versicherung. Während bei der kurzen Todesfallversicherung das versicherte Kapital nur dann ausbezahlt wird, wenn der Tod einer bezeichneten Person innerhalb eines bestimmten Zeitraumes eintritt, und bei der Erlebensversicherung nur dann, wenn die Person ein bestimmtes Alter erreicht, kommt es bei der *gemischten* (alternativen, abgekürzten) Versicherung, welche beide Versicherungsarten in sich vereinigt, unbedingt zur Auszahlung, und zwar, wenn der Tod innerhalb eines festgesetzten Zeitraumes erfolgt, am Ende des Todesjahres, und wenn der Versicherte das Ende jenes Zeitraumes erlebt, an ihn selbst sofort.

Wenn 1 das versicherte Kapital und x das Alter des Versicherten ist, so stellt sich der Wert der auf n Jahre festgesetzten gemischten Versicherung, $A_{x,\overline{n}|}$, als Summe aus dem Werte $_{|n}A_x$ der auf n Jahre abgekürzten Todesfallversicherung und dem Werte $_nE_x$ der um n Jahre aufgeschobenen Erlebensversicherung, so daß

$$A_{x,\overline{n}|} = {}_{|n}A_x + {}_nE_x. \tag{29}$$

Ersetzt man die Teile der rechten Seite durch ihre Ausdrücke in (22) und (3), so erhält man:

$$A_{x,\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}. \tag{30}$$

Die gemischte Versicherung gestattet aber auch eine der Todesfallversicherung konforme Darstellung durch eine Rente; es ist nämlich (s. Schluß von Nr. 214)

$$M_x \quad = vN_x \quad - N_x \quad + D_x$$
$$M_{x+n} = vN_{x+n} - N_{x+n} + D_{x+n},$$

daher

$$M_x - M_{x+n} + D_{x+n} = D_x - (1 - v)(N_x - N_{x+n});$$

mit dieser Umformung ergibt sich

$$A_{x,\overline{n}|} = 1 - d_{|n}a_x, \tag{31}$$

eine Formel, die sich von jener (12) für A_x nur dadurch unterscheidet, daß an die Stelle der lebenslänglichen Rente die auf n Jahre abgekürzte getreten ist.

In Tafel V sind auf den Grundlagen der Tafel IV: Sterbetafel M. und WI. der 23 deutschen Gesellschaften und $3\frac{1}{2}\,\%$ — die Werte der zu den Zielen 55, 60, 65, 70, 80 abgekürzten Renten[1]) und daraus die Werte der zu den gleichen Zielen reichenden gemischten Versicherung gerechnet. Hiernach ist beispielsweise der Wert der gemischten Versicherung auf das Kapital 1, die ein 30-jähriger zum vollendeten 70. Jahre abschließt — Versicherungsdauer oder Distanz 40 Jahre — 0,3853; bei dem Ziele 55 — Versicherungsdauer 25 Jahre — beträgt er 0,4833.

218. Versicherung mit bestimmter Verfallszeit (à terme fixe). Diese Versicherungsart hat mit der gemischten Versicherung das gemein, daß das Kapital unbedingt zur Auszahlung kommt. Dadurch jedoch, daß die Auszahlung am Ende des festgesetzten Termines erfolgt, gleichgiltig ob die versicherte Person ihn erlebt hat oder vorher gestorben ist, wird der Wert der Versicherung unabhängig von den Sterblichkeitsverhältnissen; erst durch die Art der Erwerbung kann sie in das eigentliche Gebiet der Lebensversicherungsrechnung gelangen.

Der Wert einer derartigen Versicherung auf das Kapital 1, zahlbar n Jahre nach Abschluß, ist

$$A_{\overline{n}|} = v^n. \tag{32}$$

Bei $3\frac{1}{2}\,\%$ ist beispielsweise, ohne Rücksicht auf das Alter, $A_{\overline{30}|} = 0{,}3555$, während die gemischte Versicherung bei gleicher Laufzeit je nach dem Alter verschiedene, durchwegs höhere Werte besitzt; so ist mit den Grundlagen der Tafel V, die mit dem gleichen Zinsfuße rechnet, $A_{25,\overline{30}|} = 0{,}4278$, $A_{30,\overline{30}|} = 0{,}4386$, $A_{35,\overline{30}|} = 0{,}4548$, $A_{40,\overline{30}|} = 0{,}4782$, $A_{50,\overline{30}|} = 0{,}5510$.

1) Entnommen den „Mitteilungen des Verbandes der österr. u. ungar. Versich.-Techn. Heft V, 1901, p. 35.

§ 5. Renten und Todesfallversicherungen von besonderer Zahlungsmodalität.

219. Renten von unterjähriger Fälligkeit. Näherungsformeln. Bei Renten kommt es sehr häufig vor, daß sie nicht jährlich, sondern in kürzeren Terminen ausgezahlt werden. Es handelt sich nun darum, solche Renten von *unterjähriger* Fälligkeit auf normale Renten zurückzuführen.

Eine Rente vom *Jahresbetrage* 1 sei jährlich, bis zum Ableben, pränumerando zahlbar in m Raten vom Betrage $\frac{1}{m}$; ihr Wert werde mit $a_x^{(m)}$ bezeichnet. Man nennt sie kurz: eine vorschüssige m-tel-Rente.

Eine sofort beginnende Rente vom Betrage 1 hat den Wert a_x; eine nach einem Jahre beginnende Rente 1 den Wert $a_x - 1$ [s. Nr. 209, Gl. (6)]; interpoliert man dazwischen die Werte der nach $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots \frac{m-1}{m}$ Jahren beginnenden Renten vom Betrage 1 nach einer arithmetischen Progression, so ergibt sich die Wertfolge:

$$a_x, \quad a_x - \frac{1}{m}, \quad a_x - \frac{2}{m}, \quad \ldots \quad a_x - \frac{m-1}{m},$$

welche mit der sofort beginnenden Rente anfängt und mit der um $\frac{m-1}{m}$ Jahr aufgeschobenen schließt. Die Summe dieser Reihe:

$$m a_x - \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{m} + \cdots + \frac{m-1}{m}\right) = m a_x - \frac{m(m-1)}{2m},$$

würde den Wert einer sogleich beginnenden, nach je $\frac{1}{m}$ Jahre fälligen Rente 1 vorstellen; daraus ergibt sich durch Multiplikation mit $\frac{1}{m}$ der Wert einer Rente von gleicher Fälligkeit, aber vom Betrage $\frac{1}{m}$; mithin ist

$$a_x^{(m)} = a_x - \frac{m-1}{2m}. \tag{33}$$

Durch Subtraktion der ersten Fälligkeit $\frac{1}{m}$ ergibt sich daraus der Wert einer postnumerando zahlbaren m-tel-Rente, der mit ${}_{\frac{1}{m}|}a_x^{(m)}$ bezeichnet werden soll; folglich ist

$$\begin{aligned} {}_{\frac{1}{m}|}a_x^{(m)} &= a_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{1}{m} \\ &= a_x - \frac{m+1}{2m} \\ &= a_x - 1 + \frac{m-1}{2m} \\ &= {}_{1|}a_x + \frac{m-1}{2m}. \end{aligned} \tag{34}$$

Es kommt also zu dem Werte der nachschüssigen, jährlich fälligen Rente derselbe Betrag $\frac{m-1}{2m}$ hinzu, der bei der vorschüssigen in Abzug kommt, um sie auf die analoge m-tel-Rente zurückzuführen.

Diese Ableitung ist frei von allen Annahmen über unterjährige Verzinsung und über den Sterblichkeitsverlauf während eines Altersjahres. Die Näherungsformeln (33), (34), zu denen sie führt, werden in der Praxis in der Regel oder doch sehr häufig angewendet. Für die am häufigsten vorkommenden Fälle $m = 2, 4, 12$ (halbjährige, vierteljährige, monatliche Auszahlung) ergeben sich die speziellen Formeln:

$$\begin{aligned} a_x^{(2)} &= a_x - 0{,}25 & \qquad {}_{\frac{1}{2}|}a_x^{(2)} &= {}_{1|}a_x + 0{,}25 \\ a_x^{(4)} &= a_x - 0{,}375 & \qquad {}_{\frac{1}{4}|}a_x^{(4)} &= {}_{1|}a_x + 0{,}375 \\ a_x^{(12)} &= a_x - 0{,}4583\cdots & \qquad {}_{\frac{1}{12}|}a_x^{(12)} &= {}_{1|}a_x + 0{,}4583\cdots. \end{aligned} \tag{35}$$

Der Grenzwert für $m = \infty$ entspräche einer gleichmäßig fließenden oder kontinuierlichen Rente, deren Zeichen $\bar{a}_x$ sein möge; sonach wäre dieser Nährung zufolge

$$\bar{a}_x = a_x - \frac{1}{2} = {}_{1|}a_x + \frac{1}{2}\cdot \tag{36}$$

220. Fortsetzung. Ableitung der strengen Formel. Das [illegible]s genauere Eindringen in die Natur einer unterjährigen Rente und ihre[illegible]e schärfere Wertbestimmung erfordern ein näheres Eingehen auf die[illegible]ie Momente, welche sie von der ganzjährig fälligen Rente unterscheiden[illegible]n.

Es handle sich um den Wert einer postnumerando zahlbare[illegible]en m-tel-Rente vom Jahresbetrage 1, also von der Rate $\frac{1}{m}\cdot$

Eine solche Rente hat gegenüber der ganzjährig fälligen au[illegible]us zwei Gründen einen größeren Wert: 1) weil durch das vorzeitig[illegible]ge Zahlen von Raten Zins verloren geht, und 2) weil in dem Jahre, i[illegible] in welchem der Tod des Bezugsberechtigten eintritt, eventuell noch Rate[illegible]en zur Auszahlung gelangen, die bei ganzjähriger Zahlung entfalle[illegible]en würden. Man kann also den Ansatz machen:

$${}_{\frac{1}{m}|}a_x^{(m)} = {}_{1|}a_x + Z_1 + Z_2,$$

wenn man die Wertzunahmen aus den beiden Quellen mit Z_1, Z_2 [illegible] bezeichnet.

Der erste Teil, Z_1, besteht in dem jährlich, bis zum Able[illegible]en von (x) sich wiederholenden, Zinsentgang, der daraus entspringt, [illegible]aß die 1., 2., $\cdots$ m-te Rate um $\frac{m-1}{m}, \frac{m-2}{m}, \cdots \frac{m-m}{m}$ Jahre zu früh ausgefolgt wird; sein Wert ist also gleich dem Werte ei[illegible]er

Postnumerando-Leibrente vom Betrage dieses Zinsentganges, welcher Betrag gleichkommt:

$$\frac{1}{m}\left\{(1+i)^{\frac{m-1}{m}}-1\right\}+\frac{1}{m}\left\{(1+i)^{\frac{m-2}{m}}-1\right\}+$$
$$+\cdots+\frac{1}{m}\left\{(1+i)^{\frac{m-m}{m}}-1\right\};$$

denn die erste Rate $\frac{1}{m}$ wäre bis zum Jahresschlusse angewachsen auf $\frac{1}{m}(1+i)^{\frac{m-1}{m}}$, der Zinsentgang ist also $\frac{1}{m}(1+i)^{\frac{m-1}{m}}-\frac{1}{m}$; in gleicher Weise stellt das zweite Glied den Zinsentgang dar, der durch die zweite Rate hervorgerufen wird; das letzte Glied, in der Form den andern angepaßt, hat den Wert 0, weil ja die letzte Rate zum selben Zeitpunkte fällig wird wie die ganzjährig zahlbare Rente. Hiernach ist

$$Z_1 = {}_{1|}a_x\cdot\frac{1}{m}\left[1+(1+i)^{\frac{1}{m}}+(1+i)^{\frac{2}{m}}+\cdots+(1+i)^{\frac{m-1}{m}}-m\right]$$
$$=\frac{{}_{1|}a_x}{m}\left[\frac{i}{(1+i)^{\frac{1}{m}}-1}-m\right].$$

Der zweite Teil, Z_2, der nur aus dem Sterbejahre hervorgeht, ist der Wert einer Todesfallversicherung im Betrage jenes Verlustes, der durch die im Sterbejahre eventuell ausbezahlten Raten verursacht wird; nimmt man an, daß die Wahrscheinlichkeit, zu sterben, für jedes m-tel des Sterbejahres dieselbe, also $\frac{1}{m}$ sei, was gleichbedeutend ist mit der Annahme gleichförmiger Verteilung der Sterbefälle über eine einjährige Altersklasse, so ist der auf das Ende des Jahres reduzierte Verlust:

$$\frac{m-1}{m}\cdot\frac{1}{m}(1+i)^{\frac{m-1}{m}}+\frac{m-2}{m}\cdot\frac{1}{m}(1+i)^{\frac{m-2}{m}}+\cdots+\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}(1+i)^{\frac{1}{m}},$$

denn die erste Rate $\frac{1}{m}$ kommt zur Auszahlung, wenn der Tod nach dem ersten m-tel-Jahr eintritt, wofür $\frac{m-1}{m}$ die Wahrscheinlichkeit ist; die zweite Rate $\frac{1}{m}$, wenn der Tod nach dem zweiten m-tel eintritt, wofür $\frac{m-2}{m}$ die Wahrscheinlichkeit ist u. s. w.; es kommt endlich auch die letzte Rate $\frac{1}{m}$ zur Auszahlung, wenn der Tod im letzten m-tel-Jahre erfolgt, was mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{m}$ zu erwarten ist. Mithin hat man:

$$Z_2 = A_x\cdot\frac{1}{m^2}\left[(1+i)^{\frac{1}{m}}+2(1+i)^{\frac{2}{m}}+3(1+i)^{\frac{3}{m}}+\cdots+(m-1)(1+i)^{\frac{m-1}{m}}\right].$$

Bezeichnet man $(1+i)^{\frac{1}{m}}$ vorübergehend mit c, so bleibt die Reihe

$$c + 2c^2 + 3c^3 + \cdots + (m-1)c^{m-1}$$

zu summieren; multipliziert man sie zu diesem Zwecke mit $c - 1$, so entsteht:

$$\begin{aligned} &c^2 + 2c^3 + 3c^4 + \cdots + (m-2)c^{m-1} + (m-1)c^m \\ &- c - 2c^2 - 3c^3 - 4c^4 - \cdots - (m-1)c^{m-1} \\ &= (m-1)c^m - (c + c^2 + c^3 + \cdots + c^{m-1}) \\ &= m c^m - \frac{c(c^m - 1)}{c-1}; \end{aligned}$$

durch die Division mit $c - 1$ ergibt sich daraus die gesuchte Summe:

$$\frac{m c^m (c-1) - (c^m - 1) c}{(c-1)^2}.$$

Mithin ist, nach Wiedereinsetzung des Wertes für c:

$$Z_2 = A_x \frac{m(1+i)\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right] - i(1+i)^{\frac{1}{m}}}{m^2\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right]^2}.$$

Führt man den dem i entsprechenden nominellen Zinsfuß [s. Nr. 206, Gl. (6)]

$$j_{(m)} = m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right]$$

ein, so schreibt sich Z_2 kürzer:

$$Z_2 = A_x \frac{(1+i)j_{(m)} - i\left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)}{j_{(m)}^2}.$$

Hiernach ist endgiltig:

$$\frac{1}{m}|a_x^{(m)} = {}_1|a_x \frac{i}{j_{(m)}} + A_x \frac{(1+i)j_{(m)} - i\left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)}{j_{(m)}^2}. \tag{37}$$

Die *vorschüssige m*-tel-Rente, $a_x^{(m)}$, ergibt sich aus der vorigen durch Addition von $\frac{1}{m}$; mithin ist, wenn man auch rechts die vorschüssige Rente einführt:

$$a_x^{(m)} = (a_x - 1)\frac{i}{j_{(m)}} + A_x \frac{(1+i)j_{(m)} - i\left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)}{j_{(m)}^2} + \frac{1}{m}.$$

Diese Formel nimmt, wenn man auch A_x mittels der Formel (15) durch die Rente ausdrückt, also $1 - \frac{i}{1+i} a_x$ dafür schreibt, schließlich die Gestalt an:

$$a_x^{(m)} = \mathfrak{A} a_x + \mathfrak{B},$$

und zwar ist:

$$\mathfrak{A} = \frac{i}{j_{(m)}} - \frac{i j_{(m)} - i^2 (1+i)^{\frac{1-m}{m}}}{j_{(m)}^2} = \frac{1}{(1+i)^{\frac{m-1}{m}}} \left(\frac{i}{j_{(m)}}\right)^2,$$

$$\mathfrak{B} = -\frac{i}{j_{(m)}} + \frac{(1+i) j_{(m)} - i\left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)}{j_{(m)}^2} + \frac{1}{m} = -\frac{\left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)(i - j_{(m)})}{j_{(m)}^2};$$

man hat also für die vorschüssige m-tel-Rente die Formel:

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{(1+i)^{\frac{m-1}{m}}} \left(\frac{i}{j_{(m)}}\right)^2 \cdot a_x - \frac{\left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)(i - j_{(m)})}{j_{(m)}^2}. \tag{38}$$

Die Tafel am Schlusse von Nr. 206 enthält alle Hilfsgrößen, welche zur numerischen Auswertung dieser Formel für die gangbaren Werte von m erforderlich sind.

Mit der Formel (33) verglichen läßt (38) einen vom Zinsfuße abhängigen Koeffizienten von a_x erkennen, der dort durch 1 ersetzt ist, und einen ebenfalls vom Zinsfuße abhängigen zweiten Teil, der dort nur von der Anzahl der unterjährigen Raten abhängt. Daß zwischen beiden Formeln kein erheblicher Unterschied besteht, zeigt die Ausrechnung einiger besonderer Fälle; so ist bei

$$\left.\begin{array}{ll} i = 0{,}03 & i = 0{,}035 \\ a_x^{(2)} = 1{,}000055\, a_x - 0{,}25372; & = 1{,}000074\, a_x - 0{,}25434; \\ a_x^{(4)} = 1{,}000061\, a_x - 0{,}37965; & = 1{,}000091\, a_x - 0{,}38042; \\ \multicolumn{2}{c}{i = 0{,}04} \\ \multicolumn{2}{c}{a_x^{(2)} = 1{,}000096\, a_x - 0{,}25495;} \\ \multicolumn{2}{c}{a_x^{(4)} = 1{,}000122\, a_x - 0{,}38119.} \end{array}\right\} \tag{39}$$

Je kleiner a_x, desto größer ist der Unterschied zwischen den nach diesen Formeln und den nach den Näherungsformeln (35) gerechneten Resultaten. Man findet beispielsweise mit den Grundlagen von Tafel III:

$a_6 = 23{,}255$;	nach (35):	$a_6^{(2)} = 23{,}005$;	$a_6^{(4)} = 22{,}880$
	„ (39):	$= 23{,}003$;	$= 22{,}877$
$a_{40} = 17{,}103$;	nach (35):	$a_{40}^{(2)} = 16{,}853$;	$a_{40}^{(4)} = 16{,}728$
	„ (39):	$= 16{,}850$;	$= 16{,}725$
$a_{60} = 10{,}823$;	nach (35):	$a_{60}^{(2)} = 10{,}573$;	$a_{60}^{(4)} = 10{,}448$
	„ (39):	$= 10{,}570$;	$= 10{,}444$
$a_{80} = 4{,}634$;	nach (35):	$a_{80}^{(2)} = 4{,}384$;	$a_{80}^{(4)} = 4{,}259$
	„ (39):	$= 4{,}380$;	$= 4{,}254$.

Der Unterschied ist so unerheblich, daß er bei kleineren Renten außer acht gelassen und die Rechnung nach den einfacheren Formeln (35) geführt werden kann. Eine vierteljährlich zahlbare Leibrente eines 40-jährigen im Jahresbetrage von 100, beziehungsweise 1000 ℳ z. B. hat den Wert:

nach der Näherungsformel:

1672 ℳ 80 ₰, beziehungsweise 16 728 ℳ,

nach der strengen Formel:

1672 ℳ 50 ₰, beziehungsweise 16 725 ℳ.

221. Kontinuierliche Rente. Die kontinuierliche Rente entspricht der Vorstellung eines gleichmäßigen Fließens der Rente, so daß sie im Laufe eines Jahres den festgesetzten Betrag, der mit 1 angenommen werden soll, erreicht. Aus der Näherungsformel (35) für die unterjährig zahlbare Rente ergab sich (Nr. 219, Schluß) für die kontinuierliche Rente der Ausdruck

$$\bar{a}_x = a_x - \frac{1}{2}. \tag{36}$$

Führt man den Grenzübergang $m = \infty$ in der strengen Formel (38) durch, so findet sich, da zufolge Nr. 206, (7)

$$j_{(\infty)} = \operatorname{Log}(1 + i) = \delta$$

die Verzinsungsintensität ist:

$$\bar{a}_x = \frac{1}{1+i}\left(\frac{i}{\delta}\right)^2 a_x - \frac{i-\delta}{\delta^2}. \tag{40}$$

Zu einer weiteren Formel für die kontinuierliche Rente führt die infinitesimale Darstellung; nach dieser ist

$$\bar{a}_x = \frac{1}{l_x}\int_0^{\omega - x} v^t\, l_{x+t}\, dt;$$

denn $\frac{l_{x+t}}{l_x}$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß (x) das Alter $x + t$ erlebt; dt der Anteil der Rente 1, den er für das nächste Zeitelement dt erhält, und $v^t dt$ der Wert dieses Anteiles bei Abschluß der Rente. Nach einer Formel in der Fußnote zu Nr. 70 ist allgemein:

$$\int_0^{\omega - x} u\, dt = \sum_0^{\omega - 1 - x} u + \frac{1}{2}\{u\}_0^{\omega - x} - \frac{1}{12}\{u'\}_0^{\omega - x};$$

im vorliegenden Falle hat man:

$$u = v^t\, l_{x+t},$$

$$u' = l_{x+t} v^t \operatorname{Log} v + v^t \frac{d l_{x+t}}{dt} = -l_{x+t} v^t \operatorname{Log}(1+i) + v^t \frac{d l_{x+t}}{dt}$$
$$= -\delta v^t l_{x+t} + v^t l_x \frac{d l_{x+t}}{l_x dt},$$

und da u und u' aus der oberen Grenze $\omega - x$ verschwinden, so hat man

$$\int_0^{\omega - x} u\,dt = l_x + v l_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \cdots - \frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{12} u_0'$$
$$= l_x + v l_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \cdots - \frac{1}{2} l_x - \frac{1}{12} (\delta l_x + l_x \mu_x),$$

wenn μ_x die Sterblichkeitsintensität bei dem Alter x bedeutet (siehe Nr. 178). Hiermit wird

$$\bar{a}_x = \frac{l_x + v l_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \cdots}{l_x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\delta + \mu_x)$$

oder

$$\bar{a}_x = a_x - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\delta + \mu_x). \tag{41}$$

Der Unterschied zwischen den drei Formeln (36), (40) und (41) stellt sich bei numerischer Ausrechnung als geringfügig heraus. Mit den Daten der Tafel III ergibt sich beispielsweise:

nach Formel (36):	$\bar{a}_{30} = 18{,}941$;	$\bar{a}_{40} = 16{,}603$;	$\bar{a}_{60} = 10{,}323$
„ „ (40):	$= 18{,}936$;	$= 16{,}596$;	$= 10{,}317$
„ „ (41):	$= 18{,}937$;	$= 16{,}599$;	$= 10{,}318$.

222. Vollständige Rente. Die normale Postnumerando-Leibrente ${}_{1|}a_x$ ist unter der Voraussetzung gerechnet, daß die letzte Zahlung am Ende desjenigen Versicherungsjahres erfolge, welches (x) noch ganz durchlebt; am Ende des Sterbejahres wird keine Zahlung mehr geleistet.

Es kann aber die Vereinbarung getroffen sein, daß auch im Sterbejahre, und zwar am *Ende* desselben, eine dem durchlebten Teile dieses Jahres entsprechende Rate des Rentenbetrages ausgefolgt werde. Der Wert einer derart vervollständigten Rente setzt sich zusammen aus dem Werte ${}_{1|}a_x$ der nachschüssigen Rente und dem Werte einer Todesfallversicherung auf das Kapital $\frac{1}{2}$, weil mit großer Näherung angenommen werden darf, daß die Ergänzungszahlung im Durchschnitt $\frac{1}{2}$ betragen werde — bei gleichmäßiger Verteilung der Todesfälle auf ein Altersjahr wäre dies ihr genauer mittlerer Wert. Man hat also unter diesen Vereinbarungen mit dem Versicherungswerte

$$
{}_{1|}a_x + \frac{1}{2} A_x = a_x - 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{i}{1+i} a_x\right)
$$

$$
= \frac{2+i}{2(1+i)} a_x - \frac{1}{2} \tag{42}
$$

zu rechnen.

Unter einer *vollständigen Leibrente* im eigentlichen Sinne versteht man aber eine postnumerando zahlbare Rente mit einer unmittelbar nach dem Tode auszufolgenden Ergänzung im Teilbetrage der durchlebten Quote des Sterbejahres.

Man kann, die früheren Schlüsse anwendend, in erster Näherung so rechnen, also ob der durchschnittliche Wert $\frac{1}{2}$ der Vervollständigung auch in der Mitte des Sterbejahres gezahlt würde; er erreichte dann bis zum Schlusse des Jahres die Höhe $\frac{1}{2}(1+i)^{\frac{1}{2}}$, und dies wäre der Betrag der Todesfallversicherung, die zu der Rente hinzukommt. Bezeichnet man den Wert der vollständigen Rente mit ${}_{1|}\overset{0}{a}_x$, so wäre hiernach:

$$
{}_{1|}\overset{0}{a}_x = {}_{1|}a_x - \frac{1}{2} A_x (1+i)^{\frac{1}{2}}. \tag{43}
$$

Diese Rechnung ist aber insofern unzutreffend, als die über dem Durchschnitt liegenden Ergänzungszahlungen von der Diskontierung stärker berührt werden als die Ergänzungszahlungen unter $\frac{1}{2}$. Schärfer ist daher die folgende Wertbestimmung.

Es sei t der noch durchlebte Teil des Sterbejahres; dann ist auch t die zu leistende Ergänzungszahlung, tv^t ihr Wert am Anfange, tv^{t-1} ihr Wert am Ende des Jahres. Da ferner dt die Wahrscheinlichkeit ist, daß der Tod in dem Zeitintervall $(t, t+dt)$ eintreten werde, — gleichmäßige Verteilung der Sterbefälle vorausgesetzt, — so ist der strenge, auf das Ende des Todesjahres reduzierte Mittelwert der Ergänzungszahlung:

$$
\int_0^1 tv^{t-1}dt = \left\{\frac{tv^{t-1}}{\operatorname{Log} v} - \int \frac{v^{t-1}}{\operatorname{Log} v} dt\right\}_0^1
$$

$$
= \left\{\frac{tv^{t-1}}{\operatorname{Log} v} - \frac{v^{t-1}}{(\operatorname{Log} v)^2}\right\}_0^1
$$

$$
= \frac{1}{\operatorname{Log} v} - \frac{1}{(\operatorname{Log} v)^2} + \frac{1}{v(\operatorname{Log} v)^2} = \frac{i-\delta}{\delta^2}
$$

(vgl. Nr. 206). Daher hat man in schärferer Rechnung:

$$
{}_{1|}\overset{0}{a}_x = {}_{1|}a_x + \frac{i-\delta}{\delta^2} A_x. \tag{44}
$$

Entwickelt man in den beiden Formeln (43) und (44), um sie in Vergleich zu setzen, den Koeffizienten von A_x nach Potenzen von i, wonach:

$$\frac{1}{2}(1+i)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{4} + \frac{i^2}{16} + \cdots$$

$$\frac{i-\delta}{\delta^2} = \frac{i - \mathrm{Log}\,(1+i)}{\mathrm{Log}^2\,(1+i)} = \frac{1}{2} + \frac{i}{6} - \frac{i^2}{24} + \cdots,$$

so hat man auch:

$$_{1|}\overset{0}{a}_x = {}_{1|}a_x + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{4} - \frac{i^2}{16}\right) A_x \tag{43*}$$

$$_{1|}\overset{0}{a}_x = {}_{1|}a_x + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{6} - \frac{i^2}{24}\right) A_x; \tag{44*}$$

der erste Wert übertrifft den zweiten um

$$\left(\frac{i}{12} - \frac{i^2}{48}\right) A_x.$$

Nach Tafel III ist der Wert einer vollständigen Rente 1 für einen 30-jährigen, mittels der Formel (43) gerechnet:

$$_{1|}\overset{0}{a}_{30} = {}_{1|}a_{30} + \frac{1}{2} A_{30} \sqrt{1{,}035}$$

$$= 18{,}441 + 0{,}174$$

$$= 18{,}615;$$

es bewertet sich also eine derartige Rente vom Jahresbetrage 1000 ℳ, wenn sie vollständig ist, um 174 ℳ höher als bei normalem Zahlungsmodus.

223. Vollständige m-tel-Rente. Das zuletzt benützte Prinzip läßt sich auch zur Bestimmung dieses Versicherungswertes verwenden. Es ist dies eine Rente, welche am Ende jedes m-tel-Jahres mit dem Betrage $\frac{1}{m}$ und im Augenblicke des Todes mit dem der durchlebten Quote des letzten m-tel-Jahres entsprechenden Teilbetrage von $\frac{1}{m}$ zur Auszahlung kommt.

Der Tod kann in jedem m-tel des Sterbejahres erfolgen; tritt er im Laufe des $\overline{s+1}$-ten Teiles, also zur Zeit $\frac{s}{m} + t$ ein, wo $t < \frac{1}{m}$, so ist die Ergänzungszahlung t, ihr Wert am Beginne des Jahres $tv^{\frac{s}{m}+t}$, am Ende des Jahres $tv^{\frac{s}{m}+t-1}$, somit der auf das Ende des Jahres reduzierte Durchschnittswert einer im $\overline{s+1}$-ten Teile des Jahres fälligen Ergänzungszahlung:

$$v^{\frac{s}{m}-1}\int\limits_0^{\frac{1}{m}} t v^t dt = v^{\frac{s}{m}-1}\left\{-\frac{t v^t}{\delta}-\frac{v^t}{\delta^2}\right\}_0^{\frac{1}{m}}$$

$$= v^{\frac{s}{m}-1}\left\{-\frac{v^{\frac{1}{m}}}{m\delta}-\frac{v^{\frac{1}{m}}}{\delta^2}+\frac{1}{\delta^2}\right\}.$$

Die Summe aller solchen Ausdrücke, von $s = 0$ bis $s = m - 1$ genommen, gibt den Durchschnitt der gesamten, auf das Jahresende reduzierten Ergänzungszahlungen, nämlich

$$\left(\frac{1-v^{\frac{1}{m}}}{\delta^2}-\frac{v^{\frac{1}{m}}}{m\delta}\right)\left(v^{-1}+v^{\frac{1}{m}-1}+\cdots+v^{\frac{m-1}{m}-1}\right)$$

$$= \left(\frac{1-v^{\frac{1}{m}}}{\delta^2}-\frac{v^{\frac{1}{m}}}{m\delta}\right)\frac{\frac{1}{v}-1}{\frac{1}{1-v^{\frac{1}{m}}}};$$

beachtet man, daß $\frac{1}{v}-1 = 1+i-1 = i$, ferner, daß

$$m\left(\frac{1}{\frac{1}{v^{\frac{1}{m}}}}-1\right)^{\frac{1}{m}} = m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1\right] = j_{(m)}$$

ist, so verwandelt sich dies in

$$\frac{i}{\delta^2}-\frac{i}{\delta j_{(m)}}.$$

Man hat daher als Wert der vollständigen m-tel-Rente:

$${}_{\frac{1}{m}|}\overset{0}{a}{}_x^{(m)} = {}_{\frac{1}{m}|}a_x^{(m)} + A_x\left(\frac{i}{\delta^2}-\frac{i}{\delta j_{(m)}}\right). \qquad (45)$$

224. In unterjährigen Terminen zahlbare Todesfallversicherung. Die der Berechnung von A_x unterlegte normale Festsetzung geht dahin, daß das versicherte Kapital am Ende jenes Versicherungsjahres ausbezahlt wird, in welchem der Tod eintrat. Das bedeutet, daß die zwischen dem Sterben und der Kapitalsauszahlung verstrichene Zeit alle Werte von 0 bis 1 Jahr annehmen kann; nimmt man an, daß während eines Altersjahres die Todesfälle gleichförmig sich verteilen, so beträgt die Zwischenzeit im Durchschnitt $\frac{1}{2}$ Jahr. Es darf also A_x als eine Todesfallversicherung angesehen werden, die im Mittel 6 Monate nach Eintritt des Todes liquidiert wird.

In gleicher Weise darf geschlossen werden, daß eine Todesfallversicherung, bei der das versicherte Kapital am Ende jenes m-tel-Jahres zur Auszahlung kommt, in welchem der Tod eintritt, als eine

solche erklärt werden kann, bei der vom Sterben bis zur Liquidierung im Mittel $\frac{1}{2m}$ Jahr verfließt.

Bezeichnet man den Wert einer derartigen Versicherung mit $A_x^{(m)}$, so besteht der Unterschied zwischen ihr und der normalen Versicherung A_x darin, daß bei jener die Kapitalsauszahlung im Durchschnitt um $\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$ Jahr früher erfolgt als bei dieser; demnach muß die erste $(1+i)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}}$-mal höher berechnet werden als die zweite, so daß man den Ansatz hat:

$$A_x^{(m)} = A_x (1+i)^{\frac{m-1}{2m}}. \tag{46}$$

Darnach hat eine am Ende des Sterbehalbjahres fällige Versicherung den Wert

$$A_x^{(2)} = A_x (1+i)^{\frac{1}{4}},$$

eine Versicherung, welche am Ende des Sterbequartales auszuzahlen ist, den Wert

$$A_x^{(4)} = A_x (1+i)^{\frac{3}{8}}.$$

Macht man in (46) den Grenzübergang $m = \infty$, so kommt man zu dem Werte $\bar{A}_x$ einer unmittelbar nach dem Tode fälligen Ablebensversicherung:

$$\bar{A}_x = A_x (1+i)^{\frac{1}{2}}. \tag{47}$$

225. Sofort zahlbare Todesfallversicherung. Die eben erwähnte Ablebensversicherung, bei welcher das Kapital sofort, d. i. im Augenblicke des Todes fällig wird, ist auf infinitesimalem Wege so zu rechnen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß (x) in dem Zeitintervall t, $t + dt$, vom Abschluß der Versicherung an gerechnet, sterben werde, ist

$$\frac{l_{x+t} - l_{x+t+dt}}{l_x} = -\frac{d\,l_{x+t}}{l_x},$$

und die hierauf bezügliche Anwartschaft auf das Kapital 1 hat den Wert

$$-v^t \frac{d\,l_{x+t}}{l_x};$$

folglich ist

$$\bar{A}_x = -\frac{1}{l_x}\int_0^{\omega - x} v^t d\,l_{x+t}.$$

Durch partielle Integration ergibt sich weiter:

$$\bar{A}_x = -\frac{1}{l_x}\left(v^t l_{x+t} - \operatorname{Log} v \int l_{x+t} v^t dt\right)_0^{\omega - x},$$

und da (s. Nr. 221) $\frac{1}{l_x}\int\limits_0^{\omega-x} v^t l_{x+t} dt$ der Ausdruck für die kontinuierliche Rente $\bar{a}_x$ ist, wird

$$\bar{A}_x = -\frac{1}{l_x}(-l_x + \delta l_x \bar{a}_x) = 1 - \delta \bar{a}_x;$$

diese Formel ist analog der Formel (15), wonach $A_x = 1 - \delta a_x$.

Drückt man $\bar{a}_x$ nach Formel (40) durch

$$\frac{1}{1+i}\left(\frac{i}{\delta}\right)^2 a_x - \frac{i-\delta}{\delta^2}$$

und darin wiederum a_x durch A_x mittels (15) aus, wonach

$$a_x = \frac{1 - A_x}{\delta} = \frac{(1 - A_x)(1 + i)}{i}$$

ist, so gestaltet sich die letzte Formel nach einfacher Rechnung um in:

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x. \tag{48}$$

Entwickelt man in den Formeln (47) und (48) die Koeffizienten $(1+i)^{\frac{1}{2}}$ und $\frac{i}{\delta} = \frac{i}{\operatorname{Log}(1+i)}$ nach Potenzen von i bis zur zweiten einschließlich, so ergeben sich die Näherungen:

$$\bar{A}_x = \left(1 + \frac{i}{2} - \frac{i^2}{8}\right) A_x \tag{47*}$$

$$\bar{A}_x = \left(1 + \frac{i}{2} - \frac{i^2}{12}\right) A_x, \tag{48*}$$

deren Differenz bloß $\frac{i^2}{24} A_x$ ist; ja man kann, von Gliedern der Ordnung i^2 absehend, selbst bei beträchtlich hohen Versicherungen

$$\bar{A}_x = A_x\left(1 + \frac{i}{2}\right) \tag{49}$$

setzen, d. h. den normalen Wert A_x um die halben rechnungsmäßigen Prozente erhöhen, um $\bar{A}_x$ zu erhalten.

Zur näheren Beurteilung der Formeln (48) und (49) seien die folgenden Resultate angeführt. Es ist

für	nach Formel (48):	nach Formel (49):
$i = 0{,}03$	$\bar{A}_x = 1{,}014926\, A_x$,	$= 1{,}015\ A_x$
$= 0{,}035$	$= 1{,}017400\, A_x$,	$= 1{,}0175\, A_x$
$= 0{,}04$	$= 1{,}019870\, A_x$,	$= 1{,}02\ A_x$
$= 0{,}045$	$= 1{,}022334\, A_x$,	$= 1{,}0225\, A_x$
$= 0{,}05$	$= 1{,}024791\, A_x$,	$= 1{,}025\ A_x$.

Für die Todesfallversicherung eines 35-jährigen, sofort nach dem Tode zahlbar und auf 10 000 ℳ lautend, ergibt sich beispielsweise mit den Grundlagen der Tafel III nach (48) der Wert

$$\bar{A}_{35} = 3860 \text{ ℳ } 93 \text{ ₰},$$

nach (49)

$$\bar{A}_{35} = 3861 \text{ ℳ } 31 \text{ ₰},$$

während die normale Versicherung den Wert 3794 ℳ 90 ₰ besitzt.

§ 6. Renten für verbundene Leben.

226. Begriff der Verbindungsrente. Unter einer Verbindungsrente *im weiteren Sinne* versteht man jede Rente, die an einen Komplex von Lebenden (x), (y), (z), $\cdots$ gebunden ist. Über ihren Beginn, ihren Abschluß, die Höhe des Rentenbezuges, die Reihenfolge der Bezugsberechtigten können mannigfache Bestimmungen getroffen sein, um so mannigfacher, je größer die Anzahl m der verbundenen Leben ist. Unter der Fülle möglicher Formen haben aber nur wenige praktische Bedeutung.

Zur Wertbestimmung solcher Renten sind, neben der Leibrente, die Verbindungsrenten *im engeren Sinne* oder schlechtweg die Grundlage. Als solche bezeichnet man eine Rente, die sofort beginnt und mit gleichbleibendem Jahresbetrage so lange währt, als der ganze Komplex am Leben bleibt, der einer solchen Rente gegenüber also die Rolle eines Individuums spielt, das mit dem Tode der ersten Person aus dem Komplex zu bestehen aufhört. Aus diesem Grunde nennt man die gewöhnliche Verbindungsrente auch die *Rente bis zum ersten Tode.*

Ihr Wert, bezogen auf den Jahresbetrag 1, wird mit $a_{xyz\cdots(m)}$ bezeichnet.

Ist ${}_np_{xyz\cdots(m)}$ die Wahrscheinlichkeit, daß die m Personen nach n Jahren noch am Leben sein werden, so ist bei pränumerando zahlbarer Rente der Wert von $a_{xyz\cdots(m)}$ die Summe aller

$$v^n{}_np_{xyz\cdots(m)}$$

von $n = 0$ angefangen, wobei zu bemerken, daß ${}_0p_{xyz\cdots(m)} = 1$ ist. Man hat also den allgemeinen Ansatz:

$$a_{xyz\cdots(m)} = \sum_0 v^n{}_np_{xyz\cdots(m)}. \tag{50}$$

Macht man, wie dies allgemein geschieht, die sicher nicht immer zutreffende Voraussetzung, die Leben seien von einander unabhängig, so daß der Tod einer Person auf die Lebensdauer der Überlebenden keinen Einfluß übt, so stellt sich ${}_np_{xyz\cdots(m)}$ als Produkt der auf die

einzelnen Personen und dasselbe Ereignis bezüglichen Wahrscheinlichkeiten dar; man setzt also in Konsequenz obiger Voraussetzung

$$ {}_n p_{xyz\cdots(m)} = {}_n p_x \cdot {}_n p_y \cdot {}_n p_z \cdots $$

und rechnet die einzelnen Faktoren der rechten Seite mit Hilfe der Sterbetafel. Dabei ist zu unterscheiden, ob die einzelnen Leben als gleichwertige Risikos, also nach derselben Tafel zu behandeln sind, oder ob sie Gesamtheiten verschiedenen Sterblichkeitsverlaufes angehören und daher nach verschiedenen Tafeln zu beurteilen sind (z. B. Personen männlichen und weiblichen Geschlechtes).

Unter den Verbindungsrenten sind die auf zwei Leben (x), (y) abgeschlossenen die wichtigsten, weil am häufigsten vorkommenden. Aus

$$ {}_n p_{xy} = {}_n p_x \cdot {}_n p_y = \frac{l_{x+n}}{l_x} \frac{l_{y+n}}{l_y} $$

folgt nach Vorschrift von (50):

$$ \begin{aligned} a_{xy} &= \frac{l_x l_y + v l_{x+1} l_{y+1} + v^2 l_{x+2} l_{y+2} + \cdots}{l_x l_y} \\ &= \frac{v^x l_x l_y + v^{x+1} l_{x+1} l_{y+1} + v^{x+2} l_{x+2} l_{y+2} + \cdots}{v^x l_x l_y} \\ &= \frac{D_x l_y + D_{x+1} l_{y+1} + D_{x+2} l_{y+2} + \cdots}{D_x l_y}; \end{aligned} $$

führt man für das Produkt $D_x l_y$, dessen ein Faktor eine diskontierte, der andere eine unmittelbare Zahl von Lebenden ist, die Bezeichnung D_{xy} und für die Summe dieser „diskontierten Paare von Lebenden“ von dem Zeiger x, y aufwärts die Bezeichnung

$$ N_{xy} = D_{xy} + D_{x+1,\,y+1} + D_{x+2,\,y+2} + \cdots \tag{51} $$

ein, so schreibt sich die Verbindungsrente, der einfachen Leibrente analog:

$$ a_{xy} = \frac{N_{xy}}{D_{xy}}. \tag{52} $$

Diese Art der technischen Durchführung der Verbindungsrenten stammt von Griffith Davies. Seine diskontierten Zahlen

$$ D_{xy} = D_x l_y, \tag{53} $$

die zu allgemeinem Gebrauche gekommen sind, weisen insofern eine Unsymmetrie auf, als man sich darüber entscheiden muß, für welches Leben man die diskontierten Zahlen wählen will; theoretisch ist dies gleichgiltig, aus praktischen Gründen, um es mit kleineren Zahlen zu *tun zu haben*, wählt man das Leben des höheren Alters hierfür.

De Morgan hat, um Symmetrie zu erzielen, die Bildung der diskontierten Zahlen der Paare gemäß der Formel

$$D_{xy} = v^{\frac{x+y}{2}} l_x l_y \tag{54}$$

vorgeschlagen, der auch die wesentliche Eigenschaft zukommt, daß

$$D_{x+1, y+1} = v^{\frac{x+y}{2}+1} l_x l_y,$$

daß also mit dem Steigen der Alter um 1 Jahr der Exponent von v um 1 zunimmt. Auch für diese Zahlen gilt die Formel (52).

Die Übertragung dieser Formel auf mehr als zwei Leben bietet keine Schwierigkeit.

224. Berechnung von Verbindungsrenten. Satz von De Morgan. Die Anlegung von Tafeln für Verbindungsrenten ist eine beschwerliche Arbeit, schon wenn es sich um zwei Leben handelt; hier wiederum ist die Schwierigkeit eine erheblich größere, wenn die beiden Leben nach verschiedenen Sterbetafeln zu behandeln sind, als wenn beiden dieselbe Tafel unterlegt wird. Während nämlich im ersten Falle für jede in Betracht kommende Altersdifferenz $|x-y|$ *zwei* Tafeln gerechnet werden müssen, die eine für $x > y$, die andere für $x < y$, gehört im zweiten Falle zu jeder Altersdifferenz nur *eine* Tafel.

Die Rechnung besteht bei jeder einbezogenen Altersdifferenz in der Bildung der Zahlenkolonne D_{xy} und ihrer Summenreihe N_{xy}.

Bei mehr als zwei Leben würde die Arbeit, Rententabellen in größerem Umfange anzulegen, zu einer geradezu nicht zu bewältigenden.

Es sind daher vielfach praktische Regeln aufgestellt worden, um Verbindungsrenten für mehrere Leben auf einfachere Renten zurückzuführen. Eine solche Regel, an der später in verschiedener Weise Korrektionen versucht worden sind, um sie mit den Resultaten direkter Rechnung besser in Einklang zu bringen, hat Thomas Simpson aufgestellt[1]). Sie lautet, wenn man sich der gegenwärtigen Zeichensprache bedient, wie folgt: „Ist a_{xyz} zu bestimmen, und ist $x < y < z$, so suche man mit Hilfe einer Tafel für Renten auf zwei Leben und einer Tafel einfacher Renten w derart, daß

$$a_w = a_{yz};$$

alsdann ist

$$a_{xyz} = a_{xw}."$$

Hierdurch wäre also die Berechnung von Verbindungsrenten auf drei Leben zurückgeführt auf Renten für zwei Leben. Die Anwendung

1) Doctrine of Annuities and Reversions. Select Excercices etc. 1752.

der Regel auf die Tafeln des „Institute of Actuaries“ hat jedoch gezeigt, daß sie — von den hohen Altern abgesehen — etwas zu große Rentenwerte liefert.

Zu einer streng richtigen, auf beliebig viele Leben ausdehnbaren würde die Simpsonsche Regel, wenn für die ganze Lebensdauer die Gompertzsche Formel gälte, wie dies De Morgan[1]) zuerst bewiesen hat. Diese Formel gestattet nämlich, zu zwei Altern x, y ein „mittleres“ Alter w so zu bestimmen, daß

$${}_np_{xy} = {}_np_x \cdot {}_np_y = {}_np_w$$

wird für *jedes* n; dann aber gilt auch streng:

$$a_{xy} = a_w,$$

d. h. jede Verbindungsrente für zwei Leben läßt sich durch eine einfache Rente ersetzen. Es ist klar, daß dies auf beliebig viele Leben ausgedehnt werden kann.

Aus der Gompertzschen Formel [s. Nr. 197, Gl. (2)]

$$l_x = kg^{c^x}$$

geht nämlich

$$l_{x+n} = kg^{c^{x+n}}$$

und aus beiden Ansätzen

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = g^{c^x(c^n-1)}$$

hervor; dies gibt in jedem System:

$$\log {}_np_x = c^x(c^n - 1)\log g; \qquad (\varDelta)$$

hält man dazu

$$\log {}_np_y = c^y(c^n - 1)\log g,$$

so ergibt sich

$$\log {}_np_{xy} = \log {}_np_x + \log {}_np_y = (c^x + c^y)(c^n - 1)\log g.$$

Bestimmt man w derart, daß

$$c^x + c^y = c^w \qquad (\varDelta')$$

wird, so ergibt sich mit Rücksicht auf $(\varDelta)$:

$$\log {}_np_{xy} = c^w(c^n - 1)\log g = \log {}_np_w,$$

woraus die für jedes n giltige Gleichung

$${}_np_{xy} = {}_np_w$$

folgt.

Aus $(\varDelta')$, wenn man es in der Form

$$c^{w-y} = 1 + c^{x-y}$$

1) Philos. Mag. 1839, Novbr.

schreibt, liest man die Tatsache, daß $w - y$ konstant bleibt, so lange es $x - y$ ist; für alle Verbindungen (x), (y) gleicher Altersdifferenz ist also die Abweichung des substituierten Alters w von dem einen Alter y die nämliche.

Auch wenn die Sterbetafel der Makehamschen Formel folgt, ergibt sich eine wesentliche Vereinfachung in der Berechnung der Verbindungsrenten. Nach Nr. 197, Gl. (5) ist nämlich dann

$$l_x = k s^x g^{c^x},$$

also

$$l_{x+n} = k s^{x+n} g^{c^{x+n}},$$

daher

$$\log {}_n p_x = n \log s + c^x (c^n - 1) \log g, \qquad (\Delta'')$$

ebenso

$$\log {}_n p_y = n \log s + c^y (c^n - 1) \log g,$$

folglich

$$\log {}_n p_{xy} = \log {}_n p_x + \log {}_n p_y = 2n \log s + (c^x + c^y)(c^n - 1) \log g;$$

wird also w so bestimmt, daß es der Gleichung

$$c^x + c^y = 2c^w \qquad (\Delta''')$$

genügt, so zeigt ein Vergleich mit (Δ''), daß dann

$$\log {}_n p_{xy} = 2 \log {}_n p_w = \log {}_n p_w^2 = \log {}_n p_{ww}$$

wird; d. h. man kann ${}_n p_{xy}$ für jedes n durch ein ${}_n p_{ww}$, also auch ein ${}_n p_{xyz\cdots(m)}$ durch ein gleichwertiges ${}_n p_{www\cdots(m)}$ ersetzen, wenn nur w der Gleichung

$$c^x + c^y + c^z + \cdots = m c^w \qquad (\Delta^{IV})$$

gemäß bestimmt wird.

Infolge dieses Sachverhaltes ist es möglich, Verbindungsrenten, die zu verschiedenen Altern gehören, durch Verbindungsrenten ebenso vieler gleichaltriger Leben darzustellen, wodurch eine erhebliche Verminderung der Arbeit erzielt wird. Nicht zu übersehen ist der Umstand, daß die abgeleiteten Sätze auf der Voraussetzung beruhen, daß die verbundenen Leben gleichwertige Risikos repräsentieren.

Diese Vorteile sind mit ein Grund, weshalb bei der Ausgleichung vieler Tafeln die Gompertzsche oder die Makehamsche Formel zur Anwendung gebracht worden ist.

Die Bestimmung des substituierten Alters gestaltet sich einfacher bei Benützung der Sterblichkeitsintensität als nach den Gleichungen (Δ'), (Δ''').

Im ersten Falle hat man nämlich

$$\begin{array}{l} \mu_x = Bc^x \\ \mu_y = Bc^y \\ \hline \mu_x + \mu_y = B(c^x + c^y) = Bc^w = \mu_w; \end{array}$$

im andern Falle ist

$$\begin{array}{l} \mu_x = A + Bc^x \\ \mu_y = A + Bc^y \\ \hline \mu_x + \mu_y = 2A + B(c^x + c^y) = 2A + 2Bc^w = 2\mu_w; \end{array}$$

bei mehr als zwei Leben verallgemeinert sich die erste Formel zu

$$\mu_x + \mu_y + \mu_z + \cdots = \mu_w, \qquad (\delta')$$

die andere zu

$$\mu_x + \mu_y + \mu_z + \cdots = m\mu_w. \qquad (\delta'')$$

Tafel III, der die Makehamsche Formel (mit einer Modifikation für die niederen Alter, s. Nr. 197) zugrunde liegt, enthält für die Zwecke der Berechnung von Verbindungsrenten auch die Kolonnen a_{xx}, a_{xxx}. Ein Beispiel wird die Verwendung zeigen.

Es sei der Rentenwert $a_{25,40,48}$ zu bestimmen. Aus der Tafel entnimmt man:

$$\begin{array}{rl} \mu_{25} &= 0{,}00701 \\ \mu_{40} &= 0{,}00990 \\ \mu_{48} &= 0{,}01388 \\ \hline 3\mu_w &= 0{,}03079 \\ \mu_w &= 0{,}01026, \end{array}$$

durch Interpolation zwischen μ_{41} und μ_{42}:

$$w = 41{,}025.$$

$$a_{25,40,48} = a_{41{,}025,\,41{,}025,\,41{,}025};$$

Interpolation:

$$\begin{array}{rl} a_{41,41,41} &= 11{,}824 \\ a_{42,42,42} &= 11{,}559 \\ \hline \text{Diff.} &= 0{,}265 \end{array}$$

Prop.-Th. zu 0,025 = 0,007 (subtr.),

$$a_{25,40,48} = 11{,}817$$

228. Verbindungsrenten bis zu einem späteren Tode. An die Verbindung der m Leben (x), (y), (z), $\cdots$ sei die Pränumerando-Rente 1 so lange zahlbar, als *mindestens* r davon am Leben sind, das heißt ebenso viel als *bis zum* $\overline{m - r + 1}$-ten *Tode*. Das Zeichen für den Wert dieser Rente ist $a_{\overline{xyz\cdots(m)}}^{\;r}$. Wird $r = 1$, so läuft die Rente, so lange noch *ein* Überlebender aus der Verbindung vorhanden ist, also bis *zum letzten Tode*; man bezeichnet sie dann kurz mit $a_{\overline{xyz\cdots(m)}}$.

Die Bestimmung von $a_{\overline{xyz\cdots(m)}}^{\;r}$ stützt sich auf das zweite in Nr. 39 gestellte Problem; unter den Ereignissen e_i, f_i der dortigen Formulierung ist das Erleben, beziehungsweise Nichterleben der Alter $x + n$, $y + n$, $z + n$, $\cdots$ seitens der Personen (x), (y), (z), $\cdots$ zu verstehen. Nach der dort abgeleiteten Formel (8) stellt sich die Wahrscheinlich-

keit ${}_np_{\overline{xyz\cdots(m)}}^{\,r}$, daß von den m Personen nach n Jahren mindestens r am Leben seien, durch einen Ausdruck von der Form

$$S_r - \binom{r}{1} S_{r+1} + \binom{r+1}{2} S_{r+2} - \cdots + (-1)^{m-r} \binom{m-1}{r+1} S_m \qquad (\alpha)$$

dar; dabei bedeutet

$$S_k \text{ die Summe aller } {}_np_{xyz\cdots(k)},$$

also die Summe der Wahrscheinlichkeiten für das Zusammenleben aller Kombinationen von je k Personen der Verbindung nach n Jahren.

Nun ist $a_{\overline{xyz\cdots(m)}}^{\,r}$ die Summe der Werte $v^n {}_np_{\overline{xyz\cdots(m)}}^{\,r}$ für alle r von $n=0$ angefangen (wobei ${}_0p_{\overline{xyz\cdots(m)}}^{\,r} = 1$); mithin entsteht für $a_{\overline{xyz\cdots(m)}}^{\,r}$ ein Ausdruck von der gleichen Form wie (α), nur daß nunmehr

$$S_k \text{ die Summe aller } a_{xyz\cdots(k)},$$

also die Summe der Verbindungsrenten für alle Kombinationen von je k Personen der Verbindung ist.

Aus dieser Deduktion geht hervor, daß sich $a_{\overline{xyz\cdots(m)}}^{\,r}$ ausdrücken läßt durch die Verbindungsrenten $a_{xyz\cdots(k)}$ für alle k von r aufwärts bis m.

Einige Beispiele mögen dies erläutern.

Die auf die Leben (x), (y) bezügliche, bis zum zweiten Tode, also bis zum Aussterben der Verbindung währende Rente 1 hat nach (α) den Wert

$$a_{\overline{xy}} = S_1 - S_2 = a_x + a_y - a_{xy}.$$

Eine Rente vom Jahresbetrage 1, auf die Leben (x), (y), (z) begründet und bis zum letzten Tode während, hat nach demselben Schema (α) den Wert

$$\begin{aligned} a_{\overline{xyz}} &= S_1 - S_2 + S_3 \\ &= a_x + a_y + a_z - (a_{yz} + a_{zx} + a_{xy}) + a_{xyz}; \end{aligned}$$

insbesondere ist für drei Leben gleichen Alters

$$a_{\overline{xxx}} = 3a_x - 3a_{xx} + a_{xxx};$$

mit den Daten der Tafel III ergibt sich für den speziellen Fall $x = 30$:

$$a_{\overline{30,30,30}}^{\,1} = 3 \cdot 19{,}441 - 3 \cdot 16{,}399 + 14{,}394 = 23{,}520,$$

ein Wert, der um 4,079 größer ist als die auf *ein* Leben von 30 Jahren bezügliche Leibrente.

Soll unter den obigen Verhältnissen die Rente bis zum zweiten Tode, also so lange mindestens zwei Personen am Leben sind, währen, so ist ihr Wert

$$a_{\overline{xyz}}^{\underline{2}} = S_2 - 2S_3$$
$$= a_{yz} + a_{zx} + a_{xy} - 2a_{xyz}.$$

Die Rente bis zum ersten Tode, $a_{\overline{xyz}}^{3}$, ist identisch mit der Verbindungsrente a_{xyz}.

War bei dem voranstehenden Problem bloß der Zeitpunkt des Aufhörens der Rente unbestimmt, so ist es bei dem nachfolgenden auch der Zeitpunkt des Beginnes.

An die Verbindung der m Leben (x), (y), (z), $\cdots$ sei die Rente 1 pränumerando so lange zahlbar, als *gerade* r davon am Leben sind, also vom $\overline{m-r}$-ten bis zum $\overline{m-r+1}$-ten Tode. Das Zeichen für diese Rente ist $a_{\overline{xyz\cdots(m)}}^{[r]}$.

Die Lösung dieses Problemes gründet sich auf die erste in Nr. 39 erledigte Aufgabe; den vorigen völlig gleichwertige Erwägungen führen dazu, daß $a_{\overline{xyz\cdots(m)}}^{[r]}$ durch

$$S_r - \binom{r+1}{1} S_{r+1} + \binom{r+2}{2} S_{r+2} - \cdots + (-1)^{m-r} \binom{m}{m-r} S_m \qquad (\beta)$$

dargestellt ist mit derselben Bedeutung von S_k, wie sie zuletzt angegeben wurde.

Hiernach ist beispielsweise bei drei Leben

$$a_{\overline{xyz}}^{[1]} = S_1 - 2S_2 + 3S_3$$
$$= a_x + a_y + a_z - 2(a_{yz} + a_{zx} + a_{xy}) + 3a_{xyz},$$
$$a_{\overline{xyz}}^{[2]} = S_2 - 3S_3 = a_{yz} + a_{zx} + a_{xy} - 3a_{xyz},$$
$$a_{\overline{xyz}}^{[3]} = S_3 = a_{xyz}.$$

Sind alle drei Personen vom Alter x, so ist

$$a_{\overline{xxx}}^{[1]} = 3a_x - 6a_{xx} + 3a_{xxx};$$

diese Rente wird an die letzte der drei Personen nach dem Tode der beiden andern bis zu ihrem eigenen Tode gezahlt; sie kommt das erste Mal zur Auszahlung am Beginne jenes Versicherungsjahres, das dem Todesjahre der zweitgestorbenen Person folgt. Beispielsweise ist nach Tafel III:

$$a_{\overline{30,30,30}}^{[1]} = 3 \cdot 19{,}441 - 6 \cdot 16{,}399 + 3 \cdot 14{,}394 = 3{,}111.$$

229. Überlebensrenten. Einen praktisch wichtigen Fall der letztbesprochenen Rentengattung bildet die auf zwei Leben (x), (y)

gegründete *gegenseitige Überlebensrente*. Es ist dies die vom ersten bis zum zweiten Tode, also an die überlebende Person, *welche von beiden es auch sei*, pränumerando zahlbare Rente 1. Ihr Wert ist nach (β)

$$a^{[1]}_{\overline{xy}} = S_1 - 2S_2 = a_x + a_y - 2a_{xy}. \tag{54}$$

Diese Formel kann auch durch folgende Schlußfolgerung abgeleitet werden. Würden (x) und (y) unabhängig von einander eine Leibrente begründen, so wäre der Wert ihrer Anwartschaften $a_x + a_y$; so lange sie zusammenleben, bezöge ihre Verbindung die Rente 2, deren Wert $2a_{xy}$ ist; diese Anwartschaft fällt aber nach den obigen Bestimmungen hinweg; folglich verbleibt $a_x + a_y - 2a_{xy}$ als Wert der Rente, die nur an den Überlebenden von beiden im Jahresbetrage 1 ausgezahlt wird.

Es sei beispielsweise die gegenseitige Überlebensrente für zwei Personen zu bestimmen, deren eine 30, die andere 45 Jahre alt ist; als Grundlage diene Tafel III.

$\mu_{30} = 0{,}00768$	$a_{39,39} = 14{,}272$
$\mu_{45} = 0{,}01204$	$a_{40,40} = 14{,}007$
$2\mu_w = 0{,}01972$	Diff. $= 0{,}265$
$\mu_w = 0{,}00986$	
$w = 39{,}94$	Prop.-Th. zu $0{,}94 = 0{,}249$ (subtrakt.)
	$a_{30,45} = 14{,}023$;

demnach ist die gesuchte Überlebensrente

$$a^{[1]}_{\overline{30,45}} = 19{,}441 + 15{,}706 - 2 \cdot 14{,}023 = 7{,}101.$$

Eine Form der Verbindungsrente, bei der die Reihenfolge der Todesfälle der Versicherten in Betracht kommt und die bei Witwen- und Waisenpensionen von praktischer Bedeutung ist, bildet die *einseitige Überlebensrente*. Ihr Wesen besteht im folgenden. An die Person (x) wird, wenn sie die Person (y) überlebt, vom Tode dieser angefangen[1]) bis zu ihrem eigenen Ableben die Rente 1 bezahlt. Der Wert dieser Rente wird mit $a_{y|x}$ bezeichnet.

Zu ihrer Bestimmung führt folgende Überlegung. Eine Leibrente für (x) hat den Wert a_x; so lange aber (x) mit (y) zugleich lebt, hat der Bezug der Rente zu entfallen, und der Wert dieses Entganges ist a_{xy}; folglich gilt der Ansatz:

$$a_{x\,y} = a_x - a_{xy}. \tag{55}$$

Von der Richtigkeit desselben kann man sich auch durch eine wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtung überzeugen. Die Wahr-

1) D. h. vom Anfange des dem Sterbejahre folgenden Versicherungsjahres.

scheinlichkeit, daß nach n Jahren vom Abschlusse der Rente gerechnet (x) noch lebt, (y) aber vorher gestorben ist, kommt gleich ${}_np_x(1-{}_np_y)$; nur unter dieser Voraussetzung wird in jenem Zeitpunkte die Rente 1 ausbezahlt, und der Wert dieser Anwartschaft ist

$$v^n {}_np_x(1-{}_np_y) = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x}\left(1-\frac{l_{y+n}}{l_y}\right);$$

die Summe hiervon für alle Werte von n von 1 aufwärts ist $a_{y|x}$; folglich hat man

$$a_{y|x} = \frac{v l_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \cdots}{l_x} - \frac{v l_{x+1} l_{y+1} + v^2 l_{x+2} l_{y+2} + \cdots}{l_x l_y};$$

der erste Bruch rechts stellt aber $a_x - 1$, der zweite $a_{xy} - 1$ dar, daher ist tatsächlich

$$a_{y|x} = a_x - 1 - (a_{xy} - 1) = a_x - a_{xy}.$$

Zwischen dieser Rente und der gegenseitigen besteht ein einfacher Zusammenhang: es ist evident, daß die gegenseitige Rente der Verbindung $(x)(y)$ die Summe der einseitigen Überlebensrenten auf (x) und (y) ist, daß also

$$a_{xy}^{[1]} = a_{y|x} + a_{x|y};$$

nun ist

$$a_{y|x} = a_x - a_{xy}$$
$$a_{x|y} = a_y - a_{yx},$$

daher

$$a_{\overline{xy}}^{[1]} = a_x + a_y - 2a_{xy}$$

in Übereinstimmung mit (54).

Rechnet man bei der Verbindung, wie sie dem letzten Beispiele zugrunde lag, die Überlebensrente für die 30-jährige Person, so ergibt sich

$$a_{45|30} = 19{,}441 - 14{,}023 = 5{,}418;$$

hingegen wäre die Überlebensrente der 45-jährigen Person

$$a_{30|45} = 15{,}706 - 14{,}023 = 1{,}683,$$

naturgemäß erheblich kleiner nicht nur wegen der geringeren Wahrscheinlichkeit, daß der 45-jährige den 30-jährigen eher überlebt als umgekehrt, sondern auch wegen der mutmaßlich (durchschnittlich) geringeren Dauer der Rente.

230. Aufgeschobene, temporäre und unterjährig fällige Verbindungs- und Überlebensrenten. Aus der Definition der Verbindungsrente (Nr. 226) folgt, daß die um n Jahre *aufgeschobene* Verbindungsrente auf die Leben $(x)(y)$ sich darstellt durch

$$ {}_{n|}a_{xy} = \frac{N_{x+n,y+n}}{D_{xy}}. \tag{56}$$

Vergleicht man dies mit der unmittelbaren Rente des Paares $(x+n)$, $(y+n)$, d. i. mit

$$ a_{x+n,y+n} = \frac{N_{x+n,y+n}}{D_{x+n,y+n}}, $$

so ergibt sich mit Rücksicht auf die durch (53) definierte Bedeutung von D_{xy}:

$$ {}_{n|}a_{xy} = \frac{D_{x+n,y+n}}{D_{xy}}\, a_{x+n,y+n} = v^n\, {}_n p_{xy}\, a_{x+n,y+n}, \tag{56*}$$

eine Relation, welche vollkommen analog ist der Beziehung (8*), Nr. 210, für einfache Renten.

Die postnumerando zahlbare Verbindungsrente, gleichbedeutend mit der um 1 Jahr aufgeschobenen, hat den Wert

$$ {}_{1|}a_{xy} = \frac{N_{x+1,y+1}}{D_{xy}} = \frac{N_{x,y}+D_{xy}}{D_{xy}} = a_{xy} - 1. \tag{57}$$

Für die auf n Jahre *abgekürzte* sofort beginnende Verbindungsrente ergibt sich der Ausdruck

$$ \begin{aligned} {}_{|n}a_{xy} &= \frac{D_{xy}+D_{x+1,y+1}+\cdots+D_{x+n-1,y+n-1}}{D_{xy}} \\ &= \frac{N_{xy}-N_{x+n,y+n}}{D_{xy}} = a_{xy} - {}_{n|}a_{xy}, \end{aligned} \tag{58}$$

und für die um n Jahre aufgeschobene und auf m Jahre abgekürzte Verbindungsrente

$$ \begin{aligned} {}_{n|m}a_{xy} &= \frac{D_{x+n,y+n}+D_{x+n+1,y+n+1}+\cdots+D_{x+n+m-1,y+n+m-1}}{D_{xy}} \\ &= \frac{N_{x+n,y+n}-N_{x+n+m,y+n+m}}{D_{xy}} = {}_{n|}a_{xy} - {}_{n+m|}a_{xy}. \end{aligned} \tag{59}$$

Wird die Verbindungsrente in m-tel Raten ausbezahlt, so daß ihr Jahresbetrag $m\cdot\frac{1}{m}=1$ ist, so kommt ihr Wert in erster, für praktische Zwecke ausreichender Näherung (s. Nr. 219) gleich

$$ a_{xy}^{(m)} = a_{xy} - \frac{m-1}{2m}. \tag{60}$$

Für die aufgeschobene, beziehungsweise die abgekürzte einseitige Überlebensrente gelten die unmittelbar evidenten Ansätze:

$$ {}_{n|}a_{y|x} = {}_{n|}a_y - {}_{n|}a_{xy}, \tag{61}$$

$$ {}_{|n}a_{y|x} = {}_{|n}a_y - {}_{|n}a_{xy}; \tag{62}$$

die erste Rente wird nicht früher als nach n Jahren flüssig, vorausgesetzt, daß (y) vorher gestorben und (x) dann noch am Leben ist; stirbt (y) später als nach n Jahren, so tritt (x) am Anfange des nächsten Versicherungsjahres in den Bezug der Rente; die zweite dauert längstens n Jahre vom Abschlusse an gerechnet, kommt also eventuell gar nicht zur Auszahlung, wenn (y) innerhalb dieser Zeit nicht oder nach (x) sterben sollte.

Bei unterjähriger, auf m gleiche Raten festgesetzter Auszahlung hat man für die sofort beginnende einseitige Überlebensrente zugunsten des (y) die Formel:

$$a^{(m)}_{x|y} = a^{(m)}_{y} - a^{(m)}_{xy};$$

wendet man rechts bei beiden Teilen die erste Näherung an, so heben sich die Korrektionsglieder $\frac{m-1}{2m}$ auf, und es entsteht:

$$a^{(m)}_{x|y} = a_y - a_{xy} \tag{63}$$

wie bei der jährlich fälligen Rente.

231. Einige Beispiele von Verbindungsrenten.

1) An die Verbindung $(x)(y)$ ist bis zum ersten Tode die Rente 1, von da ab an die überlebende Person die Rente $\frac{1}{2}$ auszuzahlen.

Der Wert dieser Anwartschaft ist die Summe zweier einfacher Renten vom Betrage $\frac{1}{2}$, also

$$\frac{1}{2}(a_x + a_y)$$

oder auch die Summe einer Verbindungsrente bis zum ersten und einer solchen bis zum zweiten Tode, jede im Betrage $\frac{1}{2}$, also

$$\frac{1}{2}\left(a_{xy} + a^{[1]}_{xy}\right);$$

in der Tat geht dieser Ausdruck in den früheren über, wenn man für den zweiten Teil den Wert aus (54) einsetzt.

2) Die Rente 1 ist nach dem Tode von (x) so lange zu zahlen, als von den zwei Personen (y), (z) noch eine am Leben ist.

Die Wahrscheinlichkeit, daß nach n Jahren die Rente zur Auszahlung kommt, ist

$$(1 - {}_np_x)\,[1 - (1 - {}_np_y)(1 - {}_np_z)]$$
$$= {}_np_y + {}_np_z - {}_np_{yz} - {}_np_{xy} - {}_np_{xz} + {}_np_{xyz};$$

denn (x) darf nicht mehr und von den beiden andern Personen muß wenigstens *eine* leben. Multipliziert man dies mit v^n und bildet die

Summe für alle n von 1 aufwärts, so ergibt sich als Wert der obigen Rente[1]):

$$a_y + a_z - a_{yz} - a_{xy} - a_{xz} + a_{xyz}.$$

3) Die Rente 1 ist so lange zahlbar, als (x) und von (y), (z) mindestens einer lebt.

Aus der Wahrscheinlichkeit, daß die Rente nach n Jahren zur Auszahlung gelangt:

$${}_np_x[1 - (1 - {}_np_y)(1 - {}_np_z)] = {}_np_{xy} + {}_np_{xz} - {}_np_{xyz},$$

ergibt sich durch dieselbe Schlußfolgerung der Rentenwert

$$a_{xy} + a_{xz} - a_{xyz},$$

dessen Richtigkeit sich auch durch andere Überlegungen leicht erweisen läßt.

4) Die Rente 1 werde ausbezahlt vom Aussterben zweier Personen (x), (y) (z. B. der Eltern) angefangen bis zum Tode einer dritten Person (z) (eines Kindes).

Die Zahlung des Rentenbetrages nach n Jahren ist mit der Wahrscheinlichkeit

$$(1 - {}_np_x)(1 - {}_np_y)\,{}_np_z = {}_np_z - {}_np_{xz} - {}_np_{yz} + {}_np_{xyz}$$

zu erwarten; daraus folgt der Wert der Rente:

$$a_z - a_{xz} - a_{yz} + a_{xyz}.$$

5) Die Rente 1 ist nach dem Aussterben des Paares (α), (β) (Eltern) so lange zu zahlen, als von den drei Personen (x), (y), (z) (Kinder) mindestens eine am Leben ist (Versicherung eines Waisenstockes).

Die Wahrscheinlichkeit, daß nach n Jahren (α) und (β) gestorben sind, ist

$$(1 - {}_np_\alpha)(1 - {}_np_\beta) = 1 - {}_np_\alpha - {}_np_\beta + {}_np_{\alpha\beta};$$

die Wahrscheinlichkeit, daß dann von (x), (y), (z) mindestens eines am Leben ist, drückt sich nach Formel (α), Nr. 228, aus durch

$$S_1 - S_2 + S_3 = {}_np_x + {}_np_y + {}_np_z - {}_np_{xy} - {}_np_{xz} - {}_np_{yz} + {}_np_{xyz};$$

durch Multiplikation beider ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, unter welcher der Rentenbetrag nach n Jahren zur Auszahlung kommt, und aus dieser der Rentenwert selbst:

$$\begin{aligned} & a_x + a_y + a_z - a_{xy} - a_{xz} - a_{yz} + a_{xyz} \\ & - a_{\alpha x} - a_{\alpha y} - a_{\alpha z} + a_{\alpha xy} + a_{\alpha xz} + a_{\alpha yz} - a_{\alpha xyz} \\ & - a_{\beta x} - a_{\beta y} - a_{\beta z} + a_{\beta xy} + a_{\beta xz} + a_{\beta yz} - a_{\beta xyz} \\ & + a_{\alpha\beta x} + a_{\alpha\beta y} + a_{\alpha\beta z} - a_{\alpha\beta xy} - a_{\alpha\beta xz} - a_{\alpha\beta yz} + a_{\alpha\beta xyz}; \end{aligned}$$

es wären also 28 verschiedene Renten zu seiner Berechnung nötig.

---

1) Es entstehen zunächst durchwegs postnumerando zahlbare Renten, die aber ohne Störung des Wertes durch Pränumerandorenten ersetzt werden dürfen.

§ 7. Kapitalversicherungen für verbundene Leben.

232. Todesfallversicherung auf das kürzeste von mehreren Leben. Die Verbindung (x), (y), (z), $\cdots$ von m Personen sei auf das Kapital 1 in der Weise versichert, daß dasselbe am Ende jenes Versicherungsjahres fällig wird, in welchem die erste Person der Verbindung stirbt. Man bezeichnet diese Versicherung als *Todesfallversicherung auf das kürzeste Leben* und ihren Wert mit $A_{xyz\cdots(m)}$.

Um diesen zu ermitteln, ist die Kenntnis der Wahrscheinlichkeit $_{n-1|}q_{xyz\cdots(m)}$ erforderlich, daß im Laufe des n-ten Jahres der *erste* Todesfall eintreten werde; die diesem Falle entsprechende Anwartschaft hat den Wert

$$v^n \, {}_{n-1|}q_{xyz\cdots(m)}$$

und die Summe all der Werte von $n = 1$ angefangen gibt $A_{xyz\cdots(m)}$, so daß

$$A_{xyz\cdots(m)} = \sum_1 v^n \, {}_{n-1|}q_{xyz\cdots(m)}. \tag{64}$$

Die hier auftretende Sterbenswahrscheinlichkeit kann durch Lebenswahrscheinlichkeiten ausgedrückt werden; denn die Verbindung (x), (y), (z), $\cdots$ (m) besteht am Ende des $\overline{n-1}$-ten Jahres noch aufrecht, entweder wenn sie auch noch am Ende des n-ten Jahres vollzählig oder im Laufe des n-ten Jahres durch den ersten Tod gelöst worden ist; daher gilt der Ansatz:

$$_{n-1}p_{xyz\cdots(m)} = {}_np_{xyz\cdots(m)} + {}_{n-1|}q_{xyz\cdots(m)};$$

daraus folgt aber

$$_{n-1|}q_{xyz\cdots(m)} = {}_{n-1}p_{xyz\cdots(m)} - {}_np_{xyz\cdots(m)}; \tag{65}$$

die Lebenswahrscheinlichkeiten können nun auf Grund der Bemerkungen in Nr. 226 mittels Sterbetafeln berechnet werden.

233. Gegenseitige Überlebensversicherung. Bei zwei Leben (x), (y) heißt die Versicherung auf das kürzere Leben auch *gegenseitige Überlebensversicherung.* Ihr allgemeiner Ausdruck ist

$$A_{xy} = \sum_1 v^n \, {}_{n-1|}q_{xy}. \tag{64*}$$

Nun ist nach (65)

$$_{n-1|}q_{xy} = {}_{n-1}p_{xy} - {}_np_{xy} = \frac{l_{x+n-1}\, l_{y+n-1} - l_{x+n}\, l_{y+n}}{l_x l_y},$$

demnach

$$A_{xy} = \frac{v(l_x l_y - l_{x+1} l_{y+1}) + v^2 (l_{x+1} l_{y+1} - l_{x+2} l_{y+2}) + \cdots}{l_x l_y};$$

berechnet man im Sinne **Griffith Davies'** die Zahlen

$$C_{xy} = v^{x+1}(l_x l_y - l_{x+1} l_{y+1}) \tag{66}$$

oder im Sinne **De Morgans** die Zahlen

$$C_{xy} = v^{\frac{x+y}{2}+1}(l_x l_y - l_{x+1} l_{y+1}) \tag{66*}$$

und deren Summen

$$M_{xy} = C_{xy} + C_{x+1,\,y+1} + C_{x+2,\,y+2} + \cdots, \tag{67}$$

so drückt sich mit Hilfe derselben A_{xy} in einer der einfachen Todesfallversicherung analogen Form aus:

$$A_{xy} = \frac{M_{xy}}{D_{xy}}. \tag{68}$$

Indessen ist es, wenn man die Zahlen N_{xy} oder die Verbindungsrenten gerechnet hat, nicht mehr nötig, die Zahlen C_{xy} und M_{xy} zu rechnen. Der Zähler von A_{xy} läßt sich nämlich umformen in

$$v\,[l_x l_y + v l_{x+1} l_{y+1} + \cdots] - [v l_{x+1} l_{y+1} + v^2 l_{x+2} l_{y+2} + \cdots],$$

und durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit v^x, respektive $v^{\frac{x+y}{2}}$, verwandelt er sich weiter in

$$\begin{aligned} v[D_{xy} + D_{x+1,\,y+1} + \cdots] - [D_{x+1,\,y+1} + D_{x+2,\,y+2} + \cdots] \\ = v N_{xy} - N_{x+1,\,y+1} = (v-1) N_{xy} + D_{xy}, \end{aligned}$$

so daß, da der Nenner durch die letztgedachte Operation in D_{xy} übergeht,

$$A_{xy} = 1 - (1-v)\, a_{xy} = 1 - d a_{xy}. \tag{69}$$

Diese Formel ist jener für die einfache Todesfallversicherung: $A_x = 1 - d a_x$, analog.

234. Aufgeschobene und kurze gegenseitige Überlebensversicherung. Bei der *aufgeschobenen* gegenseitigen Überlebensversicherung, ${}_n|A_{xy}$, kommt das Kapital 1 nur dann zur Auszahlung, wenn der erste Todesfall später als nach n Jahren erfolgt; um ihren Wert zu erhalten, hat man in (64*) mit der Summenbildung erst bei $n+1$ zu beginnen; bei gleichartiger Führung der Rechnung ergibt sich:

$$\begin{aligned} {}_{xy} &= \frac{v[D_{x+n,\,y+n} + D_{x+n+1,\,y+n+1} + \cdots] - [D_{x+n+1,\,y+n+1} + D_{x+n+2,\,y+n+2} + \cdots]}{D_{xy}} \\ &= \frac{D_{x+n,\,y+n}}{D_{xy}} \cdot \frac{(v-1) N_{x+n,\,y+n} + D_{x+n,\,y+n}}{D_{x+n,\,y+n}}, \end{aligned}$$

d. i.

$${}_n|A_{xy} = \frac{D_{x+n,\,y+n}}{D_{xy}}\,(1 - d a_{x+n,\,y+n}). \tag{70}$$

Für den vor der Klammer stehenden Quotienten kann auch $v^n {}_{n}p_{xy}$ geschrieben werden.

Die auf n Jahre *abgekürzte* gegenseitige Überlebensversicherung, ${}_{|n}A_{xy}$, läßt das Kapital nur dann fällig werden, wenn der erste Todesfall innerhalb n Jahren sich zuträgt. Sie ergibt sich als Differenz aus der lebenslänglichen und der auf n Jahre aufgeschobenen Überlebensversicherung, so daß

$$ {}_{|n}A_{xy} = A_{xy} - {}_{n}A_{xy}. \qquad (71) $$

235. Gemischte gegenseitige Überlebensversicherung. Das Kapital 1 komme zur Auszahlung entweder nach dem ersten Tode[1]), wenn dieser innerhalb n Jahren eintritt, oder nach n Jahren, wenn beide Personen (x), (y) leben.

Der Wert dieser Versicherung, welche der in Nr. 217 behandelten gemischten Versicherung entspricht, werde mit $A_{xy\overline{n}|}$ bezeichnet. Er setzt sich zusammen aus dem Werte einer auf n Jahre abgekürzten gegenseitigen Überlebensversicherung ${}_{|n}A_{xy}$ und aus jenem der Erlebensversicherung ${}_{n}E_{xy}$; somit ist

$$ A_{xy\overline{n}|} = {}_{|n}A_{xy} + {}_{n}E_{xy}. $$

Der Wert des ersten Gliedes rechts ist durch die Formel (71) bestimmt; ferner ist

$$ {}_{n}E_{xy} = v^n \frac{l_{x+n}\, l_{y+n}}{l_x\, l_y}; $$

daher

$$ A_{xy\overline{n}|} = A_{xy} - \frac{v[D_{x+n,y+n} + D_{x+n+1,y+n+1} + \cdots] - [D_{x+n+1,y+n+1} + D_{x+n+2,y+n+2} + \cdots}{D_{xy}} $$
$$ + \frac{D_{x+n,y+n}}{D_{xy}} = A_{xy} - \frac{(v-1)\, N_{x+n,y+n}}{D_{xy}} = 1 - d\,a_{xy} + d\,{}_{n|}a_{x,y} = 1 - d\,(a_{xy} - {}_{n} a $$

d. i. nach Gleichung (58)

$$ A_{xy\overline{n}|} = 1 - d\,{}_{|n}a_{xy}. \qquad (72) $$

Auch diese Formel entspricht völlig der in Nr. 217 für die gemischte Versicherung auf ein Leben gefundenen Formel (31).

236. Todesfallversicherung auf das längste zweier Leben. Auf die zwei Leben (x), (y) ist das Kapital 1 in der Weise versichert, daß es am Ende jenes Versicherungsjahres zur Auszahlung kommt, in welchem der *zweite* Todesfall eintritt.

Die Wahrscheinlichkeit, daß sich dies im Laufe des n-ten Jahres ereignet, ist ausgedrückt durch

$$ {}_{n-1|}q_x(1 - {}_{n-1}p_y) + {}_{n-1|}q_y(1 - {}_{n-1}p_x) + {}_{n-1|}q_x\, {}_{n-1|}q_y; $$

1) Am Schlusse des Todesjahres.

die drei Glieder entsprechen den Möglichkeiten, daß (x), daß (y) in diesem Jahre stirbt, nachdem der andere schon in den vorangegangenen Jahren gestorben ist, und daß beide in dem genannten Jahres sterben. Ordnet man den Ausdruck wie folgt:

$$_{n-1|}q_x + {}_{n-1|}q_y - [{}_{n-1|}q_x \, {}_{n-1}p_y + {}_{n-1|}q_y \, {}_{n-1}p_x - {}_{n-1|}q_x \, {}_{n-1|}q_y],$$

führt in dem Klammerpolynom die Substitutionen

$$_{n-1|}q_x = {}_{n-1}p_x - {}_n p_x$$
$$_{n-1|}q_y = {}_{n-1}p_y - {}_n p_y$$

aus, so verwandelt sich dieses in

$$_{n-1}p_{xy} - {}_n p_{xy},$$

d. i. nach Gleichung (65) in $_{n-1|}q_{xy}$. Mithin nimmt die obige Wahrscheinlichkeit den einfacheren Ausdruck

$$_{n-1|}q_x + {}_{n-1|}q_y - {}_{n-1|}q_{xy}$$

an. Durch Multiplikation mit v^n und Summierung des Produktes über alle Werte von $n = 1$ aufwärts ergibt sich der gesuchte Versicherungswert, dessen Zeichen $A_{\overline{xy}}$ ist, nämlich:

$$A_{\overline{xy}} = \sum v^n \, {}_{n-1|}q_x + \sum v^n \, {}_{n-1|}q_y - \sum v^n \, {}_{n-1|}q_{xy},$$

d. i.

$$A_{\overline{xy}} = A_x + A_y - A_{xy}. \tag{73}$$

In Renten lautet er (s. Nr. 228)

$$\begin{aligned} A_{\overline{xy}} &= 1 - da_x + 1 - da_y - (1 - da_{xy}) \\ &= 1 - d(a_x + a_y - a_{xy}) = 1 - da_{\overline{xy}}. \end{aligned} \tag{74}$$

Die Formel (73) ergibt sich auch aus folgender Erwägung. Wären (x) und (y) unabhängig von einander je auf das Kapital 1 versichert, so wäre $A_x + A_y$ der Gesamtwert dieser Versicherungen. Zieht man davon den Wert A_{xy} der Versicherung auf das kürzeste Leben ab, so verbleibt der Wert der Versicherung auf das längste Leben.

237. Einseitige Überlebensversicherung. Das Kapital 1 sei zahlbar am Ende des Sterbejahres von (x), wenn dieser *vor* (y) stirbt. Das Zeichen für diese auf das Leben (x) zugunsten von (y) abgeschlossene Todesfallversicherung ist $A_{\overset{1}{x}y}$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß (x) im Laufe des n-ten Jahres vor (y) sterben werde, heiße $_{n-1|}q_{\overset{1}{x}y}$.

Der Fall kann dadurch eintreten, daß (x) im n-ten Jahre stirbt und (y) dieses Jahr überlebt, wofür die Wahrscheinlichkeit

$$({}_{n-1}p_x - {}_n p_x) \, {}_n p_y \tag{α}$$

ist; aber auch in der Weise, daß beide Personen im n-ten Jahre sterben, aber (x) als erster, wofür, wenn man gleichförmige Verteilung der Sterbefälle über ein Altersjahr annimmt, die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{2}\left({}_{n-1}p_x - {}_np_x\right)\left({}_{n-1}p_y - {}_np_y\right) \tag{β}$$

beträgt. Folglich ist

$$\begin{aligned} {}_{n-1}q^1_{xy} &= \left({}_{n-1}p_x - {}_np_x\right){}_np_y + \frac{1}{2}\left({}_{n-1}p_x - {}_np_x\right)\left({}_{n-1}p_y - {}_np_y\right) \\ &= \frac{1}{2}\left({}_{n-1}p_x - {}_np_x\right)\left({}_{n-1}p_y + {}_np_y\right) \qquad (\gamma) \\ &= \frac{1}{2}\left({}_{n-1}p_{xy} - {}_np_{xy} + {}_{n-1}p_x\,{}_np_y - {}_{n-1}p_y\,{}_np_x\right); \end{aligned}$$

der letzte Ausdruck kann noch wie folgt umgestaltet werden: Es ist

$${}_{n-1}p_{xy} - {}_np_{xy} = {}_{n-1|}q_{xy};$$

ferner ergibt sich aus ${}_{n-1}p_x p_{x-1} = {}_np_{x-1}$, daß

$${}_{n-1}p_x = \frac{{}_np_{x-1}}{p_{x-1}}$$

und ebenso

$${}_{n-1}p_y = \frac{{}_np_{y-1}}{p_{y-1}};$$

daher hat man auch

$${}_{n-1|}q^1_{xy} = \frac{1}{2}\left({}_{n-1|}q_{xy} + \frac{{}_np_{x-1,y}}{p_{x-1}} - \frac{{}_np_{x,y-1}}{p_{y-1}}\right). \tag{δ}$$

Mit Hilfe dieser Wahrscheinlichkeit berechnet sich nun A^1_{xy} nach dem Schema:

$$A^1_{xy} = \frac{1}{2}\sum_1 v^n\,{}_{n-1|}q^1_{xy}. \tag{75}$$

Für die numerische Ermittelung derartiger Versicherungswerte können nun verschiedene technische Formeln abgeleitet werden.

Wir beginnen mit jener *Näherungs*formel[1]), die sich ergibt, wenn man von den beiden Teilen (α), (β), aus welchen sich ${}_{n-1|}q^1_{xy}$ zusammensetzt, den zweiten wegen seiner Kleinheit gegenüber dem ersten wegläßt, mit andern Worten: von der Möglichkeit, daß beide Personen in *einem* Jahre sterben, absieht und demgemäß setzt:

$$\begin{aligned} {}_{n-1|}q^1_{xy} &= \left({}_{n-1}p_x - {}_np_x\right){}_np_y \\ &= \frac{l_{x+n-1}\,l_{y+n} - l_{x+n}\,l_{y+n}}{l_x\,l_y}; \end{aligned}$$

dann wird gemäß der Formel (75) und den Entwickelungen in Nr. 226:

1) Vgl. A. Zillmer, Die mathem. Rechnungen etc., 2. Aufl., p. 99ff.

$$A_{\overset{1}{x}y} = \frac{D_{y+1}l_x + D_{y+2}l_{x+1} + \cdots}{D_y l_x} - \frac{D_{y+1}l_{x+1} + D_{y+2}l_{x+2} + \cdots}{D_y l_x}$$

$$= \frac{D_{y+1}}{D_y} \frac{D_{y+1}l_x + D_{y+2}l_{x+1} + \cdots}{D_{y+1}l_x} - \frac{D_y l_x + D_{y+1}l_{x+1} + \cdots}{D_y l_x} + 1$$

$$= 1 + \frac{D_{y+1}}{D_y} a_{x,y+1} - a_{xy}. \qquad (76)$$

Mit Benützung des vollständigen Wertes (δ) für ${}_{n-1|}q_{\overset{1}{x}y}$ ergibt sich die korrekte Formel:

$$A_{\overset{1}{x}y} = \frac{1}{2}\left[A_{xy} + \frac{a_{x-1,y} - 1}{p_{x-1}} - \frac{a_{x,y-1} - 1}{p_{y-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - d a_{xy} + \frac{a_{x-1,y} - 1}{p_{x-1}} - \frac{a_{x,y-1} - 1}{p_{y-1}}\right]; \qquad (77)$$

denn es ist

$$\sum_1 v^n {}_{n-1|}q_{xy} = A_{xy} \text{ nach Formel (64*)},$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_1 v^n {}_n p_{x-1,y} = a_{x-1,y} - 1 \\ \sum_1 v^n {}_n p_{x,y-1} = a_{x,y-1} - 1 \end{array}\right\} \text{nach Formel (50).}$$

Zur Vergleichung der beiden Formeln (76), (77) diene das folgende, mit den Grundlagen der Tafel III durchgeführte Beispiel. Es handle sich um $A_{\overset{1}{35},25}$.

Nach der in Nr. 227 entwickelten Methode, welche auf die genannte Tafel Anwendung findet, weil diese nach der Makehamschen Formel ausgeglichen ist, ergeben sich die erforderlichen Verbindungsrenten:

$$a_{35,26} = a_{31,2,\,31,2} = 16{,}143$$
$$a_{35,25} = a_{30,64,\,30,64} = 16{,}264$$
$$a_{34,25} = a_{35,24} = a_{30,30} = 16{,}399,$$

und man hat nach Formel (76):

$$A_{\overset{1}{35},25} = 1 + \frac{37771}{39371}\, 16{,}143 - 16{,}264 = 0{,}223,$$

nach Formel (77):

$$A_{\overset{1}{35},25} = \frac{1}{2}\,[1 - 0{,}0338 \cdot 16{,}264 + 15{,}399\,(1{,}0085 - 1{,}0070)] = 0{,}236.$$

In einer andern Form, ebenfalls durch Renten ausgedrückt, erhält man $A_{\overset{1}{x}y}$, wenn man an die Darstellung (γ) von ${}_{n-1|}q_{\overset{1}{x}y}$ anknüpft; ersetzt man darin die Wahrscheinlichkeiten durch Zahlen aus der Sterbetafel, so wird

$$_{n-1|}q^1_{xy} = \frac{1}{2} \frac{l_{x+n-1} - l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n-1} + l_{y+n}}{l_y}; \qquad (\varepsilon)$$

bei Annahme gleichförmiger Verteilung der Sterbefälle innerhalb einer einjährigen Altersklasse ist

$$\frac{1}{2}(l_{y+n-1} + l_{y+n}) = l_{y+n-\frac{1}{2}};$$

dann schreibt sich:

$$_{n-1}\, q^1_{xy} = \frac{l_{x+n-1}\, l_{y+n-\frac{1}{2}} - l_{x+n}\, l_{y+n-\frac{1}{2}}}{l_x\, l_y}$$

und

$$A^1_{xy} = \frac{l_{x-1}\, l_{y-\frac{1}{2}}}{l_x\, l_y} \sum_1 v^n \frac{l_{x+n-1}\, l_{y+n-\frac{1}{2}}}{l_{x-1}\, l_{y-\frac{1}{2}}} - \frac{l_{y-\frac{1}{2}}}{l_y} \sum_1 v^n \frac{l_{x+n}\, l_{y+n-\frac{1}{2}}}{l_x\, l_{y-\frac{1}{2}}};$$

die hierin vorkommenden Summen bedeuten aber Postnumerando-Verbindungsrenten, die erste zur Verbindung $(x-1)\left(y-\frac{1}{2}\right)$, die zweite zur Verbindung $(x)\left(y-\frac{1}{2}\right)$, so daß

$$A^1_{xy} = \frac{l_{x-1}\, l_{y-\frac{1}{2}}}{l_x\, l_y}(a_{x-1,y-\frac{1}{2}} - 1) - \frac{l_{y-\frac{1}{2}}}{l_y}(a_{x,y-\frac{1}{2}} - 1). \qquad (78)$$

Man kann auch besondere Zahlenkolonnen zur Berechnung der einseitigen Überlebensversicherungen anlegen. Aus (ε) folgt

$$_{n-1|}q^1_{xy} = \frac{d_{x+n-1}\, l_{y+n-\frac{1}{2}}}{l_x\, l_y},$$

daher ist

$$v^n\, {}_{n-1|}q^1_{xy} = \frac{v^{x+n}\, d_{x+n-1}\, l_{y+n-\frac{1}{2}}}{v^x\, l_x\, l_y};$$

führt man nun allgemein

$$C^1_{xy} = v^x\, d_{x-1}\, l_{y-\frac{1}{2}} \qquad (79)$$

und die Summen

$$M^1_{xy} = C^1_{xy} + C^1_{x+1,y+1} + C^1_{x+2,y+2} + \cdots \qquad (80)$$

als neue Zahlen ein, während $v^x l_x l_y$ die bei Verbindungsrenten vorkommende Zahl D_{xy} bedeutet, so ergibt sich für A^1_{xy} ein Ausdruck, der demjenigen für die einfache Todesfallversicherung ähnlich sieht, nämlich

$$A^1_{xy} = \frac{M^1_{xy}}{D_{xy}}. \qquad (81)$$

Aus der Formel (77):

$$A_{\overset{1}{x}y} = \frac{1}{2}\left[A_{xy} + \frac{a_{x-1,y} - 1}{p_{x-1}} - \frac{a_{x,y-1} - 1}{p_{y-1}}\right]$$

folgt

$$A_{x\overset{1}{y}} = \frac{1}{2}\left[A_{xy} + \frac{a_{x,y-1} - 1}{p_{y-1}} - \frac{a_{x-1,y} - 1}{p_{x-1}}\right]$$

und daraus durch Summierung:

$$A_{\overset{1}{x}y} + A_{x\overset{1}{y}} = A_{xy}. \tag{82}$$

In der Tat ist die Summe der Überlebensversicherungen auf den Tod von (x) und von (y) die Todesfallversicherung auf den ersten Tod überhaupt.

Wird das Kapital 1 ausgezahlt, wenn (x) als zweiter stirbt, so heiße der Wert der Versicherung $A_{\overset{2}{x}y}$. Er ergibt sich durch die Bemerkung, daß die Summe aus $A_{\overset{1}{x}y}$ und $A_{\overset{2}{x}y}$ notwendig A_x ist: denn (x) ist auf den Todesfall überhaupt versichert, wenn er in der Verbindung $(x)(y)$ sowohl auf den ersten wie auf den zweiten Tod versichert ist. Man hat also zur Berechnung von $A_{\overset{2}{x}y}$ den Ansatz:

$$A_{\overset{1}{x}y} + A_{\overset{2}{x}y} = A_x. \tag{83}$$

Es ist wohl zu beachten, daß $A_{\overset{2}{x}y}$ verschieden ist von $A_{x\overset{1}{y}}$. Denn $A_{\overset{2}{x}y}$ ist eine Versicherung, zahlbar nach dem zweiten Tode, $A_{x\overset{1}{y}}$ aber eine nach dem ersten Tode fällig werdende Versicherung.

Als Beispiel mögen die drei Versicherungswerte $A_{\overset{1}{50},40}$, $A_{50,\overset{1}{40}}$ und $A_{\overset{2}{50},40}$ berechnet werden; zur Grundlage diene die Tafel III.

Zur Lösung dieser Aufgabe sind bei Anwendung der Formel (77) die Verbindungsrenten $a_{50,40}$, $a_{49,40}$, $a_{50,39}$ notwendig. Nach dem in Nr. 227 erläuterten Verfahren findet man:

$$a_{50,40} = a_{46,10,\,46,10} = 12{,}278,$$

$$a_{49,40} = a_{45,39,\,45,39} = 12{,}488,$$

$$a_{50,39} = a_{45,82,\,45,82} = 12{,}361;$$

ferner ergibt sich

$$A_{50,40} = 1 - 0{,}0338 \cdot 12{,}278 = 0{,}58501,$$

und der Tafel entnimmt man

$$A_{50} = 0{,}52079.$$

Mit diesen Daten erhält man:

$$A_{\overset{1}{50}, 40} = \frac{1}{2}[0{,}58501 + 11{,}488 \cdot 1{,}0151 - 11{,}361 \cdot 1{,}0098] = 0{,}38707$$

$$A_{50, \overset{1}{40}} = 0{,}58501 - 0{,}38707 = 0{,}19794$$

$$A_{\overset{2}{50}, 40} = 0{,}52079 - 0{,}38707 = 0{,}13372.$$

Eine Versicherung auf das Kapital von 1000 *M* hat demnach den Wert:

520,79 *M*, wenn sie zahlbar ist bei dem Tode von (50);
585,01 „, wenn sie zahlbar ist bei Aufhören der Verbindung (50) (40);
387,07 „, wenn sie zahlbar ist, falls (50) als erster stirbt;
197,94 „, wenn sie zahlbar ist, falls (40) als erster stirbt;
133,72 „, wenn sie zahlbar ist, falls (50) als zweiter stirbt.

238. Aufgeschobene und temporäre Überlebensversicherungen. Eine um n Jahre aufgeschobene Überlebensversicherung auf den Tod von (x) zugunsten von (y) hat den Wert

$$_{n|}A_{\overset{1}{x}y} = v^n\,{}_np_{xy}\,A_{\overset{1}{\overline{x+n}},\overline{y+n}}; \tag{84}$$

denn sie kommt zur Auszahlung nur dann, wenn die Verbindung $(x)\,(y)$ nach n Jahren noch besteht, hat dann den Wert $A_{\overset{1}{\overline{x+n}},\overline{y+n}}$, der durch Multiplikation mit v^n auf den gegenwärtigen Zeitpunkt zu diskontieren ist. Für $v^n\,{}_np_{xy}$ kann, wenn die Kolonne D_{xy} vorhanden ist, $\frac{D_{x+n,y+n}}{D_{xy}}$ gesetzt werden.

Aus den Formeln (82) und (83) folgt weiter:

$$_{n|}A_{x\overset{1}{y}} = {}_{n|}A_{xy} - {}_{n|}A_{\overset{1}{x}y}, \tag{85}$$

$$_{n|}A_{\overset{2}{x}y} = {}_{n|}A_x - {}_{n|}A_{\overset{1}{x}y}. \tag{86}$$

Für temporäre Versicherungen dieser Art ergeben sich unmittelbar die Ansätze:

$$_{|n}A_{\overset{1}{x}y} = A_{\overset{1}{x}y} - {}_{n|}A_{\overset{1}{x}y} \tag{87}$$

$$\begin{aligned} _{|n}A_{x\overset{1}{y}} &= A_{x\overset{1}{y}} - {}_{n|}A_{x\overset{1}{y}} \\ &= {}_{|n}A_{xy} - {}_{|n}A_{\overset{1}{x}y} \end{aligned} \tag{88}$$

$$\begin{aligned} _{|n}A_{\overset{2}{x}y} &= A_{\overset{2}{x}y} - {}_{n|}A_{\overset{2}{x}y} \\ &= {}_{|n}A_x - {}_{|n}A_{\overset{1}{x}y}. \end{aligned} \tag{89}$$

Wie man erkennt, ist $A_{\overset{1}{x}y}$ neben A_x und A_{xy} diejenige Größe, durch welche sich die andern Versicherungswerte ausdrücken lassen,

für die also besondere Tafeln anzulegen sind. Man wird solche nur für $x < y$ zu rechnen haben, weil die Fälle, wo die Versicherung auf den früheren Tod der jüngeren Person abgeschlossen wird, die häufigeren sind.

§ 8. Versicherungswerte, die von Invalidität abhängen.

239. Aktivitätsrenten. Unter einer *Aktivitätsrente* versteht man eine Rente, die an den Fortbestand der Aktivität (Diensttauglichkeit) einer Person (x) gebunden ist. Wenn keine andere zeitliche Bestimmung über ihren Ablauf getroffen ist, so währt sie bis zum Eintritt der Invalidität oder des Todes (im aktiven Zustande), wird also zum letztenmal an jener Versicherungsjahreswende ausbezahlt, welche dem abschließenden Ereignis vorangeht.

Die Berechnung der Aktivitätsrenten erfordert die Kenntnis der *Ausscheideordnung der Aktiven* und erfolgt auf Grund dieser in allen Beziehungen genau ebenso wie die der Leibrenten aus der Sterbetafel.

Ist $l_n^{(a)}, l_{n+1}^{(a)}, \cdots l_n^{(a)} + \cdots$[1]) die Ausscheideordnung der Diensttauglichen [s. Nr. 202, b)], wobei n das niedrigste Alter bedeutet, über welches Beobachtungen nach dieser Richtung angestellt worden sind, so sind die Fundamentalzahlen zur Rechnung der Aktivitätsrenten: die „diskontierten Zahlen der Aktiven“

$$D_x^{(a)} = v^x l_x^{(a)} \tag{90}$$

und ihre Summen

$$N_x^{(a)} = D_x^{(a)} + D_{x+1}^{(a)} + D_{x+2}^{(a)} + \cdots. \tag{91}$$

Aus diesen berechnet sich beispielsweise die durch die ganze Aktivitätsdauer pränumerando zahlbare Rente, deren Zeichen ${}^a a_x$ sein möge:

$${}^a a_x = \frac{N_x^{(a)}}{D_x^{(a)}}, \tag{92}$$

die längstens n Jahre, wenn die Aktivität so lange anhält, zahlbare Rente:

$${}_{|n}^{a}a_x = \frac{N_x^{(a)} - N_{x+n}^{(a)}}{D_x^{(a)}} \tag{93}$$

u. s. w.

Tafel VI, welche sich auf das gesamte Personal des Vereins Deutscher Eisenbahnverwaltungen nach der Bentzienschen Rechnung

---

1) Die Verwendung der eingeklammerten oberen Zeiger (a), (i), die auf Aktive, respektive Invalide hinweisen, kann hier kein Mißverständnis hervorrufen, da sie Zahlen betrifft, bei denen an die sonstige Bedeutung eines solchen Zeigers (wie bei $a_x^{(m)}$, $A_x^{(m)}$) nicht gedacht werden kann.

stützt, enthält die Kolonne der Zahlen $D_x^{(a)}$ und der Renten ${}^a a_x$;[1]) dagegen ist die Kolonne $N_x^{(a)}$ wegen Raumersparnis fortgelassen. Indessen reichen diese Daten hin, um auch aufgeschobene und kurze Renten zu rechnen; so ist beispielsweise

$$ {}_{n|}{}^a a_x = \frac{D_{x+n}^{(a)}}{D_x^{(a)}}\, {}^a a_{x+n}, $$

$$ {}_{|n}{}^a a_x = {}^a a_x - {}_{n|}{}^a a_x . $$

Danach ist die volle Aktivitätsrente eines 30-jährigen

$$ {}^a a_{30} = 16{,}95153, $$

die um 10 Jahre aufgeschobene

$$ {}_{10|}{}^a a_{30} = \frac{20\,987{,}26}{32\,935{,}44}\, 13{,}61271 = 8{,}6743, $$

die bis zum 60. Jahre abgekürzte

$$ {}_{|30}{}^a a_{30} = 16{,}95153 - \frac{5\,055{,}666}{32\,935{,}44}\, 5{,}95979 = 16{,}0367. $$

240. Invalidenrenten. Dieselben unterscheiden sich von Leibrenten dadurch, daß sie an das Leben dienstuntauglich, invalid gewordener Personen gebunden sind.

Zu ihrer Berechnung bedarf man einer *Invalidensterbetafel*; aus dieser werden sie in allen Formen und Beziehungen ganz in derselben Weise abgeleitet, wie Leibrenten aus einer gewöhnlichen Sterbetafel.

Ist $l_n^{(i)}, l_{x+1}^{(i)}, \cdots l_x^{(i)}, \cdots$ die Absterbeordnung invalider Personen [s. Nr. 202, a)], so hat man die Fundamentzahlen

$$ D_x^{(i)} = v^x l_x^{(i)} \tag{94} $$

und

$$ N_x^{(i)} = D_x^{(i)} + D_{x+1}^{(i)} + D_{x+2}^{(i)} + \cdots \tag{95} $$

zu bilden.

Aus diesen Zahlen ergibt sich die lebenslänglich an einen Invaliden (x) pränumerando zahlbare Rente, deren Zeichen ${}^i a_x$ sei:

$$ {}^i a_x = \frac{N_x^{(i)}}{D_x^{(i)}} . \tag{96} $$

Für aufgeschobene, abgekürzte, unterjährig zahlbare u. dgl. Renten gelten analoge Formeln wie bei Leibrenten.

Tafel VII, welche mit denselben Grundlagen gerechnet ist wie Tafel VI, enthält die Kolonne der Rentenwerte ${}^i a_x$.

---

1) Entnommen aus O. Dietrichkeit, Fundamentalzahlen für Invaliditätsversicherung. Elberfeld 1894.

Hiernach hat beispielsweise die lebenslängliche Rente eines 30-jährigen Invaliden der erwähnten Kategorie den Wert 10,95748.

An dieser Stelle mag die Bemerkung gemacht werden, daß es für die Sterblichkeit x-jähriger Invaliden gewiß nicht gleichgiltig ist, ob sie eben erst invalid geworden oder schon seit einer Reihe von Jahren dienstuntauglich sind. Indessen wird auf diesen Einfluß der Invaliditätsdauer bisher keine Rücksicht genommen, weil es an entsprechenden Beobachtungen mangelt.

241. Invaliditätsrenten. Hierunter versteht man Renten, die auf das Leben *Aktiver* abgeschlossen werden mit der Bestimmung, daß sie nach eventuell eingetretener Invalidität zu beginnen und dann bis zum Tode oder längstens bis zu einem festgesetzten Alter zu dauern haben. Der Beginn und das Inkrafttreten einer solchen Rente überhaupt ist demnach ungewiß. Ihr Wert werde, falls der Bezug bis zum Ableben dauert, mit ${}^{ai}a_x$ bezeichnet. Zu seiner Bestimmung können verschiedene Methoden benützt werden.

Man kann wie folgt schließen. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein x-jähriger Aktiver im Laufe des $\overline{n+1}$-ten Jahres invalid werde, drückt sich mit Hilfe der Ausscheideordnung der Aktiven und der Invaliditätswahrscheinlichkeit durch das Produkt

$$\frac{l_{x+n}^{(a)}}{l_x^{(a)}} w_{x+n}$$

aus, dessen erster Faktor die Wahrscheinlichkeit für das Erleben des Alters $x+n$ im aktiven Zustande bedeutet, während der zweite die Wahrscheinlichkeit des Invalidwerdens auf der Altersstufe $(x+n, x+n+1)$ vorstellt. Tritt dieser Fall ein, so gelangt (x) in den Bezug einer Invalidenrente; über den Zeitpunkt ihres Beginnes können verschiedene Bestimmungen getroffen werden. Setzt man fest, die Rente solle gleich nach festgestellter Invalidität flüssig werden, so kann ihr Wert im Durchschnitt zu

$${}^{i}a_{x+n+\frac{1}{2}} = \frac{{}^{i}a_{x+n} + {}^{i}a_{x+n+1}}{2}$$

angesetzt werden, weil man annehmen darf, daß die Invaliditätsfälle innerhalb eines Altersjahres sich gleichförmig verteilen. Der diskontierte Wert dieser Anwartschaft ist demnach

$$v^{n+\frac{1}{2}} \frac{l_{x+n}^{(a)}}{l_x^{(a)}} w_{x+n}\, {}^{i}a_{x+n+\frac{1}{2}} = \sqrt{v}\, \frac{D_{x+n}^{(a)}\, w_{x+n}\, {}^{i}a_{x+n+\frac{1}{2}}}{D_x^{(a)}}.$$

Die Summe dieser Ausdrücke von $n = 0$ aufwärts gibt den Wert der Invaliditätsrente:

$${}^{ai}a_x = \sqrt{v} \cdot \frac{\sum\limits_0 D_{x+n}^{(a)}\, w_{x+n}\, {}^{i}a_{x+n+\frac{1}{2}}}{D_x^{(a)}}. \tag{97}$$

Die Durchführung dieser Formel erfordert die diskontierten Zahlen der Aktiven, die Invaliditätswahrscheinlichkeiten und die Invalidenrenten für die Jahresmitten.

Ein anderes Verfahren besteht in folgendem. Aus $l_x^{(a)}$ Aktiven des Alters x gehen auf der Altersstufe $(x+n,\ x+n+1)$ J_{x+n} Invalide hervor; demnach ist

$$\frac{J_{x+n}}{l_x^{(a)}}$$

die Wahrscheinlichkeit, auf dieser Altersstufe in den Stand der Invaliden überzugehen. Die Invalidenrente, in deren Bezug (x) in diesem Falle gelangt, kann mit ${}^i a_{x+n+1}$ bewertet werden, wenn man annimmt, daß der Beginn der Rente auf den Anfang des der Invalidisierung folgenden Versicherungsjahres falle[1]). Der diskontierte Wert dieser Anwartschaft beträgt

$$v^{n+1}\frac{J_{x+n}}{l_x^{(a)}}\,{}^i a_{x+n+1} = \frac{v^{x+n+1}J_{x+n}}{D_x^{(a)}}\,{}^i a_{x+n+1};$$

er schreibt sich, wenn man die Produkte

$$v^{x+1}J_x = I_x \tag{98}$$

als „diskontierte Zahlen der Invaliden" einführt, kürzer:

$$\frac{I_{x+n}\,{}^i a_{x+n+1}}{D_x^{(a)}}.$$

Die Summe aller so gebildeten Ausdrücke von $n=0$ aufwärts gibt

$${}^{ai}a_x = \frac{\sum\limits_0 I_{x+n}\,{}^i a_{x+n+1}}{D_x^{(a)}}. \tag{99}$$

Um die Invaliditätsrenten nach dieser Formel zu rechnen, braucht man die diskontierten Zahlen der Aktiven und der Invaliden und die Invalidenrenten.

Tafel VI enthält die Kolonne der I_x, Tafel VII die Kolonne der lebenslänglichen Invaliditätsrenten ${}^{ai}a_x$.[2]) Braucht man kurze Renten dieser Art, so ist die Summe im Zähler von (99) mit den entsprechend abgekürzten Invalidenrenten zu bilden.

Nach den Grundlagen jener Tafeln hat beispielsweise die lebenslängliche Invaliditätsrente eines 30-jährigen Aktiven den Wert

$${}^{ai}a_{30} = 2{,}281993.$$

1) Bei der geringen Änderung der Invalidenrente mit dem Alter führt diese Annahme gegenüber der früheren zu sehr wenig abweichenden Resultaten.

2) Entnommen der bereits zitierten Schrift von O. Dietrichkeit.

242. Kapitalversicherung für den Invaliditätsfall. Das Kapital 1 werde fällig am Ende jenes Versicherungsjahres, in welchem die aktive Person (x) invalid wird.

Der Wert dieser Versicherung, ${}^{ai}A_x$, ist analog einer Todesfallversicherung, mit dem Unterschiede, daß an die Stelle der Zahlen d_x der Gestorbenen die Zahlen J_x der invalid Gewordenen treten. Man hat also:

$$ {}^{ai}A_x = \frac{I_x + I_{x+1} + I_{x+2} + \cdots}{D_x^{(a)}}. \tag{100}$$

Mit den Daten der Tafel VI berechnet sich beispielsweise

$$ {}^{ai}A_{70} = \frac{517,3506}{735,726} = 0,70318.$$

II. Abschnitt. Prämien.

§ 1. Einmalige und Jahresprämien.

243. Allgemeine Kennzeichnung des Versicherungsgeschäftes. Das Versicherungsgeschäft besteht in einem Austausch von Versicherungswerten gegen Barwerte oder von Versicherungswerten gegeneinander. Von Nebenumständen abgesehen liegt dem Geschäfte als *oberstes Prinzip* die *Gleichwertigkeit der Tauschobjekte* zugrunde.

Der *Versicherer* gewährt die Versicherung, worunter Anwartschaften jeglicher Art verstanden werden sollen, gegen einmalige oder fortgesetzte *Prämienzahlung* des *Versicherungsnehmers.*

Über den abgeschlossenen *Versicherungsvertrag* wird dem Versicherungsnehmer eine Urkunde, die *Police*, ausgestellt, welche die beiderseitigen Verpflichtungen genau feststellt und die *Bedingungen* angibt, unter welchen der Vertrag bis zu seiner Abwicklung aufrecht bleibt.

Die *Haupt*bestimmung der Prämienzahlungen der Versicherungsnehmer besteht darin, die Mittel aufzubringen, welche den Versicherer zur Einlösung aller übernommenen *Versicherungs*verpflichtungen in den Stand setzen.

Außerdem aber haben sie mehrere *Neben*bestimmungen zu erfüllen, als die Deckung der mit dem Abschlusse und der dauernden Verwaltung der Versicherung verbundenen Kosten, die Bildung verschiedener Rücklagen, dazu bestimmt, das Unternehmen gegenüber den unvermeidlichen Fluktuationen der maßgebenden Faktoren sicher zu stellen, endlich unter Umständen die Erzielung eines Gewinnes.

Der Anteil der Prämie, welcher der Hauptbestimmung dient, heißt *Nettoprämie*; seine Ermittelung ist, sobald einmal die Grundlagen gewählt sind, eine rein versicherungsmathematische Aufgabe.

Der den Nebenbestimmungen dienende Anteil der gezahlten Prämien heißt kurzweg *Zuschlag*; er wäre zu gliedern in einen Zuschlag für die *ersten* Unkosten (Akquisitionskosten: Abschlußprovision, ärztliche Untersuchung, Ausfertigung der Police), einen für die *dauernden* Unkosten (Regiekosten: Inkasso, Verwaltung, Steuern) und einen dritten zur Bildung von Rücklagen (Extrafonds: Sicherheitsfonds, Kursschwankungsfonds etc.). Bei der Feststellung der Zuschläge kommen neben versicherungstechnischen auch kommerzielle Rücksichten zur Geltung; eine allgemein giltige Theorie ihrer Bemessung kann daher nicht gegeben werden.

Die um den Zuschlag erhöhte Nettoprämie heißt *Brutto-* oder *Tarifprämie*; sie ist in den Tarifen verzeichnet, auf Grund deren die Verträge abgeschlossen werden.

Aus den Prämien und etwaigen Policengebühren, ferner aus den durch Veranlagung disponibler Summen (in Wertpapieren, Immobilien, Hypothekardarlehen, Darlehen auf die eigenen Policen etc.) erzielten Zinserträgen setzen sich die *Einnahmen* einer Versicherungsunternehmung zusammen. Die *Ausgaben* bestehen der Hauptsache nach in den ausgezahlten Versicherungssummen, den Verwaltungsauslagen im weitesten Sinne und in der eventuellen Gewinnausschüttung.

Quellen des *Gewinnes* (oder auch des Verlustes) liegen in der Wahl der Grundlagen: Sterbetafeln od. dgl. und Zinsfuß, und in der Bemessung der Zuschläge.

244. Netto- und Bruttoprämien. Der Zusammenhang zwischen der versicherungstechnisch festgesetzten Nettoprämie P und der Bruttoprämie P' wird in der Regel eine der folgenden Formen aufweisen:

$$P' = P(1 + \varkappa) \tag{1}$$

$$P' = P + c \tag{2}$$

$$P' = P(1 + \varkappa) + c. \tag{3}$$

Im Falle (1) ist der Zuschlag $\varkappa P$ zur Nettoprämie dieser selbst proportional und beträgt $100\varkappa$ Prozent derselben. Im Falle (2) ist er von der Höhe der Nettoprämie unabhängig. Im Falle (3), wo er $\varkappa P + c$ beträgt, setzt er sich aus einem der Nettoprämie proportionalen und einem konstanten Teile zusammen.

Die Größen $\varkappa$, c werden im allgemeinen vom Beitrittsalter abhängig sein, etwa so, daß sie mit größeren Altersabschnitten variieren.

Häufig drückt man den Zuschlag als Bruchteil der Bruttoprämie aus; alsdann schreibt sich der Zusammenhang zwischen ihr und der Nettoprämie:

$$P' = P + \alpha P', \tag{4}$$

ein Ansatz, der mit jenem (1) übereinstimmt, und zwar ist dann

$$\varkappa = \frac{\alpha}{1 - \alpha}.$$

Bei der Wertbestimmung des Faktors α sollte derselbe in zwei Teile, α_1, α_2, zerlegt werden, derart, daß $\alpha_1 P$ die ersten, $\alpha_2 P$ die dauernden Unkosten deckt[1]). Die Praxis pflegt sich an diese Unterscheidung nicht zu halten und den Zuschlag als Ganzes in der Regel in Prozenten der Nettoprämie nach gewissen Erfahrungsgrundsätzen festzustellen. Bei Aktiengesellschaften gestaltet sich der Zuschlag bei ein und derselben Versicherungsart verschieden, je nachdem die Versicherung mit oder ohne Beteiligung an dem erzielten Gewinne abgeschlossen wird.

Die Bestimmung der Nettoprämien erfolgt in der Weise, daß sie in ihrer Gesamtheit und bei fortgesetzter Verzinsung nach dem zugrunde gelegten Zinsfuße gerade ausreichen, die successive fällig werdenden Versicherungssummen auszuzahlen, vorausgesetzt, daß die versicherten Massenerscheinungen genau so verlaufen, wie es den adoptierten statistischen Grundlagen (Sterbetafeln, Invaliditätstafeln etc.) entspricht.

Eine anhaltende Abweichung von diesem Verlaufe kann, je nach der Versicherungsart, die Gebarung in einem für die Unternehmung günstigen oder ungünstigen Sinne beeinflussen. So wird, wenn das Absterben rascher, mit stärkerer Intensität vor sich geht, als es der Tafel entspricht, wenn also *Übersterblichkeit* anhält, die Todesfallversicherung ungünstig beeinflußt sein, weil die Summen rascher fällig werden, als die Rechnung es annimmt; für die Rentenversicherung dagegen wäre eine solche Erscheinung günstig, weil sie gegenüber der Rechnung ein rascheres Ablaufen der Renten zur Folge hätte. Gerade umgekehrte Wirkungen würde *Untersterblichkeit* äußern.

Es wäre eine Wahl der statistischen Grundlagen denkbar, die die Anbringung von Zuschlägen an den Nettoprämien entbehrlich machte, indem der aus den (günstigen) Abweichungen fließende Gewinn zur Deckung aller übrigen Erfordernisse ausreichte. Praktisch wird dies aber nicht geübt; vielmehr erfolgt die Wahl zwar mit Vorsicht, aber doch so, daß der wirkliche Verlauf dem rechnungsmäßigen möglichst nahe kommt.

245. Einmalige Prämie. Der Versicherungsnehmer kann eine Versicherung dadurch erwerben, daß er gleich beim Abschluß den ihr entsprechenden Betrag erlegt, der als *einmalige Prämie* bezeichnet wird. Man nennt diesen Vorgang auch die *kapitalische Begründung* einer Versicherung.

Außer dieser praktischen Bedeutung kommt der einmaligen Prämie in der ganzen Versicherungsrechnung große Wichtigkeit zu.

1) Vgl. G. Bohlmann, Encykl. der mathemat. Wissensch. I, p. 889 ff.; C. Landré, Mathem.-techn. Kapitel etc., p. 161 ff.

Wenn im folgenden von Prämie kurzweg gesprochen wird, so soll darunter die Nettoprämie verstanden werden.

Diese Bemerkung vorausgeschickt, kann der fundamentale Satz ausgesprochen werden:

Die einmalige Prämie für eine Versicherung ist dem Werte der letzteren gleich.

Mit der im ersten Abschnitte erfolgten Bestimmung der *Versicherungswerte* ist demnach auch schon die Berechnung der ***einmaligen Prämien*** erledigt.

Es ist also beispielsweise die einmalige Prämie:

1) für eine auf n Jahre lautende Erlebensversicherung der Person (x):

$$_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

[Nr. 207, (3)];

2) für eine sofort beginnende Postnumerando-Leibrente:

$$_1\,a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

[Nr. 209, (7)];

3) für eine nach n Jahren beginnende, dann bis zum Ableben währende Rente:

$$_n\,a_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

[Nr. 210, (8)];

4) für eine lebenslängliche Todesfallversicherung:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

[Nr. 214, (18)]; hierbei ist Auszahlung am Ende des Sterbensversicherungsjahres vorausgesetzt; bei sofortiger — d. h. baldmöglichster — Liquidierung sollte die Prämie $A_x\left(1 + \frac{i}{2}\right)$ betragen [Nr. 225, (49)]. Indessen wird die Todesfallversicherung auch dann mit dem obigen Betrage bewertet, wenn sie in kürzester Frist ausbezahlt wird; der dadurch entstehende Ausfall wird aus den Zuschlägen gedeckt. Französische Gesellschaften nehmen $A_x(1 + i)$ statt A_x, rechnen also so, als ob die Auszahlung am Beginne des Versicherungsjahres erfolgte, in welchem der Tod eintritt[1]).

5) Für eine gemischte Versicherung mit der Distanz von n Jahren ist die einmalige Prämie

$$A_{x,\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

[Nr. 217, (30)].

1) G. Bohlmann, Encykl. d. mathemat. Wissensch. I, p. 880.

An dem Beispiele der lebenslänglichen Todesfallversicherung wird nachstehend ziffermäßig dargetan, daß der durch die einmaligen Prämien gebildete Fonds mit seinen Zinsen gerade ausreicht, um alle Versicherungsverpflichtungen zu decken. Der Tabelle liegt die Tafel III zugrunde. Es wird angenommen, daß 1273 Personen des Alters von 90 Jahren (so viele führt die Tafel bei diesem Alter an) sich auf das Kapital 1 gegen Einzahlung der aus diesen Grundlagen berechneten einmaligen Prämie 0,90981 versichern. Der so gebildete Fonds per 1158,19 trägt, zu $3\frac{1}{2}\%$ angelegt, bis zum Schlusse des ersten Versicherungsjahres 40,53 an Zinsen, erreicht also die Höhe 1198,72; dadurch, daß nun für die in diesem Jahre vorgefallenen 402 Todesfälle die Versicherungssumme ausbezahlt wird, sinkt er auf 796,72, den Fonds am Beginne des zweiten Jahres. So geht dies fort; am Ende des zwölften Jahres ist der Fonds auf 1 reduziert, mit welchem Betrage die Versicherungssumme für den letzten Todesfall gedeckt ist; nach ihrer Auszahlung ist der Fonds zur Gänze erschöpft.

Gebarung einer Todesfallversicherung, abgeschlossen von 1273 Personen im Alter von 90 Jahren auf das Kapital 1 gegen Einzahlung der einmaligen Prämie 0,90981.

Versicherungsjahr	Fonds am Beginn	Zinsen	Fonds am Ende	Schadenzahlung	Rest
1	1158,19	40,53	1198,72	402	796,72
3	796,72	27,88	824,60	296	528,60
3	528,60	18,50	547,10	209	338,10
4	338,10	11,83	349,93	144	205,93
5	205,93	7,21	213,14	93	120,14
6	120,14	4,20	124,34	58	66,34
7	66,34	2,32	68,66	34	34,66
8	34,66	1,23	35,39	18	17,89
9	17,89	0,63	18,52	10	8,52
10	8,52	0,31	8,83	5	3,83
11	3,83	0,14	3,97	3	0,97
12	0,97	0,03	1,00	1	0,00
		114,81		1273	

Anfänglicher Fonds:	1158,19
Zugewachsene Zinsen:	114,81
Summe:	1273,00.

Bei der einmaligen Prämie muß der Zuschlag für die dauernden Unkosten so bemessen werden, daß er für die ganze Versicherungsdauer ausreicht.

249. Jährliche Prämienzahlung. Die üblichste Form der Begründung einer Versicherung besteht in der fortgesetzten Zahlung einer festen *Jahresprämie P,* entweder bis zum Tode des Versicherungsnehmers oder längstens durch eine im voraus festgesetzte Reihe

von Jahren. Dabei wird angenommen, daß die Prämie am Beginne jedes Versicherungsjahres, in welchem sie fällig ist, voll zur Einzahlung kommt.

Der *Wert der Prämienzahlung* ist dann gleich dem Werte einer pränumerando zahlbaren (lebenslänglichen oder kurzen) Rente vom Jahresbetrage P, also Pa, wenn a der Wert der Rente vom Jahresbetrage 1 ist.

Ist A der *Wert der* betreffenden *Versicherung*, so muß dem obersten Grundsatze gemäß

$$Pa = A$$

sein; daraus ergibt sich die jährliche Prämie:

$$P = \frac{A}{a}. \tag{5}$$

Ihre Bestimmung kommt also im Wesen auf die Division zweier Versicherungswerte hinaus. Gleich wie die einmalige, so läßt auch die Jahresprämie bei vielen Versicherungsarten eine Darstellung lediglich durch Renten zu.

247. Jahresprämie für die lebenslängliche Todesfallversicherung. Als Beispiel einer eingehenderen Darstellung des Wesens der jährlichen Prämienzahlung möge die vollständige Todesfallversicherung auf das Kapital 1 erörtert werden; es soll dabei an den normalen Fall der Auszahlung — am Ende des Sterbeversicherungsjahres — gedacht werden.

Die sofort beginnende, bis zum Ableben währende Prämienzahlung ist eine vorschüssige Rente vom Betrage der Prämie, ihr Wert also $P_x a_x$, wenn x das Alter der versicherten Person ist. Durch Vergleichung mit dem Werte A_x der Versicherung erhält man, der allgemeinen Formel (5) entsprechend,

$$P_x = \frac{A_x}{a_x}. \tag{6}$$

Drückt man A_x ebenfalls durch die Rente nach Nr. 213, (15) aus, so ergibt sich die Formel

$$P_x = \frac{1}{a_x} - d, \tag{7}$$

die zur praktischen Ausführung besonders geeignet ist: man hat von den reziproken Pränumerando-Leibrenten den Diskont zu subtrahieren.

Die Formel (7) und die soeben angewendete

$$A_x = 1 - d a_x \tag{7*}$$

weisen das Bemerkenswerte auf, daß sie keine der Sterbetafel entnommene Größe enthalten und daher einen für alle Sterbetafeln giltigen Zusammenhang zwischen a_x, A_x, P_x darstellen, so daß, wenn

die erste der drei Größen und der Zinsfuß gegeben sind, die beiden andern ohne Rücksicht auf das Alter durch rein arithmetische Operationen zu finden sind. Auf diesen Sachverhalt gründen sich William Orchards 1856 veröffentlichte Tafeln, deren eine zu jeder Rente die einmalige Prämie A_x, die andere zu jeder Rente die Jahresprämie P_x zu bestimmen gestattet für die gangbaren Prozentsätze; diese Tafeln sind bei *allen* statistischen Grundlagen anwendbar[1]).

Man kann sich den Zusammenhang zwischen einmaliger und jährlicher Prämienzahlung auch in folgender Weise veranschaulichen. Die Person (x) sollte, um für ihren Todesfall das Kapital 1 zu versichern, A_x auf einmal erlegen; sie kann sich statt dessen verpflichten, am Beginne jedes Versicherungsjahres den jährlichen Zins von A_x *voraus* zu entrichten, dessen Betrag dA_x ist, A_x selbst aber von der versicherten Summe bei deren Auszahlung in Abzug bringen zu lassen. Dann ist (x) durch die jährliche Prämie dA_x auf das Kapital $1 - A_x$ versichert, und es bleibt nur die Frage nach der jährlichen Prämie P_x zu beantworten, durch welche (x) die Versicherung auf das Kapital 1 erlangt; diese aber ergibt sich aus der Proportion:

$$P_x : dA_x = 1 : (1 - A_x),$$

aus welcher

$$P_x = \frac{dA_x}{1 - A_x}$$

folgt; dies geht aber in (6) über, wenn man beachtet, daß nach (7*) $1 - A_x = da_x$ ist.

Das folgende, dem in Nr. 245 vorgeführten analoge Beispiel bringt ziffermäßig den Nachweis, daß die successive eingezahlten Jahresprämien nebst ihren fortlaufenden Zinsen wirklich ausreichen, um die versicherten Summen zu decken. Als Grundlage dienen die Daten von Tafel III. 1273 Personen im Alter von 90 Jahren schließen gleichzeitig Todesfallversicherungen gegen die jährliche Prämie 0,34116 ab; der durch die erste Einzahlung entstandene Fonds per 434,30 wächst im Laufe des ersten Jahres um die $3\frac{1}{2}\%$-igen Zinsen per 15,19 auf 449,49 an, vermindert sich aber am Schlusse desselben durch die Auszahlung von 402, verursacht durch die 402 Todesfälle dieses Jahres, auf 47,50. Dies der Anfangsfonds des zweiten Jahres, der sich sofort durch die Einzahlungen der 871 Überlebenden auf 344,65 und dann im Laufe des Jahres um die Zinsen auf 356,71 erhöht, um sodann durch die Auszahlungen auf 60,71 zu sinken u. s. f. Am Schlusse des zwölften Jahres ist der Fonds auf 1 reduziert und reicht nun gerade hin, den letzten Todesfall auszuzahlen.

---

1) Vgl. Text-Book II, p. 147 ff.

Gebarung einer Todesfallversicherung, abgeschlossen von 1273 Personen im Alter von 90 Jahren auf das Kapital 1 gegen Zahlung der jährlichen Prämie 0,34116.

Versicherungsjahr	Fonds am Beginn	Prämieneinnahme	Zusammen	Zinsen	Fonds am Schlusse	Schadenzahlung	Rest
1	0,00	434,30	434,30	15,19	449,49	402	47,50
2	47,50	297,15	344,65	12,06	356,71	296	60,71
3	60,71	196,17	256,88	8,98	265,86	209	56,86
4	56,86	124,87	181,73	6,36	188,09	144	44,09
5	44,09	75,74	119,83	4,19	124,02	93	31,02
6	31,02	44,01	75,03	2,63	77,66	58	19,66
7	19,66	24,22	43,88	1,54	45,42	34	11,42
8	11,42	12,62	24,04	0,84	24,88	18	6,88
9	6,88	6,48	13,36	0,47	13,83	10	3,83
10	3,83	3,07	6,90	0,24	7,14	5	2,14
11	2,14	1,37	3,51	0,12	3,63	3	0,63
12	0,63	0,34	0,97	0,03	1,00	1	0,00
		1210,34		52,66		1273	

Prämieneinnahme:	1210,34
Zugewachsene Zinsen:	52,66
Summe:	1273,00.

Wenn ein anderer Liquidationsmodus des versicherten Kapitales als der normale vereinbart ist, so sollte die Jahresprämie eine Abänderung — Erhöhung — erfahren; doch wird hiervon meist Umgang genommen [s. Nr. 245, 4)]. Nur zur Beurteilung des Einflusses seien einige Zahlwerte angeführt. Bei jährlicher, semestraler, sofortiger Auszahlung beträgt die Jahresprämie für eine 35-jährige Person nach Tafel III (s. Nr. 224—225) beziehungsweise

0,02068, 0,02086, 0,02104,

so daß bei 1000 ℳ versichertem Kapital eine Prämie von

20 ℳ 68 ₰, 20 ℳ 86 ₰, 21 ℳ 4 ₰

zu zahlen wäre.

248. Einige Beispiele von Jahresprämien. Das in Nr. 246 erläuterte allgemeine Prinzip der Bestimmung der jährlichen Prämie wird im nachfolgenden auf einige wichtige Versicherungsformen zur Anwendung gebracht.

1) *Jahresprämie für eine um n Jahre aufgeschobene Leibrente 1, zahlbar während der Aufschubzeit (Altersrente).*

Der Wert der Versicherung ist

$$_{n}a_x = \frac{N_{x+n}}{D_x},$$

der Wert der Prämien

$$P_x \cdot {}_{|n}a_x = P_x \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x};$$

daraus ergibt sich

$$P_x = \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}. \tag{8}$$

Beispielsweise ist nach Tafel III

$$_{|30}P_{30} = \frac{80\,839{,}8}{621\,199 - 80\,839{,}8} = 0{,}15242,$$

so daß für eine Rente von 500 ℳ durch 30 Jahre 76 ℳ 21 ₰ jährlich zu zahlen wären.

2) *Jahresprämie für eine Erlebensversicherung.*

Ist (x) auf das Kapital 1, zahlbar nach n Jahren im Erlebensfalle, versichert, so ist

$$_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

der Wert dieser Versicherung; soll die jährliche Prämie P_x durch die Versicherungsdauer gezahlt werden, so ist der Wert hiervon

$$P_x \cdot {}_{|n}a_x = P_x \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x};$$

folglich ist

$$P_x = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}. \tag{9}$$

Beispielsweise hat man nach Tafel III

$$_{10}P_{20} = \frac{81\,953}{1\,025\,625 - 621\,199} = 0{,}079008;$$

für ein Kapital von 10000 ℳ wäre also durch 10 Jahre die jährliche Prämie von 790 ℳ 8 ₰ zu bezahlen. Legte die Person die Prämien, statt sie in der Versicherungsanstalt einzuzahlen, in einer Sparkasse auf Zinseszins an, so erhielte sie bei Vollendung des 30. Lebensjahres 9592,75 ℳ; durch die Versicherung sind also 417,25 ℳ gewonnen.

3) *Jahresprämie für eine Todesfallversicherung bei abgekürzter Prämienzahlung.*

Soll die Prämienzahlung bei dem Alter t aufhören, so steht dem Werte

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

der Versicherung der Wert der Prämienzahlung:

$$P_x \cdot {}_{t-x}a_x = \frac{N_x - N_t}{D_x} P_x$$

gegenüber; die erforderliche Prämie ist also

$$P_x = \frac{M_x}{N_x - N_t}. \tag{10}$$

Für einen 35-jährigen z. B. beträgt dies, wenn die letzte Prämie bei Antritt des 70. Jahres gezahlt werden soll, nach Tafel III

$$_{|35}P_{35} = \frac{9805{,}72}{474\,131 - 25\,527{,}8} = 0{,}02186,$$

so daß bei 1000 ℳ versichertem Kapital die jährliche Prämie 21 ℳ 86 ₰ ausmacht (vgl. Schluß von Nr. 247).

4) *Jahresprämie für eine Todesfallversicherung bei n-jähriger Karenz und lebenslänglicher Prämienzahlung.*

Der Wert der Versicherung ist

$$_{n|}A_x = \frac{M_{x+n}}{D_x},$$

der Wert der Prämienzahlung

$$P_x \cdot a_x = \frac{N_x}{D_x} P_x;$$

mithin ist

$$P_x = \frac{M_{x+n}}{N_x}. \tag{11}$$

Bei 10-jähriger Karenz ist beispielsweise nach Tafel III:

$$P_{35} = \frac{7769{,}37}{474\,131} = 0{,}01639.$$

5) *Jahresprämie für eine kurze Todesfallversicherung, zahlbar bis zum Tode, längstens durch die Versicherungsdauer.*

Beträgt diese n Jahre, so ist

$$_{|n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

der Wert der Versicherung und

$$P_x \cdot {}_{|n}a_x = P_x \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

der Wert der Prämienzahlung; daraus folgt

$$P_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}. \tag{12}$$

Bei dieser Versicherung kommt das Kapital, wenn der Tod innerhalb n Jahren erfolgt, am Ende des Sterbejahres zur Auszahlung.

Die Versicherung kann aber auch so abgeschlossen werden, daß das Kapital zu *bestimmtem Termin*, also nach n Jahren ausgefolgt wird, vorausgesetzt, daß die versicherte Person vorher starb. Unter *dieser* Voraussetzung ist der Wert der Versicherung

$$v^n(1 - {}_np_x) = \frac{v^n D_x - D_{x+n}}{D_x},$$

der Wert der Prämienzahlung derselbe wie vorhin, die Prämie also

$$P_x = \frac{v^n D_x - D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}. \tag{13}$$

6) *Jahresprämie für eine gemischte Versicherung.*

Die Versicherungsdauer betrage n Jahre, und dies sei auch die längste Dauer der Prämienzahlung. Laut Nr. 217 ist

$$A_{x,\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} = 1 - d_{|n}a_x$$

der Wert der Versicherung, jener der Prämienzahlung beträgt

$$P_x \cdot {}_{|n}a_x = P_x \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x};$$

die Prämie hat also den Ausdruck

$$P_x = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \tag{14}$$

oder

$$P_x = \frac{1}{{}_{|n}a_x} - d. \tag{15}$$

In der ersten Form erscheint sie als Summe der Prämien für eine kurze Todesfallversicherung und eine Erlebensversicherung; die erste Komponente hätte eine Abänderung zu erfahren, wenn im Todesfalle das Kapital sofort zur Auszahlung käme; man sollte dann die Prämie mit

$$P_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x + N_{x+n}}(1+i)^{\frac{1}{2}} + \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

bemessen; indessen wird hiervon wie bei der reinen Todesfallversicherung abgesehen.

Tafel V enthält in der Kolonne P die Jahresprämien für die gemischte Versicherung zu den Schlußaltern 55, 60, 65, 70, 80 auf Grund der Sterbetafel M und WI der 23 deutschen Gesellschaften und des Zinsfußes $3\frac{1}{2}\,\%$. Es hat beispielsweise eine 30-jährige Person, welche die Versicherung auf 1000 ℳ zum 65. Lebensjahre abschließt, 23,2 ℳ an jährlicher Prämie zu zahlen.

7) *Jahresprämie für eine Versicherung mit bestimmter Verfallzeit.*

Nach Nr. 218 ist der Wert einer derartigen, auf n Jahre abgeschlossenen Versicherung

$$A_{\overline{n|}} = v^n;$$

wird jährliche Prämienzahlung bis zum Tode oder längstens durch n Jahre bedungen, so ist deren Wert

$$P_x \cdot {}_{|n}a_x = P_x \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x};$$

die Prämie hat also zu betragen

$$P_x = \frac{v^n D_x}{N_x - N_{x+n}}. \tag{16}$$

Diese Versicherung ist die Umkehrung der Versicherung auf eine kurze Rente gegen einmalige Prämie, nur daß letztere von der Versicherungsanstalt und am Schlusse der Versicherungsdauer gezahlt wird.

8) *Prämie für eine gegenseitige Überlebensrente, zahlbar durch die Dauer der Verbindung.*

Der Wert der Rente für die Verbindung (x), (y) ist (Nr. 229)

$$a_{\overline{xy}}^{[1]} = a_x + a_y - 2a_{xy},$$

der Wert der Prämienzahlung

$$P \cdot a_{xy},$$

die Jahresprämie also

$$P = \frac{a_x + a_y}{a_{xy}} - 2. \tag{17}$$

Nach dem in der zitierten Nummer gerechneten Beispiel ist

$$a_{30,45} = 14{,}023$$
$$a_{30} = 19{,}441$$
$$a_{45} = 15{,}706,$$

folglich

$$P = \frac{35{,}147}{14{,}023} - 2 = 0{,}50638.$$

9) *Jahresprämie für eine einseitige Überlebensrente, zahlbar durch die Dauer der Verbindung (Witwen- und Waisenpension).*

Aus dem Werte der Rente:

$$a_{y|x} = a_x - a_{xy}$$

und dem gleichen Werte der Prämienzahlung wie vorhin berechnet sich die jährlich zu zahlende Prämie

$$P = \frac{a_x}{a_{xy}} - 1. \tag{18}$$

Ein Ehepaar, der Mann 45, die Frau 30 Jahre alt, hätte also durch die Zeit seines Zusammenlebens eine jährliche Prämie von

$$P = 800\left(\frac{19{,}441}{14{,}023} - 1\right) = 800 \cdot 0{,}38636 = 309{,}09 \text{ ℳ}$$

zu erlegen, damit der Frau nach dem eventuell früher erfolgenden Tode des Mannes eine Leibrente von 800 *M* zufalle.

10) *Jahresprämie für eine gegenseitige Überlebensversicherung, zahlbar durch die Dauer der Verbindung.*

Aus dem Werte

$$A_{xy} = 1 - d a_{xy}$$

der Versicherung [Nr. 233, (69)] und dem Werte

$$P a_{xy}$$

der Prämienzahlung folgt

$$P = \frac{1}{a_{xy}} - d. \tag{19}$$

11) *Jahresprämie für eine einseitige Überlebensversicherung, zahlbar durch die Dauer der Verbindung.*

Nach der in Nr. 237 entwickelten Näherungsformel (76) wäre

$$A_{\overset{1}{x}y} = 1 + \frac{D_{y+1}}{D_y} a_{x,y+1} - a_{xy}$$

der Wert der Versicherung, dem $P a_{xy}$ als Wert der Prämienzahlung gegenübersteht; daraus ergibt sich

$$P = \frac{1}{a_{xy}} + \frac{D_{x+y}}{D_y} \frac{a_{x,y+1}}{a_{xy}} - 1. \tag{20}$$

Benützt man aber die strenge Formel (77) für $A_{\overset{1}{x}y}$, so wird

$$P = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a_{xy}} - d + \frac{a_{x-1,y} - 1}{p_{x-1} a_{xy}} - \frac{a_{x,y-1} - 1}{p_{y-1} a_{xy}}\right]. \tag{21}$$

Dem an der angezogenen Stelle gerechneten Falle zufolge ergäbe sich als Jahresprämie für die Verbindung einer 35-jährigen mit einer 25-jährigen Person, wenn das Kapital 1 am Ende des Sterbejahres der ersten zur Auszahlung kommen soll, falls die zweite sie überlebt, nach Formel (20):

$$P = \frac{0{,}223}{16{,}264} = 0{,}013711,$$

nach Formel (21):

$$P = \frac{0{,}236}{16{,}264} = 0{,}014510.$$

12) *Jahresprämie für eine Invaliditätsrente, zahlbar durch die Dauer der Aktivität.*

In Nr. 241, (99) ist der Wert der Invaliditätsrente für einen x-jährigen Aktiven mit

$${}^{ai}a_x = \frac{\sum\limits_0 I_{x+n}\, {}^{i}a_{x+n+1}}{D_x^{(a)}}$$

bestimmt worden; der Wert der Prämienzahlung ist nach Formel (92) in Nr. 239 durch

$$P_x \cdot {}^a a_x = P_x \frac{N_x^{(a)}}{D_x^{(a)}}$$

bestimmt; daraus berechnet sich

$$P_x = \frac{\sum\limits_0 I_{x+n}\, {}^i a_{x+n+1}}{N_x^{(a)}}. \tag{22}$$

Sind die Invaliditäts- und die Aktivitätsrenten selbst gegeben, so ergibt sich P_x mittels Division von ${}^{ai}a_x$ durch ${}^a a_x$. Mit Hilfe der Tafeln VI und VII findet man beispielsweise die zur Begründung einer Invaliditätsrente von 600 ℳ erforderliche Jahresprämie eines 30-jährigen Aktiven:

$$P_{30} = 600 \cdot \frac{2{,}281993}{16{,}95153} = 600 \cdot 0{,}13462 = 80{,}77 \text{ ℳ}.$$

249. Unterjährige Prämienzahlung. Um dem Versicherungsnehmer die Abtragung seiner Verpflichtung gegenüber dem Versicherer noch weiter zu erleichtern, wird die ratenweise Bezahlung der Jahresprämie gewährt; allerdings erfordert dies eine Erhöhung der jährlichen Zahlung gegenüber der normalen Jahresprämie, die unter der Voraussetzung gerechnet ist, daß sie jedesmal am Beginne des Versicherungsjahres voll erlegt wird.

Betrachtet man z. B. bei der Todesfallversicherung die im Sterbejahre noch nicht bezahlten Prämienraten als *gestundet* und bringt sie bei Auszahlung des versicherten Kapitales in Abzug, so besteht die einzige Folge der unterjährigen Prämienzahlung in einem Zinsverlust, der durch eine entsprechende Erhöhung der jährlichen Zahlung hereingebracht werden muß.

Es sei P die normale, $P^{(m)}$ die in m gleichen Raten zahlbare Jahresprämie. Die letztere ergibt sich aus der Erwägung, daß die auf den Jahresbeginn diskontierten Raten zusammen die normale Prämie P ergeben müssen; die Diskontierung vollzieht man dabei zu einem höheren Zinsfuße i' als demjenigen, der sonst zur Grundlage genommen ist. Man hat also den Ansatz:

$$P = \frac{P^{(m)}}{m}\left[1 + v'^{\frac{1}{m}} + v'^{\frac{2}{m}} + \cdots + v'^{\frac{m-1}{m}}\right]$$

$$= \frac{P^{(m)}}{m} \frac{1 - v'}{1 - v'^{\frac{1}{m}}} = \frac{P^{(m)}}{m} \frac{d'(1+i')^{\frac{1}{m}}}{(1+i')^{\frac{1}{m}} - 1}$$

$$= P^{(m)} \frac{d'(1+i')^{\frac{1}{m}}}{j'_{(m)}},$$

aus welchem sich

$$P^{(m)} = \frac{j'_{(m)}}{d'(1+i')^{\frac{1}{m}}} P \tag{23}$$

ergibt. Bei Anrechnung von 6 % Verzugszinsen wegen der ratenweisen Prämienzahlung liefert diese Formel die Ansätze:

$$\begin{aligned} P^{(2)} &= 1{,}015\,P, \\ P^{(4)} &= 1{,}022\,P, \\ P^{(12)} &= 1{,}026\,P, \\ \overline{P} = P^{(\infty)} &= 1{,}029\,P; \end{aligned} \tag{24}$$

es variiert also der Zuschlag zur normalen Prämie zwischen $1\frac{1}{2}$ und 3 % der letzteren.

Um beispielsweise in strenger Rechnung die in Vierteljahrsraten zahlbare Prämie zu finden, die eine 35-jährige Person für die lebenslängliche Todesfallversicherung auf 10 000 ℳ bei sofortiger Liquidierung des Kapitales zahlen müßte, hat man die am Schlusse von Nr. 247 mit 210 ℳ 40 ₰ ermittelte normale Prämie mit 1,022 zu multiplizieren; dies gibt 215 ℳ 03 ₰. Das wäre die Nettoprämie; wird auf diese ein 12 %-iger Zuschlag erhoben, so beträgt die Jahresbruttoprämie 240 ℳ 83 ₰, die Quartalsrate also 60 ℳ 21 ₰.

Man kann die unterjährige Prämienzahlung auch in dem Sinne verstehen, daß in jenem Jahre, in welchem der Tod, die Invalidität od. dgl. eintritt, nur die vor diesem Ereignis fälligen Raten bezahlt werden; die Prämienzahlung ist dann als eine an die Anstalt gezahlte *m*-tel-Rente zu behandeln. Hiernach ist die in *m* Raten zahlbare Jahresprämie für eine Todesfallversicherung:

$$P_x^{(m)} = \frac{A_x}{a_x^{(m)}}, \tag{25}$$

für eine Invaliditätsversicherung:

$$P_x^{(m)} = \frac{{}^{ai}a_x}{{}^{a}a_x^{(m)}}. \tag{26}$$

Als erstes Beispiel für derlei strenge Rechnungen diene die Bestimmung der quartaliter zahlbaren Jahresprämie, die eine 35-jährige Person für eine Todesfallversicherung per 10 000 ℳ zu zahlen hätte, wenn das Kapital unmittelbar nach dem Ableben zu liquidieren ist; als Grundlage soll Tafel III verwendet werden.

Es ist für das Kapital 1

$$P_{35}^{(4)} = \frac{\overline{A}_{35}}{a_{35}^{(4)}};$$

nun hat man nach Nr. 225, (49):

$$\overline{A}_{35} = 1{,}0175\,A_{35} = 1{,}0175 \cdot 0{,}37949 = 0{,}38613,$$

und nach Nr. 220, (39):

$$a_{35}^{(4)} = 1{,}000091\, a_{35} - 0{,}38042$$
$$= 1{,}000091 \cdot 18{,}349 - 0{,}38042$$
$$= 17{,}97025;$$

daher ist

$$P_{35}^{(4)} = \frac{0{,}38613}{17{,}97025} = 0{,}02149;$$

die zu zahlende Nettoprämie beträgt also 214 ℳ 90 ₰ (vgl. Schluß von Nr. 247).

An zweiter Stelle soll die monatlich zahlbare Jahresprämie bestimmt werden, die ein 40-jähriger Aktiver für eine Invaliditätsversicherung von 500 ℳ nach den Grundlagen der Tafeln VI und VII zu zahlen hätte.

Für die Rente 1 ist

$$P_{40}^{(12)} = \frac{{}^{ai}a_{40}}{{}^{a}a_{40}^{(12)}};$$

Tafel VII gibt unmittelbar

$${}^{ai}a_{40} = 3{,}192553;$$

mit Hilfe der Tafel VI und der Näherungsformel (35), Nr. 219, ergibt sich

$${}^{a}a_{40}^{(12)} = {}^{a}a_{40} - 0{,}45833 = 13{,}61271 - 0{,}45833 = 13{,}15438;$$

es ist also

$$P_{40}^{(12)} = \frac{3{,}192553}{13{,}15438} = 0{,}24270;$$

die zu zahlende Prämie beträgt demnach 121,35 ℳ, die Monatsrate 10 ℳ 11 ₰.

§ 2. Veränderliche Prämien.

250. Allgemeines über variable Prämien. Natürliche Prämienzahlung. Theoretisch ist jede Prämienzahlung zulässig, bei der Leistung und Gegenleistung dem Versicherungswerte nach gleich sind; sie wäre es auch praktisch, wenn jeder Versicherungsnehmer verhalten werden könnte, den Versicherungsvertrag bis zu dessen natürlichem Ablaufe einzulösen.

In Wirklichkeit gibt es jedoch neben dem natürlichen Ablaufe auch einen *Storno* der Versicherungen, veranlaßt durch freiwilliges Aufgeben, durch Nichteinhaltung der Bedingungen od. dgl.; mit dem Storno hören aber die Verpflichtungen auf. Dieser Umstand führt zu einer Einschränkung der theoretisch möglichen Prämienzahlungsmodalitäten dahin, daß nur solche praktisch verwertbar sind, *bei welchen die versichernde Anstalt in keinem Stadium dem Versicherungsnehmer gegenüber im Vorschusse ist.*

Die Ausführung dieses Grundsatzes verlangt, daß Schadenzahlung niemals vor der Prämienzahlung beginnt, und daß zu jeder Zeit die bezahlten (Netto-) Prämien die bis dahin aufgelaufenen Schäden zum mindesten decken. Die Nichteinhaltung dieser Forderung hätte im Falle des Aufgebens einer Versicherung einen Schaden für die Anstalt zur Folge, weil auf die stornierte Police weniger eingezahlt worden wäre, als sie rechnungsmäßig zu den mittlerweile ausgezahlten Versicherungssummen hätte beitragen sollen. Und eine Prämienzahlungsweise, welche dem obigen Grundsatze nicht genügt, gäbe geradezu den Anreiz zum Aufgeben der Versicherung; denn der Austretende könnte sich sofort die gleichen Vorteile bei einer andern Anstalt, die nach denselben oder gar nach günstigeren Grundlagen rechnet, billiger erkaufen.

Bei Versicherungen, wo mit der Auszahlung erst zu einem späteren bestimmten Zeitpunkte begonnen wird, wie bei aufgeschobenen Renten und Todesfallversicherungen, bei Erlebensversicherungen, wäre gegen eine spätere Aufnahme der Prämienzahlung nichts einzuwenden, wenn es überhaupt einen Sinn hätte, eine Versicherung abzuschließen, ohne auch gleich mit der Prämienzahlung anzufangen.

Anders bei Versicherungen, wo unmittelbar nach dem Abschluß auch schon Auszahlungen eintreten können, wie bei Todesfall-, gemischten, Invaliditäts- u. dgl. Versicherungen. Hier *muß* auch die Prämienzahlung sofort aufgenommen und in einem Tempo geführt werden, daß der obige Grundsatz beständig gewahrt bleibe.

Einen Maßstab für dieses Tempo bietet die *natürliche Prämienzahlung.* Unter der *natürlichen Prämie,* die eine Person (x) für eine bestimmte Versicherung zu zahlen hat, versteht man die der Versicherung auf ein Jahr entsprechende Prämie, durch die also die Schäden des nächstfolgenden Jahres gedeckt werden. In diesem Belange ist die natürliche Prämie der *Umlage* analog, nur daß jene im voraus bemessen und bezahlt, diese aber erst am Schlusse des Jahres nach Maßgabe der wirklich eingetretenen Schäden auf die Versicherten überwälzt wird.

Die natürliche Prämie eines x-jährigen für eine Todesfallversicherung auf das Kapital 1 beträgt

$$v q_x = v \frac{d_x}{l_x} = \frac{C_x}{D_x}; \tag{27}$$

sie variiert mit dem Alter wie die Sterbenswahrscheinlichkeit. Will ein x-jähriger sich durch natürliche Prämienzahlung versichern, so hat er, so lange er lebt, der Reihe nach die Prämien

$$v q_x, \quad v q_{x+1}, \quad v q_{x+2}, \quad \cdots$$

zu zahlen. Der Wert dieser Anwartschaften ist

$$v q_x + v^2 q_{x+1\;1}p_x + v^3 q_{x+2\;2}p_x + \cdots$$
$$= v \frac{d_x}{l_x} + v^2 \frac{d_{x+1}}{l_{x+1}} \frac{l_{x+1}}{l_x} + v^3 \frac{d_{x+2}}{l_{x+2}} \frac{l_{x+2}}{l_x} + \cdots$$
$$= \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots}{D_x} = \frac{M_x}{D_x} = A_x,$$

also tatsächlich gleich dem Werte der Versicherung.

Für eine gemischte, auf n Jahre lautende Versicherung hätte ein x-jähriger der Reihe nach die natürlichen Prämien

$$v q_x, \quad v q_{x+1}, \quad v q_{x+2}, \quad \cdots \quad v q_{x+n-2}, \quad v$$

zu zahlen; denn im letzten Jahre kommt das Kapital, wenn es nicht schon früher fällig wurde, sicher zur Auszahlung; der Wert dieser zu erwartenden Prämienzahlungen ist

$$v q_x + v^2 q_{x+1\;1}p_x + v^3 q_{x+2\;2}p_x + \cdots + v^{n-1} q_{x+n-2\;n-2}p_x + v^n{}_{n-1}p_x$$
$$= v \frac{d_x}{l_x} + v^2 \frac{d_{x+1}}{l_x} + v^3 \frac{d_{x+2}}{l_x} + \cdots + v^{n-1} \frac{d_{x+n-2}}{l_x} + v^n \frac{l_{x+n-1}}{l_x};$$

ersetzt man l_{x+n-1} durch $d_{x+n-1} + l_{x+n}$, so verwandelt sich dies in

$$\frac{C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x},$$

also in den Versicherungswert.

Soll eine Prämienzahlung dem im Eingange aufgestellten Grundsatze genügen, so muß in *jedem* Zeitpunkte die Summe der auf ihn reduzierten Prämienzahlungen die Summe der auf denselben Augenblick reduzierten natürlichen Prämien übertreffen oder ihr mindestens gleichkommen.

Die natürliche Prämienzahlung wird, von einigen amerikanischen Gesellschaften abgesehen, in der Lebensversicherung nur wenig geübt; dagegen ist sie bei der Realversicherung das herrschende Prinzip.

251. Beispiele abgestufter Prämien. Abgestufte Prämien werden mitunter in Anwendung gebracht, um dem Versicherungsnehmer gewisse Erleichterungen zu gewähren und die Prämienzahlung der Entwicklung seiner wirtschaftlichen Verhältnisse besser anzupassen. Es wird genügen, die Behandlung solcher Fälle an einigen charakteristischen Beispielen aufzuzeigen.

1) Für eine Todesfallversicherung auf das Kapital 1 werde in den ersten t Jahren die Prämie Π, in den nächsten t Jahren die Prämie $\Pi + k$, in den darauf folgenden t Jahren $\Pi + 2k \cdots$ gezahlt; solcher Stufen gebe es höchstens $m + 1$, von wo ab die Prämie die letzte Höhe beibehält.

Der Wert der Versicherung ist

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}.$$

Der Wert der Prämienzahlung ist eine Summe von Renten, die erste sofort beginnend und vom Betrage Π, die zweite, dritte, $\cdots$ m-te um t, $2t$, $\cdots$ mt Jahre aufgeschoben und vom Betrage k; er beträgt also

$$\Pi a_x + k\left({}_{t|}a_x + {}_{2t|}a_x + \cdots + {}_{mt|}a_x\right)$$
$$= \frac{\Pi N_x + k\left(N_{x+t} + N_{x+2t} + \cdots + N_{x+mt}\right)}{D_x}.$$

Aus der Vergleichung beider Werte folgt die Relation zwischen anfänglicher Prämie und Zuwachs (Abnahme), nämlich:

$$\Pi N_x + k\left(N_{x+t} + N_{x+2t} + \cdots + N_{x+mt}\right) = M_x; \qquad (28)$$

aus ihr kann bei gegebenem k das Π und umgekehrt bei gegebenem Π das k berechnet werden; es ist

$$\Pi = \frac{M_x - k\left(N_{x+t} + N_{x+2t} + \cdots + N_{x+mt}\right)}{N_x}, \qquad (29)$$

$$k = \frac{M_x - \Pi N_x}{N_{x+t} + N_{x+2t} + \cdots + N_{x+mt}}. \qquad (30)$$

Bei positivem k hat man es mit einer steigenden, bei negativem k mit einer fallenden Prämienzahlung zu tun.

Π und k sind jedoch an gewisse Grenzen gebunden. Fürs erste darf Π nicht kleiner genommen werden als die Prämie für eine kurze Ablebensversicherung auf t Jahre; denn sonst wäre die Anstalt während dieser Zeit dem Versicherten gegenüber im Nachteile. Auf der andern Seite darf $\Pi + mk$, welches bei positivem k die höchste Prämie ist, die Jahresprämie für eine im Alter $x + mt$ abgeschlossene Todesfallversicherung nicht überschreiten; denn sonst würde (x) die Versicherung aufgeben und sie bei einer andern Anstalt billiger erkaufen. Bei negativem k hätte es wieder keinen Sinn, Π größer als die einmalige Prämie oder so anzunehmen, daß $\Pi - mk$ negativ würde; in beiden Fällen müßte es zu Rückzahlungen der Anstalt an den Versicherten kommen.

Beispiel. Die Prämie wachse durch zehn Jahre um 1‰ des versicherten Kapitales, so daß sie im elften Jahre $\Pi + 0{,}01$ beträgt und von da ab auf dieser Höhe verbleibt. Wie groß ist Π bei $x = 30$ nach den Grundlagen der Tafel III?

Die erste der obigen Formeln, dem Falle angepaßt, gibt:

$$\Pi = \frac{M_{30} - 0{,}001\left(N_{31} + N_{32} + \cdots + N_{40}\right)}{N_{30}}$$
$$= \frac{M_{30} - 0{,}001\left(S_{31} - S_{41}\right)}{N_{30}}$$
$$= \frac{10\,946{,}14 - 0{,}001\,(9\,034\,879 - 4\,733\,721)}{621\,199}$$
$$= 0{,}010697.$$

Ist also 10 000 ℳ das versicherte Kapital, so beträgt die erste Prämie 106 ℳ 97 ₰, jede folgende bis zur elften um 10 ℳ mehr als die vorangehende; die höchste Prämie, bei der es weiter verbleibt, macht 206 ℳ 97 ₰ aus.

Die natürliche Prämie für das erste Jahr ist [s. Nr. 250, (27)]:

$$10\,000 \frac{C_{30}}{D_{30}} = 10\,000 \frac{237{,}86}{31\,953} = 74{,}43 \text{ ℳ},$$

also kleiner als 106 ℳ 97 ₰; die höchste Prämie, 206 ℳ 97 ₰, die sich im 41. Jahre einstellt, ist kleiner als die diesem Alter entsprechende konstante Jahresprämie

$$10\,000 \frac{M_{41}}{N_{41}} = 10\,000 \frac{8560{,}74}{334\,648} = 255{,}81 \text{ ℳ}.$$

Die Stipulationen des Beispieles sind also praktisch zulässig.

2) Häufiger kommt der Fall vor, daß die Prämie jährlich um einen aliquoten Teil ihres ursprünglichen Betrages zu- oder abnimmt.

Unter den gleichen Bedingungen betrage die nach je t Jahren erfolgende Änderung der Prämie $\varkappa \Pi$; dann tritt in Gleichung (28) $\varkappa \Pi$ an die Stelle von k, und es ergibt sich nunmehr:

$$\Pi = \frac{M_x}{N_x + \varkappa (N_{x+t} + N_{x+2t} + \cdots + N_{x+mt})} \tag{31}$$

$$= \frac{M_x - \Pi N_x}{\Pi (N_{x+t} + N_{x+2t} + \cdots + N_{x+mt})}. \tag{32}$$

Bezüglich der praktischen Zulässigkeit gelten ähnliche Erwägungen wie vorhin.

Beispiel. Die Prämie für die Todesfallversicherung eines 20-jährigen soll jährlich um 3% ihres anfänglichen Betrages abnehmen; dann gibt (31) die erste Prämie zu

$$\Pi = \frac{M_{20}}{N_{20} - 0{,}03 (N_{21} + N_{22} + \cdots)}$$

$$= \frac{M_{20}}{N_{20} - 0{,}03\, S_{21}}$$

$$= \frac{13\,594{,}03}{1\,025\,625 - 0{,}03 \cdot 17\,955\,354}$$

$$= 0{,}027916;$$

nach 34 Jahren, also bei dem Alter 54, ist sie noch positiv und beträgt nur mehr 0,000279, von da ab wird sie negativ. Wenn also eine Anstalt jährlich 3% Nachlaß der ersten Prämie zusichert, so hört nach 34 Jahren die Prämienzahlung auf, und der Versicherte erhält von da ab eine steigende Rente, so lange er lebt.

3) Eine mitunter übliche Art der Prämienzahlung besteht darin, daß in den t (5, 7) ersten Jahren die Hälfte der späteren Prämie

gezahlt wird. Die Formel für die Anfangsprämie ergibt sich aus (31) durch die Substitution $m = 1$, $\varkappa = 1$ und lautet demnach:

$$\Pi = \frac{M_x}{N_x + N_{x+t}}. \tag{33}$$

Es ist beispielsweise für $x = 30$, $t = 5$ nach den Grundlagen von Tafel III:

$$\Pi = \frac{10\,946{,}14}{621\,199 + 474\,131} = 0{,}009991;$$

für 10000 ℳ versichertes Kapital sind also durch die ersten fünf Jahre 99,91 ℳ, von da ab 199,82 ℳ an Prämie zu zahlen.

252. Die Zillmersche Prämie. Zu einem besonderen Falle variabler Nettoprämien führt die von Zillmer in Vorschlag gebrachte Art der Deckung der ersten Unkosten.

Der Versicherte zahlt wohl alljährlich die gleiche Bruttoprämie; dagegen wird die Nettoprämie erst vom zweiten Jahre an als konstant, im ersten Jahre aber um einen Betrag α kleiner gerechnet als in den übrigen Jahren. Dieser Betrag, der in den Zuschlag eingeht und daher andern als reinen Versicherungszwecken dienen kann, ist bestimmt, die ersten Unkosten zu decken. Die Nettoprämie des ersten Jahres muß aber, soll dem obersten Grundsatze der veränderlichen Prämienzahlung Genüge geleistet sein, der natürlichen Prämie mindestens gleich sein[1]). Selbstverständlich zieht die Verminderung der ersten Prämie eine entsprechende Erhöhung der folgenden nach sich.

Der Gedanke, der dieser Rechnungsweise zugrunde liegt, läßt sich dahin erweitern, daß der erste Zuschlag statt auf ein, auf mehrere Jahre verteilt wird.

Es handle sich z. B. um eine lebenslängliche Todesfallversicherung mit jährlicher, bis zum Ableben währender Prämienzahlung; vom zweiten Jahre an betrage die Prämie P_x, dann ist sie $P_x - \alpha$ im ersten Jahre, und der Wert der Prämienzahlung ist ausgedrückt durch

$$P_x a_x - \alpha;$$

setzt man ihn dem Werte A_x der Versicherung gleich, so ergibt sich

$$P_x = \frac{A_x + \alpha}{a_x}, \tag{34}$$

während die durch die ganze Dauer gleichbleibende Prämie

$$P_x' = \frac{A_x}{a_x}$$

betrüge.

Erste selbstverständliche Forderung ist, daß α kleiner als P_x gewählt werde. Dies führt zu der Bedingung:

1) Dieser Satz gilt für Versicherungsarten, bei denen das Risiko sofort beginnt.

$$\alpha < \frac{A_x + \alpha}{a_x}$$

$$\alpha\left(1 - \frac{1}{a_x}\right) < P_x'$$

$$\alpha < \frac{a_x}{a_x - 1} P_x'. \tag{35}$$

Die zweite oben formulierte Forderung lautet:

$$P_x - \alpha \geqq \frac{C_x}{D_x}$$

$$P_x' + \frac{\alpha}{a_x} - \alpha \geqq \frac{C_x}{D_x}$$

$$\alpha \leqq \frac{a_x}{a_x - 1}\left(P_x' - \frac{C_x}{D_x}\right). \tag{36}$$

Ist (36) erfüllt, so ist es auch (35); daher stellt die rechte Seite von (36) eine obere Grenze für den Betrag α vor, eine Grenze, die mit dem Alter variiert (wächst). Eine andere Frage ist es, ob ein unter dieser Grenze gewähltes α auch immer ausreicht, die ersten Unkosten zu decken, oder ob dies mindestens bei der Gesamtheit der Versicherungen zu erzielen ist.

Mit den Daten der Tafel III findet man als obere Grenze von α:

bei $x = 30$: $\alpha \leqq 0{,}01033$, etwa 1 % des versicherten Kapitales

„ $x = 50$: $\alpha \leqq 0{,}02321$, „ 2,3 % „ „ „ .

Bei der Erlebensversicherung ergibt sich für die Zillmersche Prämie folgende Rechnung:

Wert der Versicherung: ${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$,

Wert der Prämienzahlung: $P_{x|n}a_x - \alpha$;

daraus

$$P_x = \frac{D_{x+n} + \alpha D_x}{D_{x|n}a_x}$$

$$= \frac{D_{x+n}}{D_{x|n}a_x}\left(1 + \frac{\alpha D_x}{D_{x+n}}\right)$$

$$= P_x'\left(1 + \frac{\alpha D_x}{D_{x+n}}\right), \tag{37}$$

wobei P_x' die gewöhnliche Prämie für dieselbe Versicherung ist [Nr. 248, 2)].

Aus der notwendigen Bedingung $\alpha \overline{\gtrless} P_x$ erhält man eine obere Grenze für α, nämlich

$$\alpha \overline{<} \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n} - D_x}. \tag{38}$$

So muß bei der Versicherung eines 30-jährigen zum 50. Lebensjahre

$$\alpha \lesseqgtr \frac{13\,034}{621\,199 - 184\,709 - 31\,953} = 0{,}0322,$$

kleiner also als 3,22 % des versicherten Kapitales sein.

§ 3. Prämienrückgewähr.

253. Allgemeine Bemerkungen. Die Versicherungskombinationen lassen sich in zwei Gruppen einteilen: bei den einen kommt es unbedingt zur Auszahlung von Versicherungssummen, bei den andern tritt dies nur bedingt ein.

Bei den Versicherungen der zweiten Gruppe kann es also vorkommen, daß der Versicherte Einzahlungen leistet, ohne hierfür eine Gegenleistung zu empfangen: der Laie erblickt in einem solchen Geschäfte ein Glücksspiel, auf einen Gewinn des Unternehmers angelegt. Um einen solchen negativen Erfolg der Versicherung zu vermeiden, verbindet man mit ihr die *Rückgewähr* der eingezahlten Prämien für den Fall, als der eigentliche Versicherungszweck nicht erreicht werden sollte. Hierdurch wird also eine Versicherung der zweiten Gruppe in eine der ersten Gruppe umgewandelt.

Es kommt aber auch vor, daß man Versicherungen der ersten Gruppe mit Prämienrückgewähr ausstattet; sie hat hier hauptsächlich den Zweck, den Anreiz zum Versichern zu erhöhen.

Die Prämienrückgewähr begegnet häufig der irrtümlichen Auffassung, als ob sie dazu bestimmt wäre, den Versicherten vor „Schaden" zu bewahren. In Wirklichkeit aber ist sie nichts anderes als eine neben der Hauptversicherung einhergehende zweite Versicherung, die nach denselben Grundsätzen berechnet wird und bezahlt werden muß wie jene. Bei jeder Versicherung muß es, nachdem alle Geschäfte abgewickelt sind, eine Gruppe Versicherter geben, die einen „Schaden" erlitten haben, der eine zweite Gruppe anderer gegenübersteht, die von der Versicherung einen effektiven „Nutzen" hatten. Von diesem retrospektiven Standpunkte darf aber das Versicherungswesen als eine Institution zur *Vorsorge für die ungewisse Zukunft* überhaupt nicht betrachtet und beurteilt werden.

Die Rückerstattung der Prämien erfolgt in mannigfachen Formen. Die wirklich eingezahlten Prämien werden zur Gänze oder zu einem im voraus festgesetzten Teile, unverzinst oder selbst mäßig verzinst ersetzt; ihre Rückzahlung erfolgt entweder, sobald die Nichterreichung des eigentlichen Versicherungszweckes feststeht, oder erst zu jenem Termine, wo er erreicht worden wäre, bei Versicherungen der ersten Gruppe mit der Liquidierung der Hauptversicherung zugleich. Die Rückgewähr bezieht sich in der Praxis wohl ausschließlich auf die

Bruttoprämien, weil die Nettoprämien, lediglich für die interne Gebarung maßgebend, im Verkehr mit den Versicherten nicht in Rechnung kommen. Wenn daher im folgenden auch Beispiele der Rückgewähr von Nettoprämien vorgeführt werden, so geschieht dies, um an diesen einfacheren Formen die Prinzipien leichter zu erklären.

Immer kommt es aber auch hier auf die Bestimmung der Nettoprämie an; aus dieser wird dann mit Hilfe des nach seiner verhältnismäßigen Größe im voraus bestimmten Zuschlags die Bruttoprämie abgeleitet. Man bildet zu diesem Zwecke eine Gleichung, deren eine Seite den Gesamtwert der Versicherung, der Hauptversicherung sowohl als der Rückgewähr, darstellt, während die andere Seite in dem Werte der Prämienzahlung besteht. Die einzige Unbekannte in dieser Gleichung muß die Nettoprämie sein.

254. Beispiele der Rückgewähr von Nettoprämien.

1) Kapitalisch begründete Erlebensversicherung mit Rückgewähr der Prämie im Falle und zur Zeit vorzeitigen Ablebens.

Die Leistung an den Versicherten besteht in der Erlebensversicherung auf das Kapital 1 und in einer kurzen, auf die Versicherungsdauer von n Jahren beschränkten Todesfallversicherung im Betrage der einmaligen Prämie E; seine Gegenleistung in der Prämie E; folglich muß

$$\frac{D_{x+n}}{D_x} + E\,\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = E$$

sein, woraus

$$E = \frac{D_{x+n}}{D_x - (M_x - M_{x+n})} \tag{39}$$

folgt.

Die einmalige Prämie für die Erlebensversicherung allein wäre

$$E' = \frac{D_{x+n}}{D_x};$$

es ist also

$$\frac{E}{E'} = \frac{D_x}{D_x - (M_x - M_{x+n})}$$

oder

$$E = E' + \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x - (M_x - M_{x+n})}\,E'. \tag{40}$$

Der zweite Teil rechts stellt die Prämie für die Rückgewährversicherung vor.

Beispiel. Für $x = 30$, $n = 15$ ist nach den Grundlagen der Tafel III:

$$E' = \frac{16\,570}{31\,953} = 0{,}51857$$

$$E = 0{,}51857\left(1 + \frac{3176{,}77}{31\,953 - 3176{,}77}\right) = 0{,}51857\,(1 + 0{,}11040)$$
$$= 0{,}57582;$$

die Versicherung der Rückgewähr kostet demnach rund 11 % der Kosten der Hauptversicherung.

2) Kapitalisch begründete aufgeschobene Leibrente mit Rückgewähr der Prämie im Falle des Ablebens während der Aufschubszeit; Alter x, Aufschubszeit n Jahre.

Der Ansatz für diese Kombination unterscheidet sich von dem vorigen nur dadurch, daß an die Stelle des Wertes $\frac{D_{x+n}}{D_x}$ der Erlebensversicherung der Wert $\frac{N_{x+n}}{D_x}$ der aufgeschobenen Rente tritt; er lautet daher:

$$\frac{N_{x+n}}{D_x} + E\,\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = E$$

und gibt

$$E = \frac{N_{x+n}}{D_x - (M_x - M_{x+n})}. \tag{41}$$

Durch Reduktion auf die Hauptprämie $E' = \frac{N_{x+n}}{D_x}$ ergibt sich wieder die Gleichung (40).

3) Erlebensversicherung mit Rückgewähr der bis zum eventuell vorzeitigen Tode gezahlten Jahresprämien.

Die Leistung der Anstalt besteht in der Erlebensversicherung auf das Kapital 1 und einer kurzen, mit P beginnenden und jährlich um P steigenden Todesfallversicherung; die Gegenleistung in einer kurzen Rente vom Jahresbetrage P. Es mus also

$$\frac{D_{x+n}}{D_x} + P\,\frac{R_x - R_{x+n} - n\,M_{x+n}}{D_x} = P\,\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

sein; daraus berechnet sich

$$P = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n} - (R_x - R_{x+n} - n\,M_{x+n})}. \tag{42}$$

Durch Vergleichung mit der Jahresprämie

$$P' = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

der Hauptversicherung erhält man

$$P = P' + \frac{R_x - R_{x+n} - n\,M_{x+n}}{N_x - N_{x+n} - (R_x - R_{x+n} - n\,M_{x+n})}\,P'. \tag{43}$$

4) Aufgeschobene Rente mit Rückgewähr der bis zum eventuell während der Aufschubszeit eingetretenen Tode gezahlten Jahresprämien.

Der Ansatz unterscheidet sich von dem vorigen nur in dem ersten Gliede, welches $\frac{N_{x+n}}{D_x}$ lautet. Mithin ist

$$P = \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+n} - (R_x - R_{x+n} - n\,M_{x+n})}, \qquad (44)$$

und Gleichung (43) gilt auch hier.

5) Erlebensversicherung mit Rückgewähr der einmaligen Prämie bei Auszahlung des Kapitales.

Der Versicherungsnehmer schließt hier zwei Erlebensversicherungen auf einmal ab, die eine auf das Kapital 1, die andere auf die Prämie E, und zahlt an die Anstalt diese letztere. Es gilt also der Ansatz:

$$(1 + E)\,\frac{D_{x+n}}{D_x} = E,$$

aus dem sich

$$E = \frac{D_{x+n}}{D_x - D_{x+n}} \qquad (45)$$

und durch Vergleichung mit der Hauptprämie $E' = \frac{D_{x+n}}{D_x}$

$$E = \left(1 + \frac{D_{x+n}}{D_x - D_{x+n}}\right) E' \qquad (46)$$

ergibt.

Für $x = 30$ und $n = 15$ gibt Tafel III:

$$E = (1 + 1{,}07716)\;0{,}51857 = 1{,}07715;$$

die Prämie beträgt also 7,7% mehr als das versicherte Kapital; ist dieses 1000 ℳ, so zahlt (x) 1077 ℳ 15 ₰ an einmaliger Prämie und erhält, im Falle er das Alter $x + n$ erlebt, 2077 ℳ 15 ₰.

Sollte *auch* im Falle vorzeitigen Ablebens die Prämie rückerstattet werden, so käme zu den Leistungen der Anstalt noch eine auf n Jahre abgekürzte Todesfallversicherung auf das Kapital E hinzu, und man hätte den Ansatz:

$$(1 + E)\,\frac{D_{n+n}}{D_x} + \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}\,E = E, \qquad (47)$$

woraus

$$E = \frac{D_{x+n}}{D_x - D_{x+n} - (M_x - M_{x+n})} \qquad (48)$$

folgt.

Auf denselben speziellen Fall angewendet gibt diese Formel $E = 1{,}35750$; bei 1000 ℳ versicherten Kapitals werden diesem Vertrage gemäß gegen eine Prämie von 1357 ℳ 50 ₰ im Falle vorzeitigen Todes 1357,50 ℳ, im Erlebensfalle 2357,50 ℳ ausgezahlt.

6) Todesfallversicherung gegen einmalige Prämie mit Rückgewähr derselben.

Die Leistung an den Versicherten besteht in zwei Todesfallversicherungen, die eine mit dem Kapital 1, die andere vom Betrage der einmaligen Prämie A; die Gegenleistung des Versicherten ist A. Man hat also die Gleichung:

$$(1 + A)\frac{M_x}{D_x} = A,$$

woraus

$$A = \frac{M_x}{D_x - M_x} = \left(1 + \frac{M_x}{D_x - M_x}\right) A', \tag{49}$$

wenn $A' = \frac{M_x}{D_x}$ die Prämie für die Hauptversicherung bedeutet.

Für $x = 40$ entnimmt man der Tafel III $A' = 0{,}42161$ und berechnet

$$A = \left(1 + \frac{8761{,}58}{12\,019{,}42}\right) 0{,}42161 = 0{,}72894.$$

7) Bei der gemischten Versicherung kann die Rückgewähr α) unbedingt, β) bloß für den vorzeitigen Todesfall, γ) bloß für den Erlebensfall mit versichert werden. Kapitalische Begründung der Versicherung gegen die Prämie A vorausgesetzt, führen diese drei Fälle zu den folgenden Ansätzen:

$$(1 + A)\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} = A, \tag{α}$$

$$(1 + A)\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x} = A, \tag{β}$$

$$\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + (1 + A)\frac{D_{x+n}}{D_x} = A; \tag{γ}$$

daraus berechnet sich

$$A = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x - (M_x - M_{x+n} + D_{x+n})}, \tag{50^α}$$

$$A = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x - (M_x - M_{x+n})}, \tag{50^β}$$

$$A = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x - D_{x+n}}. \tag{50^γ}$$

Bei $x = 40$, $n = 25$ und 1000 ℳ versichertem Kapital beträgt die Nettoprämie nach den Grundlagen der Tafel III:

für die bloße Versicherung	449 ℳ	78 ₰	
mit Rückgewähr im Erlebensfalle	669 „	62 „	
mit Rückgewähr im Todesfalle	671 „	57 „	
mit unbedingter Rückgewähr	999 „	12 „	.

8) Lebenslängliche Todesfallversicherung gegen jährliche Prämienzahlung mit Rückgewähr der eingezahlten Nettoprämien.

Die Leistung der Anstalt besteht in einer Todesfallversicherung auf das Kapital 1 und einer steigenden Todesfallversicherung, die mit P beginnt und jährlich um P steigt, wenn P die noch unbekannte Jahresprämie bedeutet; der Wert dieser Leistung muß gleich sein

dem der Prämienzahlung, die in einer Leibrente vom Betrage P besteht; man hat also

$$\frac{M_x}{D_x} + \frac{R_x}{D_x} P = \frac{N_x}{D_x} P,$$

woraus sich

$$P = \frac{M_x}{N_x - R_x} = P' \left(1 + \frac{R_x}{N_x - R_x}\right) \tag{51}$$

berechnet; P' ist die Prämie für Todesfallversicherung allein.

Tafel III liefert beispielsweise

$$P'_{30} = 0{,}01762 \quad \text{und} \quad P_{30} = 0{,}03352.$$

9) Gemischte Versicherungen gegen jährliche Prämienzahlung mit Rückgewähr nach den Modalitäten α), β), γ) von 7).

Der Modalität (α) entspricht der Ansatz

$$\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+x}}{D_x} + \frac{R_x - R_{x+n} - n M_{x+n}}{D_x} P + \frac{D_{x+n}}{D_x} n P$$
$$= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} P;$$

darin bedeutet das erste Glied den Wert der eigentlichen Versicherung, das zweite Glied den Wert der Rückgewähr für den Todesfall, die sich als kurze steigende Todesfallversicherung darstellt, das dritte Glied den Wert der Rückgewähr im Erlebensfalle. Bei der Modalität β) entfällt also das dritte Glied, bei der Modalität γ) das zweite Glied. Man erhält so für die Jahresprämie die Ausdrücke:

$$P = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n} - [R_x - R_{x+n} + n(D_{x+n} - M_{x+n})]}, \tag{52α}$$

$$P = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n} - [R_x - R_{x+n} - n M_{x+n}]}, \tag{52β}$$

$$P = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+x} - n D_{x+n}}. \tag{52γ}$$

Mit den Grundlagen der Tafel III ergibt sich für eine 40-jährige Person bei 25-jähriger Versicherungsdauer und 1000 $\mathcal{M}$ Kapital die Jahresprämie:

für die einfache Versicherung mit	33,78 $\mathcal{M}$
mit Rückgewähr im Todesfall	43,36 „
mit Rückgewähr im Erlebensfall	59,13 „
mit unbedingter Rückgewähr	96,35 „ .

10) Todesfallversicherung gegen jährliche Prämie mit Rückgewähr der eingezahlten Prämie nebst deren einfachen Zinsen zum Zinsfuße i.

Die Leistung der Anstalt besteht in der Versicherung des Kapitales 1 auf den Todesfall, in einer mit P beginnenden und

jährlich um P steigenden Todesfallversicherung (Rückgewähr der Prämien) und endlich in einer nach der Progression iP, $3iP$, $6iP$, $10iP$, $\cdots$ fortschreitenden Todesfallversicherung (Zinsenvergütung); denn, tritt der Tod im ersten, zweiten, dritten, $\cdots$ Versicherungsjahre ein, so sind die zu ersetzenden Zinsen beziehungsweise

$$iP, \quad 2iP + iP = 3iP, \quad 3iP + 2iP + iP = 6iP, \quad \cdots$$

Die Leistung des Versicherten ist eine Leibrente vom Betrage P. Man hat also den Ansatz:

$$\frac{M_x}{D_x} + \frac{R_x}{D_x} P + \frac{C_x + 3C_{x+1} + 6C_{x+2} + 10C_{x+3} + \cdots}{D_x} iP = \frac{N_x}{D_x} P.$$

Nun ist nach Nr. 216:

$$\begin{aligned} C_x + 2C_{x+1} + 3C_{x+2} + 4C_{x+3} + \cdots &= R_x \\ C_{x+1} + 2C_{x+2} + 3C_{x+3} + \cdots &= R_{x+1} \\ C_{x+2} + 2C_{x+3} + \cdots &= R_{x+2} \\ C_{x+3} + \cdots &= R_{x+3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned}$$

daher

$$C_x + 3C_{x+1} + 6C_{x+2} + 10C_{x+3} + \cdots = \sum_x R_x;$$

die zur Bestimmung von P führende Gleichung lautet also:

$$M_x + (R_x + i\sum R_x) P = N_x P; \qquad (\alpha)$$

sie liefert

$$P = \frac{M_x}{N_x - R_x - i\sum\limits_x R_x}. \qquad (53)$$

255. Beispiele der Rückgewähr von Bruttoprämien. Die Rechnung erfolgt hier nach den gleichen Prinzipien; der wesentliche Unterschied gegen den früheren Fall besteht nur darin, daß auf jener Seite, welche die Leistungen der Anstalt bewertet, die *Brutto*prämie einzusetzen ist, während die die Leistungen des Versicherungsnehmers darstellende Seite mit der *Netto*prämie gebildet wird. Die Koeffizienten der Relation zwischen Brutto- und Nettoprämie (s. Nr. 244) sind dabei als bekannt vorausgesetzt.

1) Erlebensversicherung mit Rückgewähr der kapitalischen Einzahlung im Falle vorzeitigen Ablebens.

Die Leistung der Anstalt besteht in der Erlebensversicherung auf das Kapital 1 und einer kurzen Todesfallversicherung auf die Bruttoprämie $E' = kE + c$; die Gegenleistung in der Nettoprämie E. Es gilt also der Ansatz:

$$\frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}(kE + c) = E.$$

Daraus berechnet sich:

$$E = \frac{D_{x+n} + c(M_x - M_{x+n})}{D_x - k(M_x - M_{x+n})}. \qquad (54)$$

2) Erlebensversicherung mit Rückgewähr der eingezahlten Jahresprämien bei vorzeitigem Ableben.

An die Stelle der kurzen Todesfallversicherung, welche das zweite Glied des vorigen Ansatzes bildet, kommt nunmehr eine kurze steigende Ablebensversicherung vom Anfangsbetrage und der jährlichen Steigerung $kP + c$; die rechte Seite verwandelt sich in den Wert einer kurzen Rente vom Jahresbetrage P. Aus dem so modifizierten Ansatz:

$$\frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{R_x - R_{x+n} - n M_{x+n}}{D_x}(kP + c) = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} P$$

findet man:

$$P = \frac{D_{x+n} + c(R_x - R_{x+n} - n M_{x+n})}{N_x - N_{x+n} - k(R_x - R_{x+n} - n M_{x+n})}. \qquad (55)$$

3) Todesfallversicherung gegen jährliche Prämienzahlung mit Rückgewähr der Prämien.

Letztere hat den Wert einer mit der Bruttoprämie $kP + c$ beginnenden und jährlich um ebenso viel steigenden Todesfallversicherung; die entsprechende Gleichung lautet also:

$$\frac{M_x}{D_x} + \frac{R_x}{D_x}(kP + c) = \frac{N_x}{D_x} P;$$

daraus folgt:

$$P = \frac{M_x + c R_x}{N_x - k R_x}. \qquad (56)$$

4) Gemischte Versicherung gegen jährliche Prämienzahlung mit unbedingter Prämienrückgewähr.

Wenn n die Versicherungsdauer ist, so kann die Leistung der Anstalt zerlegt werden in zwei Erlebensversicherungen, eine mit dem Kapital 1, die andere vom Betrage der n-fachen Bruttoprämie, in eine auf n Jahre abgekürzte Todesfallversicherung auf das Kapital 1, endlich eine n Jahre währende mit der einfachen Bruttoprämie beginnende und um deren Betrag steigende Todesfallversicherung. Die Leistung des Versicherten besteht in einer auf n Jahre abgekürzten Rente P.

Diese Analyse führt zu der Gleichung:

$$\frac{D_{x+n}}{D_x}[1 + n(kP + c)] + \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{R_x - R_{x+n} - n M_{x+n}}{D_x}(kP + c)$$

$$= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} P, \qquad (\alpha$$

aus der sich ergibt:

$$P = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n} + c\,(R_x - R_{x+n} - n\,M_{x+n})}{N_x - N_{x+n} - k\,[R_x - R_{x+n} + n\,(D_{x+n} - M_{x+n})]}. \tag{57}$$

Bei $x = 40$, $n = 25$, $k = 1{,}12$, $c = 0$ und 1000 *M* versichertem Kapital gibt die Formel, mit den Grundlagen von Tafel III gerechnet,

als Jahresnettoprämie 123,87 *M*,
als Jahresbruttoprämie 138,73 *M*;

der Versicherte erhält, wenn er das Alter von 65 Jahren erreicht, $1000 + 25 \cdot 138{,}73 = 4468{,}25$ *M*, und sollte er vorzeitig sterben, so werden seinen Erben außer 1000 *M* die bis dahin bezahlten Bruttoprämien zurückerstattet. Von der Nettoprämie entfallen:

$\frac{M_{40} - M_{65} + D_{65}}{N_{40} - N_{65}}\, 1000 = 33$ *M* 78 ₰ auf die Hauptversicherung,

$\frac{R_{40} - R_{65} - 25\,M_{65}}{N_{40} - N_{65}}\, 138{,}73 = 30$ „ 62 „ auf die Rückgewähr im Todesfalle

und

$\frac{D_{65}}{N_{40} - N_{65}}\, 138{,}73 = 59$ „ 47 „ auf die Rückgewähr im Erlebensfalle,

zusammen 123 *M* 87 ₰.

Fände Rückgewähr *nur* im Todesfalle statt, so reduzierte sich in (α) der Inhalt der eckigen Klammer auf 1, und fände sie *nur* im Erlebensfalle statt, so entfiele der dritte Teil der linken Seite.

5) Kapitalisch begründete Todesfallversicherung mit Rückgewähr des eingezahlten Kapitales $kA + c$ und seiner Zinsen zum Zinsfuße i.

Die Leistung der Anstalt setzt sich zusammen aus zwei gewöhnlichen Todesfallversicherungen mit den Kapitalien 1 und der Bruttoprämie $kA + c$, und aus einer steigenden Ablebensversicherung, mit $i\,(kA + c)$ beginnend und um diesen Betrag steigend; die Nettoleistung des Versicherten ist A. Zu ihrer Bestimmung hat man also die Gleichung:

$$\frac{M_x}{D_x}(1 + kA + c) + \frac{R_x}{D_x}\, i\,(kA + c) = A;$$

hieraus folgt

$$A = \frac{(1 + c)\,M_x + c\,i\,R_x}{D_x - k\,(M_x + i\,R_x)}. \tag{58}$$

6) Todesfallversicherung gegen jährliche Prämienzahlung mit Rückgewähr der Bruttoprämien nebst deren einfachen Zinsen zum Zinsfuße i.

Der Fall ist konform dem Falle 10), Nr. 254, nur daß statt der Netto- die Bruttoprämien rückerstattet werden. Daher ändert sich die dort abgeleitete Gleichung (α) dahin, daß auf der linken Seite

an die Stelle der Nettoprämie P die Bruttoprämie $kP + c$ tritt; sie lautet dann

$$M_x + (R_x + i \sum R_x)(kP + c) = N_x P$$

und gibt:

$$P = \frac{M_x + c(R_x + i \sum R_x)}{N_x - k(R_x + i \sum R_x)}. \tag{59}$$

Eine Versicherung dieser Art gestaltet sich selbstredend sehr kostspielig, namentlich für hohe Alterklassen. Als Beispiel diene der nach Tafel III gerechnete Fall, wo

$$x = 50, \quad k = 1{,}08, \quad i = 0{,}02;$$

der Zuschlag zur Nettoprämie beträgt also 8% ihres Betrages, und die Bruttoprämien werden mit 2% einfachen Zinsen rückgewährt. Man findet bei 1000 ℳ versichertem Kapital

als Nettoprämie 239 ℳ
als Bruttoprämie 258 ℳ 12 ₰.

Von der Nettoprämie entfallen

$\frac{M_{50}}{N_{50}} \cdot 1000 =$ 36 ℳ 75 ₰ auf die Hauptversicherung,

$\frac{R_{50} + 0{,}02 \sum R_{50}}{N_{50}} 258{,}12 =$ 202 „ 25 „ auf die Rückgewähr,

zusammen 239 ℳ — ₰.

Stirbt der Versicherte im 60. Lebensjahre, nachdem er also 10 Jahresprämien eingezahlt, so zahlt die Anstalt an den Versicherungsberechtigten:

an versichertem Kapital	1000 ℳ
an Prämienrückgewähr $10 \times 258{,}12$	2581 „ 20 ₰
an 2% Zinsen von den Prämien $(10+9+8+\cdots+1)\,5{,}16$	283 „ 93 „
zusammen	3865 „ 13 ₰;

dagegen sind die vereinnahmten Nettoprämien zu $3\frac{1}{2}$% Zinseszins auf

$$\frac{1{,}035^{10} - 1}{0{,}035}\, 239 = 2803 \text{ ℳ } 81 \text{ ₰}$$

angewachsen; die Anstalt erleidet einen „Schaden" von 1061 ℳ 32 ₰. Tritt der Todesfall im 80. Lebensjahre ein, nach Einzahlung von 30 Jahresprämien, so werden ausgezahlt:

an versichertem Kapital	1000 ℳ
an Prämienrückgewähr $30 \times 258{,}12$	7743 „ 60 ₰
an 2% Zinsen von den Prämien $(30+29+28+\cdots+1)\,5{,}16$	2400 „ 51 „
zusammen	11144 ℳ 11 ₰;

die bis dahin vereinnahmten Nettoprämien sind zu dem Kapitale

$$\frac{1{,}035^{30}-1}{0{,}035}\,239 = 12\,625 \text{ ℳ } 11 \text{ ₰}$$

angewachsen; die Anstalt „gewinnt" also bei diesem Falle 1481 ℳ.

256. Beispiele, verbundene Leben betreffend.

1) Einseitige Überlebensrente, zahlbar an (x) vom Tode des (y) ab, gegen einmalige Prämie A und Rückgewähr der Bruttoprämie $kA+c$, im Falle (x) früher sterben sollte.

Die Anstalt verpflichtet sich durch diesen Vertrag zur Zahlung der Überlebensrente $a_{x|y}$ und zu der einseitigen Überlebensversicherung $A^{\,1}_{xy}$ im Betrage $kA+c$; die Gegenleistung besteht in der Nettoprämie A. Es ergibt sich also die Gleichung:

$$a_{y|x} + A^{\,1}_{xy}(kA+c) = A,$$

aus welcher

$$A = \frac{a_x - a_{xy} + cA^{\,1}_{xy}}{1 - kA^{\,1}_{xy}} \tag{60}$$

folgt.

Beispiel. Ein 50-jähriger Mann versichert seiner um 10 Jahre jüngeren Frau eine nach seinem Tode beginnende Leibrente von 800 ℳ mit der Maßgabe, daß ihm das hierfür eingezahlte Kapital unverkürzt rückerstattet werde, wenn die Frau vor ihm sterben sollte. Bei der Berechnung der Bruttoprämie soll $k = 1{,}06$ und $c = 0{,}1$ angenommen werden.

Mit den Grundlagen der Tafel III ist

$$a_{40} = 17{,}104,$$

ferner nach Nr. 237

$$a_{50,\,40} = 12{,}278,$$

$$A_{50,\,\overset{1}{40}} = 0{,}19794;$$

mit diesen Daten gibt (60) die einmalige Nettoprämie

$$800 \cdot 6{,}1264 = 4901{,}14 \text{ ℳ};$$

aus dieser berechnet sich die Bruttoprämie

$$800\,(1{,}06 \cdot 6{,}1264 + 0{,}1) = 5275{,}20 \text{ ℳ}.$$

Von der Nettoprämie entfallen auf die Hauptversicherung rund 3860, auf die Rückgewähr 1040 ℳ.

2) Einseitige Überlebensversicherung auf das Leben (x) zugunsten des (y) gegen einmalige Prämie und Rückgewähr derselben, wenn (y) vor (x) sterben sollte.

Die Anstalt zahlt dem (y) das Kapital 1 aus nach dem Ableben von (x), eventuell diesem die kapitalische Einzahlung $kA+c$, wenn (y) früher sterben sollte; die Leistung des Versicherungsnehmers ist mit A anzusetzen. Aus der so gebildeten Gleichung

$$A_{\overset{1}{x}y} + A_{x\overset{1}{y}}(kA+c) = A$$

folgt:

$$A = \frac{A_{\overset{1}{x}y} + c\,A_{x\overset{1}{y}}}{1 - k\,A_{x\overset{1}{y}}}. \tag{61}$$

Hätte man die Zahlen $M_{\overset{1}{x}y}$ [Nr. 237, (79), (80)], sowie D_{xy} [Nr. 226, (53)] gebildet, so fände man mit Hilfe derselben

$$A = \frac{M_{\overset{1}{x}y} + c\,M_{x\overset{1}{y}}}{D_{xy} - k\,M_{x\overset{1}{y}}}. \tag{62}$$

Beispiel. Ein 50-jähriger Mann versichert seiner um 10 Jahre jüngeren Gattin ein Kapital von 2000 *M*, das sie nach seinem Tode erhält; sollte sie vor ihm sterben, so wird ihm die kapitalische Einzahlung rückerstattet.

Aus den Grundlagen der Tafel III ergab sich in Nr. 237:

$$A_{\overset{1}{50},40} = 0{,}38707,$$

$$A_{50,\overset{1}{40}} = 0{,}19794;$$

nimmt man wie im vorigen Beispiel $k = 1{,}06$ und $c = 0{,}1$ an, so berechnet sich die Nettoprämie zu

$$2000 \cdot 0{,}51490 = 1029{,}79 \text{ M},$$

daraus die Bruttoprämie

$$2000\,(1{,}06 \cdot 0{,}51490 + 0{,}1) = 1291{,}58 \text{ M}.$$

Die Nettoprämie verteilt sich derart, daß 774,14 *M* auf die Hauptversicherung und 265,65 *M* auf die Rückgewähr entfallen.

3) Einseitige Überlebensversicherung auf das Leben (x) zugunsten des (y) gegen jährliche Prämienzahlung mit Rückgewähr der eineingezahlten Prämienbeträge, wenn (y) vor (x) sterben sollte.

Die Rückgewähr bedeutet jetzt eine steigende Überlebensversicherung auf den Tod von (y) zugunsten des (x), beginnend mit der einfachen Bruttoprämie $kP+c$ und um ihren Betrag jährlich steigend; die Leistung des Versicherungsnehmers ist als Verbindungsrente vom Betrage der Nettoprämie zu rechnen. Dies ergibt den Ansatz:

$$A_{\overset{1}{x}y} + (kP+c)\,(IA)_{x\overset{1}{y}} = P a_{xy},$$

und daraus folgt:

$$P = \frac{A_{\overset{1}{x}y} + c\,(IA)_{x\overset{1}{y}}}{a_{xy} - k\,(IA)_{x\overset{1}{y}}} \tag{63}$$

$$= \frac{M_{\overset{1}{x}y} + c\,R_{x\overset{1}{y}}}{N_{xy} - k\,R_{x\overset{1}{y}}}, \tag{64}$$

wobei

$$R_{x\overset{1}{y}} = M_{x\overset{1}{y}} + M_{x+1\,\overset{1}{y+1}} + M_{x+2\,\overset{1}{y+2}} + \cdots. \tag{65}$$

III. Abschnitt. Prämienreserven.

§ 1. Theorie der Prämienreserve.

257. Begriffsentwicklung. Die Nettoprämien eines Bestandes gleichartiger Versicherungen, mag der Modus ihrer Einzahlung welcher immer sein, sind stets so bemessen, daß sie mit ihren nach dem adoptierten Prozentsatz zuwachsenden Zinsen und Zinseszinsen gerade ausreichen, die versicherten Summen aufzubringen, vorausgesetzt, daß die Sterblichkeit genau nach der zugrunde gelegten Tafel verläuft.

In bezug auf den Zufluß der Prämien und den Abfluß der Versicherungssummen sind drei Fälle denkbar.

Der erste Fall besteht darin, daß Zufluß und Abfluß einander, wenigstens periodenweise[1]), das *Gleichgewicht* halten. Dies fände bei natürlicher Prämienzahlung statt, wo eine solche möglich ist (Nr. 250). Der Fonds, der sich am Beginn eines Versicherungsjahres aus den eingelaufenen Nettoprämien bildet, wird am Ende des Jahres nebst seinen inzwischen zugewachsenen Zinsen zur Deckung der eingetretenen Schäden gerade aufgebraucht.

Der zweite Fall ist dadurch gekennzeichnet, daß der Zufluß an Prämien und ihren Zinsen den Abfluß von Versicherungssummen derart *überwiegt*, daß immer ein Fonds vorhanden ist, der erst in dem Augenblicke erschöpft wird, wo die letzte Versicherung des Bestandes abläuft. Der in einem bestimmten Zeitpunkte vorhandene Fonds, der aus dem Überwiegen der eingezahlten Prämien und ihrer Zinsen über die successive ausgezahlten Versicherungssummen entspringt, heißt die diesem Zeitpunkte entsprechende *Prämienreserve.*

Durch einen Blick in die Zukunft kann man sich von ihr noch eine andere Vorstellung bilden. Dort, wo sich eine Prämienreserve angesammelt hat, müssen die Prämieneinzahlungen die ausgezahlten Versicherungssummen *vorher* überwogen haben; da schließlich Gleich-

1) Weil stetige Einzahlung der Prämien und Auszahlung von Versicherungssummen praktisch nicht ausführbar sind.

gewicht oder völlige Aufzehrung des Fonds stattfinden muß, so werden notwendig *nachher* die Einzahlungen von den Auszahlungen überwogen werden. Hiernach stellt sich die Prämienreserve als die Ergänzung dar, welche erforderlich ist, um den Wert der noch zu gewärtigenden Prämieneinzahlungen auf den Wert der noch ausstehenden Auszahlungen zu bringen.

Theoretisch ist auch der dritte Fall eines solchen Einlaufes der Prämien möglich, daß zeitweilig nicht die zureichenden Mittel vorhanden sind, um die fällig gewordenen Versicherungssummen zur Auszahlung zu bringen. Die Anstalt müßte dann das Fehlende jeweilig vorschußweise ergänzen; die geleisteten Vorschüsse samt den Zinsen würden ihr zu einer Zeit, wo sich wieder genügende Fonds aus den eingezahlten Prämien angesammelt haben, refundiert werden. Die Fehlbeträge, die sich bei solcher Gebarung zeitweilig herausstellen, wären als *negative Prämienreserve* zu bezeichnen.

Von diesen drei Fällen hat eigentlich nur der zweite praktische Bedeutung; denn die natürliche Prämienzahlung kommt nur ganz ausnahmsweise vor, und die fast ausnahmslose Befolgung des in Nr. 250 schon erwähnten Grundsatzes, daß eine Anstalt niemals an einen Versicherten Vorschüsse leisten soll, verhindert das Auftreten von negativen Prämienreserven.

Den beiden Auffassungen der Prämienreserve entsprechen die beiden *Hauptmethoden* ihrer Berechnung: die eine Methode, die *retrospektive*, stützt sich auf die bereits abgelaufene Versicherungszeit, die zweite, die *prospektive*, auf den zukünftigen Verlauf. Beide Methoden stellen die Prämienreserve als eine Differenz dar, wobei der Subtrahend eventuell auch Null sein kann.

Nach der *retrospektiven Methode* erscheint die Prämienreserve als *Differenz zwischen den vereinnahmten Prämien und den erfolgten Auszahlungen;* nach der *prospektiven Methode* ist sie der *Unterschied zwischen den zu gewärtigenden Auszahlungen und den zu gewärtigenden Prämieneinnahmen, alle Beträge auf den Zeitpunkt der Reserveberechnung reduziert.*

Es könnte scheinen, als ob zwischen den beiden Methoden ein prinzipieller Unterschied bestünde in dem Sinne, daß die erste mit vergangenen, also bekannten Tatsachen, die zweite dagegen mit dem ungewissen zukünftigen Verlauf rechnet. Dem ist jedoch nicht so; den Ausgangspunkt für die Berechnung der Prämienreserve eines bestimmten Augenblickes bildet der zu dieser Zeit vorhandene Bestand von Versicherungen, und das Mittel der Berechnung sind die angenommenen Versicherungsgrundlagen, also die statistischen Tafeln und der Zinsfuß.

Dieser Gedanke bedarf noch der näheren Ausführung. Wäre ein eben gebildeter Bestand gleichartiger Versicherungen und der Modus

der Prämienzahlung gegeben, und wüßte man im voraus, daß er sich genau nach den gewählten Grundlagen entwickeln werde, so könnte für jeden künftigen, überhaupt in Betracht kommenden Moment die Prämienreserve a priori angegeben werden, und es wäre für das Resultat gleichgiltig, welcher Methode man sich dabei bediente; auch der Bestand an Versicherten zu jenem Zeitpunkte ließe sich voraussagen. Die Wirklichkeit wird aber von dieser Voraussage in der Regel abweichen, der Bestand wird ein anderer sein, als es den Grundlagen entsprechen würde. Wollte man nun die retrospektive Rechnung nach dem wirklichen Verlauf machen, so müßte sie ein anderes Resultat ergeben als die prospektive Methode, die immer nur auf die Grundlagen gestützt werden kann. Man macht daher auch die retrospektive Rechnung nach dem eben herrschenden Bestande und nach den Grundlagen, geht also dabei gewissermaßen von einem *fingierten Anfangsbestande* aus statt von dem wirklichen.

Unter solchen Verhältnissen ergeben beide Methoden dasselbe Resultat. Die prospektive Methode ist die weitaus gebräuchlichere, bei vielen Versicherungen auch die einfachere; nur bei manchen komplizierteren Versicherungskombinationen, insbesondere solchen mit Prämienrückgewähr, ist die retrospektive Methode vorzuziehen.

Die Entwicklung des Begriffes der Prämienreserve ging von der Vorstellung eines anfänglichen Bestandes gleichartiger Versicherungen aus; die Gleichartigkeit besteht in dem gleichen Alter der Versicherten, in gleichen Versicherungssummen und einerlei Zahlungsmodalität der Prämien. Unter solchen Voraussetzungen waren alle Versicherungen, die zu einem bestimmten späteren Termin noch zu Recht bestehen, an der Ansammlung der diesem Termine entsprechenden Prämienreserve in gleicher Weise beteiligt; es entfällt daher auf jede der entsprechende aliquote Teil der Reserve. In diesem Sinne spricht man von einer *Einzelreserve* oder von der Prämienreserve einer einzelnen Versicherung im Gegensatze zur *Gesamtreserve.*

Die Gesamtreserve einer Anstalt ist die Summe der den einzelnen Versicherungen entsprechenden Einzelreserven.

Hiernach erscheint die Bestimmung der Gesamtreserve, die eine wichtige Bilanzpost bildet, auf die Berechnung der Einzelreserven zurückgeführt. Indessen empfiehlt es sich dort, wo starke Bestände gleichartiger Versicherungen vorhanden sind, für diese die Gesamtreserve zu ermitteln; man bezeichnet diesen Vorgang als *Gruppenrechnung* gegenüber der Einzelrechnung.

Ohne auf die Frage, ob und wann der *einzelne* Versicherte auf die ihm entsprechende Reserve einen Anspruch hat, — daß die Gesamtreserve Eigentum der Gesamtheit der Versicherten ist, geht aus dem Begriff hervor — nehmen wir an, daß dem wirklich so sei. Unter dieser Vorstellung kann die Einzelreserve einer Versicherung

in einem bestimmten Zeitpunkte auch als *Wert* oder *Zeitwert der* zugehörigen *Police* bezeichnet werden.

Die Prämienreserve einer Versicherung was immer für einer Art, die eine Person (x) abgeschlossen hat, m Jahre nach dem Abschluß werde mit ${}_mV_x$ bezeichnet. Beim Abschlusse selbst stellt sich diese Reserve als eine Anwartschaft dar, abhängig von dem Erleben des Alters $x + m$; sie hat daher zu dieser Zeit den Wert:

$$\frac{D_{x+m}}{D_x}\,{}_mV_x.$$

258. Prämienreserve bei einmaliger Prämienzahlung. Bei kapitalisch begründeten Versicherungen gibt die prospektive Methode unmittelbar Aufschluß über die Größe der zu einer bestimmten Zeit erforderlichen Prämienreserve. Da nämlich weitere Einzahlungen nicht stattfinden, muß für jeden Versicherten der dieser Zeit entsprechende Wert seiner Versicherung im Reservefonds vorhanden sein.

Es ist also die Prämienreserve einer durch einmalige Prämie begründeten Versicherung gleich dem durch die abgelaufene Zeit abgeänderten Wert der Versicherung.

An dem Beispiel der Erlebensversicherung soll die Richtigkeit dieses Satzes auch durch die Rechnung erwiesen werden.

Angenommen, l_x Personen des Alters x hätten sich auf den Erlebensfall zum Alter $x+n$ auf das Kapital 1 durch Einzahlung der einmaligen Prämie

$${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

versichert. Dadurch ist ein Fonds in der Höhe $l_x\,{}_nE_x$ entstanden, der in $m\,(< n)$ Jahren, da inzwischen keine Auszahlungen stattfinden, mit Zinseszinsen auf die Höhe

$$l_x\,{}_nE_x(1 + i)^m$$

anwächst. Die Zahl der Versicherten sinkt bis dahin infolge der eingetretenen Sterbefälle auf l_{x+m}; auf jeden davon entfällt daher die Prämienreserve

$${}_mV_x = \frac{l_x\,{}_nE_x(1 + i)^m}{l_{x+m}} = \frac{l_x\,{}_nE_x}{v^m\,l_{x+m}} = \frac{D_x\,{}_nE_x}{D_{x+m}};$$

ersetzt man ${}_nE_x$ durch seinen obigen Wert, so wird

$${}_mV_x = \frac{D_{x+n}}{D_{x+m}} = {}_{n-m}E_{x+m}, \tag{1}$$

in Übereinstimmung mit dem ausgesprochenen Satze.

Die Anwendung des Satzes auf verschiedene Kombinationen bietet keine Schwierigkeit, weil es sich immer nur um die Angabe des jeweiligen Versicherungswertes handelt.

Eine kapitalisch begründete lebenslängliche Todesfallversicherung auf das Leben (x) hat nach m Jahren die Reserve

$$_mV_x = A_{x+m}, \qquad (2)$$

eine ebenso begründete, auf n Jahre abgekürzte Todesfallversicherung die Reserve

$$_mV_x = {}_{|n-m}A_{x+m}. \qquad (3)$$

Zu einer kapitalisch begründeten, um n Jahre aufgeschobenen Leibrente für das Leben (x) gehört nach m Jahren die Reserve

$$_mV_x = {}_{n-m|}a_{x+m}, \quad \text{wenn} \quad m < n, \qquad (4^*)$$

dagegen die Reserve

$$_mV_x = a_{x+m}, \quad \text{wenn} \quad m > n; \qquad (4^{**})$$

denn im ersten Falle ist die Rente noch um $n - m$ Jahre aufgeschoben, im zweiten Falle bereits flüssig; beidemal hat der Versicherte das Alter $x + m$ erreicht. Die Formel (4^{**}) gilt für das Ende des m-ten Jahres, unmittelbar vor Auszahlung eines Rentenbetrages.

259. Prämienreserve bei jährlicher Prämienzahlung. Ist die Dauer der Prämienzahlung im voraus begrenzt, und fällt der Zeitpunkt der Reserveberechnung über die Periode der Prämienzahlung hinaus, so ergibt die prospektive Methode für die Prämienreserve ebenso wie im vorigen Falle den Wert der ferneren Versicherung. Wurde also beispielsweise eine aufgeschobene Rente durch jährliche Prämien während der Aufschubszeit von n Jahren erkauft, und soll die Prämienreserve nach m Jahren bestimmt werden, wobei $m > n$ ist, so hat man, gleichlautend mit (4^{**}),

$$_mV_x = a_{x+m}.$$

Wenn aber die Prämienreserveberechnung in die Periode der Prämienzahlung fällt, so erfordern beide Methoden, die prospektive wie die retrospektive, die Bestimmung zweier Versicherungswerte; die *prospektive* Methode:

1) den Wert der ferneren Versicherung,

2) den Wert der ferneren Prämienzahlung;

die *retrospektive* Methode:

1) den Wert der bereits vereinnahmten Prämien,

2) den Wert der bereits verausgabten Versicherungssummen; man rechnet diese beiden Werte für den Termin des Versicherungsabschlusses und reduziert sie hierauf auf den Termin der Prämienreserveberechnung (s. Schlußbemerkung in Nr. 257).

Der Wert 1) bildet in beiden Fällen den Minuend, der Wert 2) den Subtrahend jener Differenz, durch welche sich die Prämienreserve darstellt.

Als erstes Beispiel diene wieder die Erlebensversicherung auf das Kapital 1, abgeschlossen von einer Person (x) auf n Jahre gegen Zahlung der konstanten Prämie

$$ {}_nP_x = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} $$

während der Versicherungsdauer.

Nach der prospektiven Methode ergibt sich der Ansatz

$$ {}_mV_x = {}_{n-m}E_{x+m} - {}_{|n-m}a_{x+m}\ {}_nP_x; \qquad (\alpha) $$

denn die fernere Versicherung ist eine Erlebensversicherung für $(x+m)$ nur mehr auf $n-m$ Jahre, und die fernere Prämienzahlung eine auf $n-m$ Jahre abgekürzte Rente, abhängig vom Leben $(x+m)$ und vom Jahresbetrage der Prämie.

Die retrospektive Methode liefert den Ausdruck:

$$ {}_mV_x = \frac{D_x}{D_{x+m}}\ {}_{|m}a_x\ {}_nP_x; \qquad (\beta) $$

denn die bereits vereinnahmten Prämien haben zur Zeit des Versicherungsabschlusses den Wert ${}_{|m}a_x\ {}_nP_x$, der durch Multiplikation mit $\frac{D_x}{D_{x+m}}$ auf den Zeitpunkt der Reservebestimmung reduziert wird; eine Auszahlung aber hat noch nicht stattgefunden.

Die Übereinstimmung von (α) und (β) ist leicht zu erweisen. Die Ausführung von (α) in den Grundzahlen gibt nämlich:

$$ {}_mV_x = \frac{D_{x+n}}{D_{x+m}} - \frac{N_{x+m} - N_{x+n}}{D_{x+m}} \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} $$
$$ = \frac{D_{x+n}}{D_{x+m}} \frac{N_x - N_{x+m}}{N_x - N_{x+n}}, $$

und die Ausführung von (β) in gleicher Weise:

$$ {}_mV_x = \frac{D_x}{D_{x+m}} \frac{N_x - N_{x+m}}{D_x} \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} = \frac{D_{x+n}}{D_{x+m}} \frac{N_x - N_{x+m}}{N_x - N_{x+n}}. \qquad (\gamma) $$

Man kann dem letzten Ausdrucke noch eine einfachere Form geben, wenn man zu der Prämie

$$ {}_nP_x = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} $$

noch die andere

$$ {}_mP_x = \frac{D_{x+m}}{N_x - N_{x+m}} $$

hinzunimmt; man erkennt dann sogleich, daß

$$ {}_mV_x = \frac{{}_nP_x}{{}_mP_x}. \qquad (\delta) $$

Hätte man also zu jedem Alter die Jahresprämien für die verschiedenen Versicherungsdauern, so ergäbe sich die Reserve durch Division zweier Jahresprämien. Da jedoch Tafeln von solcher Vollständigkeit kaum vorhanden sein werden, so wird man in der Regel nach der Formel (α) rechnen.

Bei $m = n$ wird ${}_mV_x = 1$, wie es sein muß.

Als **zweites Beispiel** möge die vollständige Todesfallversicherung auf das Leben (x) gegen lebenslängliche Zahlung der Jahresprämie

$$P_x = \frac{A_x}{a_x} = \frac{M_x}{N_x}$$

behandelt werden.

Die prospektive Methode gibt den Ansatz:

$${}_mV_x = A_{x+m} - a_{x+m} P_x, \qquad (\gamma)$$

die retrospektive den Ansatz:

$${}_mV_x = \frac{D_x}{D_{x+n}} ({}_{|m}a_x P_x - {}_{|m}A_x), \qquad (\delta)$$

die keiner Begründung mehr bedürfen. Aber ihre Übereinstimmung soll erwiesen werden. Ersetzt man in (δ) ${}_{|m}a_x$ und ${}_{|m}A_x$ durch die Grundzahlen, so wird

$${}_mV_x = \frac{D_x}{D_{x+n}} \left(\frac{N_x - N_{x+m}}{D_x} P_x - \frac{M_x - M_{x+m}}{D_x} \right)$$

und wegen $N_x P_x = M_x$ weiter

$${}_mV_x = \frac{M_{x+m} - N_{x+m} P_x}{D_{x+m}} \qquad (\varepsilon)$$

$$= A_{x+m} - a_{x+m} P_x$$

in Übereinstimmung mit (γ).

Drückt man in (γ) A_{x+m} und P_x durch Renten aus, nämlich $A_{x+m} = 1 - da_{x+m}$ und $P_x = \frac{1 - da_x}{a_x}$, so ergibt sich nach einer Reduktion die bemerkenswerte Formel:

$${}_mV_x = 1 - \frac{a_{x+m}}{a_x}, \qquad (6)$$

welche die Prämienreserve durch Renten ausdrückt. In Nr. 262 wird auf diese Formel noch weiter eingegangen werden.

260. Prämienreserve bei unterjähriger Prämienzahlung. Es handle sich um die Prämienreserve einer lebenslänglichen Todesfallversicherung auf das Leben (x) nach n Jahren, wenn die Prämie in m-tel-Raten gezahlt wird. Ihr Zeichen sei ${}_nV_x^{(m)}$. Nach der prospektiven Methode hat man den Ansatz:

$${}_nV_x^{(m)} = A_{x+n} - a_{x+n}^{(m)} P_x^{(m)}. \qquad (7)$$

Bei ganzjähriger Prämienzahlung wäre die Reserve

$$ {}_nV_x = A_{x+n} - a_{x+n} P_x ; $$

es ist also der Unterschied

$$ {}_nV_x^{(m)} - {}_nV_x = a_{x+n} P_x - a_{x+n}^{(m)} P_x^{(m)} ; $$

zu seiner Beurteilung setze man in erster Näherung (s. Nr. 219):

$$ a_{x+n}^{(m)} = a_{x+n} - \frac{m-1}{2m}, \qquad P_x^{(m)} = \frac{A_x}{a_x - \frac{m-1}{2m}} = \frac{a_x P_x}{a_x - \frac{m-1}{2m}}, $$

woraus

$$ P_x = \frac{a_x - \frac{m-1}{2m}}{a_x} P_x^{(m)} ; $$

dadurch ergibt sich

$$ {}_nV_x^{(m)} - {}_nV_x = \frac{a_x - \frac{m-1}{2m}}{a_x} \cdot a_{x+n} P_x^{(m)} - \left(a_{x+n} - \frac{m-1}{2m}\right) P_x^{(m)} $$

$$ = \frac{m-1}{2m} P_x^{(m)} \left(1 - \frac{a_{x+n}}{a_x}\right), $$

woraus mit Rücksicht auf (6) folgt:

$$ {}_nV_x^{(m)} = {}_nV_x \left(1 + \frac{m-1}{2m} P_x^{(m)}\right). \tag{8} $$

Der eingeklammerte Faktor rechts nimmt bei $m = \infty$, d. i. unter Voraussetzung kontinuierlicher Prämienzahlung, den größten Wert an; die dieser Vorstellung entsprechende maximale Prämienreserve ist

$$ {}_n\overline{V}_x = {}_nV_x \left(1 + \frac{1}{2} \overline{P}_x\right). \tag{9} $$

Rechnet man $\overline{P}_x$ nach der Formel [s. Nr. 249, (25)]

$$ \overline{P}_x = \frac{A_x}{a_x - \frac{1}{2}}, $$

so findet man mit den Grundlagen der Tafel III beispielsweise:

$$ {}_n\overline{V}_{30} = 1{,}00878\, {}_nV_{30}, $$
$$ {}_n\overline{V}_{50} = 1{,}01905\, {}_nV_{50}; $$

und wenn die Auszahlung des versicherten Kapitales unmittelbar nach dem Tode bedungen wird, in welchem Falle für A_x zu setzen ist $\bar{A}_x = A_x\left(1 + \frac{i}{2}\right)$, so ergibt die Rechnung:

$$ {}_n\overline{V}_{30} = 1{,}00894\, {}_nV_{30}, $$
$$ {}_n\overline{V}_{50} = 1{,}01938\, {}_nV_{50}. $$

Es erhöht sich also die scharf gerechnete Prämienreserve gegenüber der normalen um 0,9, beziehungsweise 2 % der letzteren. Man sieht daher in der Praxis von diesem geringfügigen Unterschiede ab und rechnet ${}_nV_x$ statt ${}_nV_x^{(m)}$.

261. Bestimmung der Reserve nach einer nichtganzen Anzahl von Jahren. In der Regel fällt das Rechnungsjahr einer Versicherungsanstalt mit dem Solarjahre zusammen. Am Schlusse eines solchen haben die wenigsten Versicherungen gerade eine volle Anzahl von Jahren bestanden; bei den meisten besteht die Dauer aus einer ganzen Anzahl von Jahren und einem Jahresbruchteil. Es handelt sich nun darum, die Prämienreserve nach einer solchen Versicherungsdauer zu bestimmen.

Die Versicherungsdauer betrage $n + \frac{t}{m}$ Jahre, wo n eine ganze Zahl und $\frac{t}{m}$ einen echten Bruch bedeutet; die fragliche Reserve werde mit ${}_{n+\frac{t}{m}}V_x$ bezeichnet. Man wird sie genau genug bestimmen, wenn man sie zwischen die Reserve am *Beginn* und am *Ende* des $\overline{n+1}$-ten Jahres unter der Annahme linearer Änderung interpoliert. Nun ist die Reserve am Ende des n-ten Jahres ${}_nV_x$, am Beginn des $\overline{n+1}$-ten, *nach erfolgter Prämienzahlung*, erreicht sie die Höhe ${}_nV_x + P_x$, am Schlusse desselben ist sie ${}_{n+1}V_x$. Hiernach hat man die Näherungsformel:

$$\begin{aligned} {}_{n+\frac{t}{m}}V_x &= {}_nV_x + P_x + \frac{t}{m}\left({}_{n+1}V_x - {}_nV_x - P_x\right) \\ &= \left[{}_nV_x + \frac{t}{m}\left({}_{n+1}V_x - {}_nV_x\right)\right] + \frac{m-t}{m}P_x. \end{aligned} \tag{10}$$

Nach einer viel verbreiteten Praxis wird der in eckige Klammern eingeschlossene Posten allein als „Prämienreserve“ in den Büchern geführt[1]). Der zweite Teil, $\frac{m-t}{m}P_x$, welcher den über das Ende des Rechnungsjahres hinaus greifenden, also dem *nächsten* Rechnungsjahre zufallenden Anteil der letzt*gezahlten* Jahresprämie bedeutet, wird unter dem Namen „Prämienübertrag“ separat gerechnet und angewiesen (s. weiter unten Nr. 263).

Mit der Bemessung des Jahresbruchteiles wird man wohl nie über Zwölfteljahre (Monate) hinausgehen, weniger als 15 Tage vernachlässigend, mehr als 15 Tage für einen vollen Monat rechnend. Ja bei stärker besetzten Altersgruppen wird man sich, ohne einen großen Fehler befürchten zu müssen, noch eine weitergehende Vereinfachung

1) G. Bohlmann, Encykl. der mathem. Wissensch. I, p. 885 gebraucht für diesen Posten die Benennung „kaufmännische Prämienreserve“, zum Unterschiede von der „mathematischen“, die durch (10) ausgedrückt wäre.

gestatten und unter der Annahme gleichförmiger Verteilung der Prämienzahlungstermine über ein Rechnungsjahr so rechnen dürfen, als ob der Überschuß über die ganzen Jahre durchgängig $\frac{1}{2}$ Jahr wäre. Man hat dann als ersten Posten das arithmetische Mittel

$$\frac{{}_nV_x + {}_{n+1}V_x}{2}$$

und als zweiten Posten die halbe Jahresprämie

$$\frac{P_x}{2}.$$

Bei den Versicherungen, welche im Rechnungsjahre zugewachsen sind, kommt also am Ende dieses Jahres die Reserve $\frac{{}_1V_x}{2}$ einzustellen; man wird ein annähernd gleiches Resultat erzielen, wenn man bei den vor Jahresmitte abgeschlossenen Versicherungen den ganzen Betrag ${}_1V_x$ und bei den aus der zweiten Jahreshälfte stammenden keine Reserve einstellt.

262. Einfluß der Sterbetafel und des Zinsfußes auf die Prämienreserve. Der Einfluß, den die Wahl der Sterbetafel auf die Prämienreserve ausübt, läßt sich nicht mit wenigen Worten und allgemein charakterisieren; er ist für verschiedene Versicherungskombinationen dem Sinne und der Größe nach verschieden. Es sind mehrfache Untersuchungen nach dieser Richtung angestellt worden, ihre Resultate werden sich aber zur Bildung eines Urteiles in einem speziellen Falle kaum geeignet erweisen; das beste Mittel bleibt hier die Ausrechnung einer Anzahl von Spezialwerten.

Einige Betrachtungen dieser Art mögen hier Platz finden.

Es handle sich um lebenslängliche Todesfallversicherungen und um die Vergleichung zweier Sterbetafeln; die auf die zweite bezüglichen Werte sollen accentuiert werden.

Man hat dann

$${}_nV_x = 1 - \frac{a_{x+n}}{a_x}, \quad {}_nV_x' = 1 - \frac{a_{x+n}'}{a_x'}.$$

Für ein bestimmtes x und n wird also

$${}_nV_x \gtrless {}_nV_x',$$

jenachdem

$$\frac{a_{x+n}}{a_x} \lessgtr \frac{a_{x+n}'}{a_x'}$$

oder

$$\frac{a_x}{a_x'} \gtrless \frac{a_{x+n}}{a_{x+n}'}.$$

Hätte man also für alle Alter das Rentenverhältnis berechnet, so gestattete der Einblick in die Kolonne dieser Zahlen, für jedes Alter

und jede Versicherungsdauer über das Größenverhältnis der Prämienreserven auszusagen.

Zur näheren Untersuchung des Verlaufes von ${}_nV_x$ empfiehlt es sich, a_x zu zerlegen: $a_x = {}_{|n}a_x + v^n {}_np_x\, a_{x+n}$; dann schreibt sich

$${}_nV_x = 1 - \frac{1}{\frac{{}_{|n}a_x}{a_{x+n}} + v^n {}_np_x};$$

diese Darstellung hat den Vorteil, daß ${}_{|n}a_x$ und ${}_np_x$ nur von der Sterblichkeit *vor*, a_{x+n} nur von der Sterblichkeit *nach* dem Rechnungstermine abhängen.

Wenn sich die Kurve der Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x so abändert, wie es die punktierte Linie in Fig. 43 andeutet, d. h. wenn die Sterbenswahrscheinlichkeiten *vor* dem Rechnungstermine größer werden, so nehmen ${}_{|n}a_x$ und ${}_np_x$ und hiermit auch ${}_nV_x$ *ab*. Bei einer Abänderung im Sinne der Fig. 44, also bei Vergrößerung der Sterbenswahrscheinlichkeiten *nach* dem Rechnungstermine tritt das Umgekehrte ein.

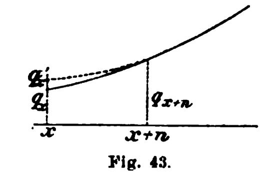


Fig. 43.

Nähme die Sterbenswahrscheinlichkeit durch die ganze Tafel zu, so ergäbe sich ein doppelter Einfluß auf ${}_nV_x$, aber nach zwei entgegengesetzten Richtungen, und es ließe sich theoretisch ein Gesetz der Zunahme angeben, bei dem die Reserven unverändert blieben; es brauchte eben nur

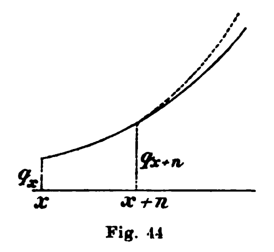


Fig. 44

$$\frac{a_x}{a_x'} = 1 + \varkappa$$

konstant zu sein für alle Alter. Man kann mit dieser Relation auf Lebenswahrscheinlichkeiten übergehen, wenn man

$$a_x' = 1 + v\,p_x' a_{x+1}',$$

und von einer ähnlichen Beziehung Gebrauch machend

$$a_{x+1}' = \frac{a_{x+1}}{1+\varkappa} = \frac{\frac{a_x - 1}{v\,p_x}}{1+\varkappa}$$

setzt; man findet dann nach einiger Rechnung

$$p_x' = p_x\left(1 - \frac{\varkappa}{a_x - 1}\right). \tag{11}$$

Wenn also zwei Tafeln in dieser Beziehung zu einander stünden, so ergäben sie für die Todesfallversicherung durchwegs gleiche Reserven.

Da a_x mit zunehmendem Alter abnimmt (wenigstens in den zumeist in Betracht kommenden Positionen), so ist das Verhältnis

$\frac{p_x'}{p_x}$ ein mit wachsendem x *abnehmendes*, p_x' fällt rascher ab als p_x, q_x' nimmt somit rascher zu als q_x.

Wenn hingegen p_x' statt nach dem Gesetze (11) sich derart ändert, daß es zu p_x ein konstantes Verhältnis behält, etwa

$$p_x' = p_x(1-k),$$

so wird p_x' nicht in so raschem Verhältnis abnehmen, q_x' also nicht so rasch über q_x wachsen als oben, wie es zur Erhaltung der gleichen Reserve erforderlich wäre; der Erfolg einer solchen Abänderung der p_x wird nach dem Vorausgeschickten in einer *Abnahme* der Prämienreserve sich ausdrücken. Das Umgekehrte fände statt, wenn $p_x' = p_x(1+k)$ (wobei $k > 0$) wäre für alle x.

Was den Einfluß des Zinsfußes anlangt, so ist zunächst zu bemerken, daß eine Verminderung des Abzinsungsfaktors, die aus einer Erhöhung des Zinsfußes entspringt, auf die Renten ebenso einwirkt wie eine Abminderung der Lebenswahrscheinlichkeiten in demselben Verhältnisse.

Setzt man nämlich $v' = v(1-k)$ und schreibt die mit diesem Abzinsungsfaktor gebildete Leibrente in der Form:

$$\begin{aligned} a_x' &= 1 + v' p_{x+1} + v'^2 p_{x+1} p_{x+2} + v'^3 p_{x+1} p_{x+2} p_{x+3} + \cdots \\ &= 1 + v[(1-k)p_{x+1}] + v^2[(1-k)p_{x+1}][(1-k)p_{x+2}] + \cdots, \end{aligned}$$

so ist die Richtigkeit der obigen Aussage unmittelbar zu erkennen.

Nun aber ist gezeigt worden, daß eine Abminderung der Lebenswahrscheinlichkeiten in konstantem Verhältnisse eine Abnahme der Prämienreserven zur Folge habe; mithin entspringt aus einer Erhöhung des Zinsfußes eine Verminderung der Prämienreserven bei der Todesfallversicherung.

Untersuchungen über den Einfluß der Sterbetafel und des Zinsfußes werden außer bei der Wahl der Grundlagen auch dann notwendig, wenn es sich um die *Konvertierung eines Versicherungsstockes*, d. i. um den Übergang zu neuen Grundlagen handelt; die vorhandene Prämienreserve muß dann auf die diesen Grundlagen entsprechende Höhe gebracht werden, was in der Regel nur durch Heranziehung angesammelter Sicherheitsfonds möglich ist.

263. Prämienüberträge und Schadenreserve. Totalreserve. In Nr. 261, (10), ist gezeigt worden, daß bei Versicherungen, bei welchen das Versicherungsjahr sich mit dem Rechnungsjahre nicht deckt — und das ist die Regel —, in der Prämienreserve ein Posten erscheint, der dort als „Prämienübertrag" bezeichnet und als derjenige Proportionalteil der *Netto*prämie erkannt wurde, der dem *nächsten* Rechnungsjahre zufällt.

Wenn man sich auf den in der Praxis vielfach eingehaltenen Standpunkt stellt, daß auch von den Zuschlägen, die auf den Nettoprämien lasten, in einem Rechnungsjahre nur jene Anteile verwendet und verrechnet werden sollen, die in dieses Jahr fallen, so ergibt sich die Konsequenz, *daß die Prämienüberträge von den Bruttoprämien zu nehmen sind.* Freilich dient dann ein Teil der so gerechneten Prämienüberträge nicht den eigentlichen Versicherungszwecken, sondern ist zur Deckung der Regieauslagen etc. des nächsten Verwaltungsjahres bestimmt.

Die Prämienreserveberechnung geht von der Annahme aus, daß am Beginne jedes Versicherungsjahres die *ganze* Jahresprämie bezahlt werde, auch dann, wenn unterjährige Prämienzahlung bedungen ist. In diesem letzteren Falle können am Bilanztage noch ein oder mehrere Raten ausständig sein, was zur Folge haben wird, daß der Prämienübertrag um die nicht bezahlten Raten verkürzt ist. Für eine einheitliche Rechnung ist es jedoch zweckmäßiger, die Überträge von den ganzen Jahresprämien zu rechnen und nicht bezahlte Raten, wo solche vorhanden sind, als *gestundet* in Abzug zu bringen. Die Prämienreserve stellt sich dann aus zwei Posten zusammen:

In das nächste Jahr fallende Quote der Jahresprämie.
Gestundete Prämienraten.

Differenz: Prämienübertrag.

Bei der Reserveberechnung wird weiter vorausgesetzt, daß alle in dem Rechnungsjahre fällig gewordenen Versicherungssummen ausbezahlt seien. In der Wirklichkeit ist diese Voraussetzung nicht erfüllt; es bleiben vielmehr, namentlich aus der dem Jahresende vorausgehenden Periode, Fälle übrig, bei welchen die Formalitäten und Vorbedingungen der Auszahlung bis zum Jahresschlusse nicht erfüllt werden können, außerdem auch strittige Fälle, deren Abwicklung ins nächste Jahr hinübergenommen werden muß. Für solche Fälle ist die Bereithaltung der erforderlichen Summen notwendig; diese bilden die *Schadenreserve*, einen mit Rücksicht auf etwaige unklare Fälle nicht genau feststellbaren Posten.

Der Fonds, den eine Anstalt am Schlusse eines Rechnungsjahres für die reinen Versicherungszwecke als vorhanden auszuweisen hat und den man als *Totalreserve* bezeichnen könnte, setzt sich also zusammen:

1) Aus der sogenannten (kaufmännischen) Prämienreserve (siehe Nr. 261);

2) aus den Prämienüberträgen;

3) aus der Schadenreserve.

Ist der Posten 2) aus den Bruttoprämien gerechnet, so ist die so bestimmte Totalreserve insofern kein *Nettofonds*, als sie auch einen Teil der Regiezuschläge des nächsten Verwaltungsjahres enthält.

264. Risikoprämie und Sparprämie. Mit der Prämienreserve hängen einige Begriffe zusammen, die geeignet sind, einen tieferen Einblick in das Wesen einer Versicherung zu gewähren; manche davon sind auch von praktischer Bedeutung.

Wir gehen zunächst von einer Versicherungsart aus, bei der die Auszahlungen erst in einem späteren festgesetzten Termine erfolgen oder beginnen (Erlebensversicherung, aufgeschobene Rente). Wenn eine solche Versicherung vor dem Termine infolge Ablebens der versicherten Person abläuft, so wird die für sie angesammelte Reserve frei in der Weise, daß sie nicht unmittelbar zur Erfüllung eines Versicherungszweckes Verwendung findet; aber einen Gewinn für die Anstalt bedeutet die so frei gewordene Reserve nicht, sondern sie dient dazu, um die Reserve der Überlebenden gleicher Kategorie auf die erforderliche Höhe zu heben.

Angenommen z. B., l_x Personen des Alters x hätten eine Erlebensversicherung auf das Kapital 1, zahlbar bei Erreichung des Alters $x+n$, gegen die einmalige Prämie

$$ {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} $$

abgeschlossen. Da d_x von den Personen im Laufe des ersten Jahres sterben, so wird die Summe $d_x\, {}_nE_x$ frei; *alle* Prämien sind aber erforderlich, um die Prämienreserve der l_{x+1} das erste Jahr überlebenden auf die richtige Höhe zu bringen; denn der aus den Einzahlungen gebildete Fonds $l_x\, {}_nE_x$ wächst bis zum Schlusse des Jahres zu

$$ \frac{l_x\, {}_nE_x}{v} $$

an, und hiervon entfällt auf jeden Überlebenden

$$ \frac{l_x\, {}_nE_x}{v\, l_{x+1}} = \frac{D_x}{D_{x+1}}\, {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_{x+1}}, $$

und das ist die richtige Prämienreserve nach einem Jahre. Ähnlich verhält es sich in jedem folgenden Jahre.

Anders steht es bei einer Todesfallversicherung. Hier dient die Prämienreserve, wann auch der Tod eintritt, zur Bezahlung der Versicherungssumme, und da sie deren Höhe in der Regel nicht erreicht, so ist eine Ergänzung auf das versicherte Kapital notwendig. Diese Ergänzung nennt man das *reduzierte Kapital.* Es beträgt am Schlusse des n-ten Jahres, wenn x das anfängliche Alter war,

$$ 1 - {}_nV_x. $$

Die natürliche Prämie für die Versicherung dieser Summe, zahlbar am Anfange des genannten Jahres, d. i.

$$ \frac{C_{x+n-1}}{D_{x+n-1}}(1 - {}_nV_x), \qquad (12?) $$

heißt die *Risikoprämie* der in Rede stehenden Versicherung für das betreffende Jahr.

Die Differenz zwischen der Jahresprämie $P_x = \frac{1}{a_x} - d$ und der Risikoprämie beträgt

$$\frac{1}{a_x} - d - \frac{C_{x+n-1}}{D_{x+n-1}}(1 - {}_nV_x)$$

$$= \frac{1}{a_x} - d - vq_{x+n-1}\frac{a_{x+n}}{a_x}$$

$$= \frac{1 - v(1 - p_{x+n-1})a_{x+n}}{a_x} - d$$

$$= \frac{1 + vp_{x+n-1}a_{x+n} - va_{x+n}}{a_x} - d$$

$$= \frac{a_{x+n-1} - va_{x+n}}{a_x} - d; \tag{13}$$

da nun

$${}_{n-1}V_x = 1 - \frac{a_{x+n-1}}{a_x}$$

$$v\,{}_nV_x = v - \frac{va_{x+n}}{a_x},$$

woraus

$$v\,{}_nV_x - {}_{n-1}V_x = \frac{a_{x+n-1} - va_{x+n}}{a_x} - d,$$

so liegt die Bedeutung jener Differenz darin, daß sie die Erhöhung der Reserve ${}_{n-1}V_x$ vom Schlusse des $\overline{n-1}$-ten Jahres auf die Reserve ${}_nV_x$ am Schlusse des n-ten Jahres bewirkt. Man bezeichnet daher (13) als *Sparprämie* für das n-te Versicherungsjahr.

Hiernach zerfällt jede *Jahresprämie* P_x in zwei von einem Versicherungsjahre zum nächsten sich ändernde Teile: in die *Risikoprämie*, bestimmt zur Versicherung des reduzierten Kapitales, wenn (x) in dem betreffenden Jahre sterben sollte, und in die *Sparprämie*, bestimmt zur Erhöhung der Prämienreserve auf den richtigen Betrag, wenn (x) das Jahr überleben sollte.

G. Bohlmann[1]) gibt für Risiko- und Sparprämie die folgenden allgemeinen, weil auch auf andere Versicherungsarten anwendbaren Definitionen. Ist p_n' die Wahrscheinlichkeit, daß das versicherte Kapital (oder die Rente) 1 im n-ten Versicherungsjahre fällig wird, p_n'' die Wahrscheinlichkeit, daß in diesem Jahre die Versicherung abläuft, V_n die Reserve am Schlusse dieses, V_{n-1} die Reserve am Ende des vorangehenden Jahres, so ist die Risikoprämie:

$$P_n' = v(p_n' - p_n'' V_n), \tag{14}$$

1) Encykl. d. mathem. Wissensch. I, p. 882.

die Sparprämie:

$$P_n'' = vV_n - V_{n-1}; \tag{15}$$

erstere stellt die auf den Jahresbeginn reduzierte Erwartung bezüglich der Auszahlung der Versicherungssumme und des Heimfalles der Reserve, letztere die auf denselben Zeitpunkt reduzierte Differenz der beiden Reserven. Ist P die jährlich gleichbleibende Prämie, so ist jedesmal $P = P_n' + P_n''$.

Bei der Todesfallversicherung ist $p_n' = p_n'' = q_{x+n-1}$; denn wenn der Versicherte im Laufe des Jahres stirbt, so ist sowohl die Versicherungssumme auszuzahlen wie auch die Reserve einzuziehen; daher

$$P_n' = vq_{x+n-1}(1 - V_n)$$

in Übereinstimmung mit (12).

Bei der Postnumerando-Leibrente ist $p_n' = p_{x+n-1}$, $p_n'' = q_{x+n-1}$; denn erlebt (x), nachdem er $x + n - 1$ Jahre alt geworden, auch noch das Alter $x + n$, so ist ihm am Schlusse des n-ten Jahres die Rente auszuzahlen, und stirbt er im Laufe des n-ten Jahres, so ist die am Schlusse desselben vorhandene Reserve $a_{x+n} - 1$ einzuziehen; hier hat man also

$$P_n' = v[p_{x+n-1} - q_{x+n-1}(a_{x+1} - 1)].$$

Aus den begrifflichen Bestimmungen geht hervor, daß (x), um sich auf das Kapital 1 für den Todesfall zu versichern, dies so einrichten könnte, daß er jährlich durch Erlag der Risikoprämie sich auf das jeweilige reduzierte Kapital versichert, die Sparprämie aber auf Zinseszins anlegt: wenn er stirbt, wird von der einen Seite das der Versicherungsdauer entsprechende reduzierte Kapital ausgefolgt, während die rückgelegten Sparprämien mit ihren Zinsen zu der derselben Dauer entsprechenden Prämienreserve angewachsen sind; beides gibt genau das Kapital 1.

Die Risikoprämie liegt einer Form der *Rückversicherung* zugrunde. Statt nämlich — und das ist die häufiger angewandte Form — einen Teil des versicherten Kapitales an eine andere Anstalt abzugeben und nur für den rückbehaltenen Teil die Prämienreserve anzusammeln, kann man auch so vorgehen, daß man die Prämienreserve für das ganze Kapital bildet und jährlich das reduzierte Kapital durch Bezahlung der Risikoprämie bei der rückversichernden Anstalt versichert.

§ 2. Prämienreserven verschiedener Versicherungskombinationen.

265. Prämienreserve der lebenslänglichen Todesfallversicherung. Für die Prämienreserve der gewöhnlichen Todesfallversicherung gegen lebenslängliche Prämienzahlung sind in Nr. 259 bereits drei Ausdrucksformen gefunden worden:

$$ {}_mV_x = A_{x+m} - a_{x+m} P_x \tag{16} $$

$$ {}_mV_x = \frac{M_{x+m} - N_{x+m} P_x}{D_{x+m}} \tag{17} $$

$$ {}_mV_x = 1 - \frac{a_{x+m}}{a_x}. \tag{18} $$

Aus der mittleren Formel läßt sich eine weitere praktisch gut verwendbare Darstellung ableiten; schreibt man nämlich

$$ {}_mV_x = \frac{M_{x+m}}{N_{x+m}} \frac{N_{x+m}}{D_{x+m}} - \frac{N_{x+m}}{D_{x+m}} P_x $$

und beachtet, daß

$$ \frac{M_{x+m}}{N_{x+m}} = P_{x+m}, \quad \frac{N_{x+m}}{D_{x+m}} = a_{x+m} $$

ist, so wird

$$ {}_mV_x = (P_{x+m} - P_x)\, a_{x+m}. \tag{19} $$

Die Richtigkeit dieses Ausdruckes ist versicherungstechnisch leicht einzusehen. Würde (x) erst, wenn er das Alter $x + m$ erreicht hat, die Versicherung abschließen, so hätte er die Jahresnettoprämie P_{x+m} zu zahlen; da er aber nur P_x zahlt, so gehen der Anstalt jährlich $P_{x+m} - P_x$ ab, und der Versicherungswert dieses Entganges, der durch die aufgespeicherte Reserve gedeckt sein muß, ist tatsächlich dieser gleich, nämlich $(P_{x+m} - P_x)\, a_{x+m}$.

Vermöge (18) ist

$$ {}_{m+m'}V_x = 1 - \frac{a_{x+m+m'}}{a_x}, $$

folglich

$$ 1 - {}_{m+m'}V_x = \frac{a_{x+m+m'}}{a_x} = \frac{a_{x+m}}{a_x} \frac{a_{x+m+m'}}{a_{x+m}} = (1 - {}_mV_x)(1 - {}_{m'}V_{x+m}). $$

Hiernach hat man

$$ 1 - {}_2V_x = (1 - {}_1V_x)(1 - {}_1V_{x+1}) $$

$$ 1 - {}_3V_x = (1 - {}_2V_x)(1 - {}_1V_{x+2}) = (1 - {}_1V_x)(1 - {}_1V_{x+1})(1 - {}_1V_{x+2}) $$

u. s. w., so daß allgemein:

$$ {}_mV_x = 1 - (1 - {}_1V_x)(1 - {}_1V_{x+1})(1 - {}_1V_{x+2}) \cdots (1 - {}_1V_{x+m-1}). \tag{20} $$

Diese Darstellung läßt erkennen, daß ${}_mV_x$ mit zunehmendem m beständig wächst, weil die binomischen Faktoren durchwegs echte Brüche sind.

Die folgende Tabelle, welche eine weitere Ausführung der in Nr. 247 mitgeteilten bildet, zeigt, wie sich die Gesamtreserve von 1273 Personen im Alter von 90 Jahren, die gegen jährliche Prämienzahlung für den Todesfall auf das Kapital 1 versichert sind, und wie

sich deren Einzelreserve von Jahr zu Jahr entwickelt. Der aus der zitierten Tabelle herübergenommene „Rest" bildet bereits die Gesamtreserve, und ihr Quotient, mit der Anzahl der Überlebenden als Divisor gebildet, liefert die Einzelreserve. Hiernach hat eine auf 100 ℳ lautende Police dieser Art, auf welche die jährliche Prämie von 34,12 ℳ zu zahlen ist, am Ende des ersten Jahres einen Wert von 10,6 ℳ, am Ende des sechsten Jahres einen Wert von 27,7 ℳ, am Ende des zwölften Jahres den Wert Null, da sie eben mit dem ganzen Betrage von 100 ℳ ausbezahlt wurde.

Versicherungsjahr	Überlebende	Gesamtreserve	Einzelreserve
	am Schlusse desselben		
1	871	47,50	0,055
2	575	60,71	0,106
3	366	56,86	0,155
4	222	44,09	0,199
5	129	31,02	0,240
6	71	19,66	0,277
7	37	11,42	0,309
8	19	6,88	0,362
9	9	3,83	0,426
10	4	2,14	0,535
11	1	0,63	0,63
12	0	0,00	0,000

266. Prämienreserve der lebenslänglichen Todesfallversicherung bei abgekürzter Prämienzahlung. Das Alter des Versicherten sei x, die Prämienzahlung habe mit dem Alter t aufzuhören, so daß am Beginne des t-ten Lebensjahres die letzte Prämie

$$P_x = \frac{M_x}{N_x - N_t}$$

gezahlt wird.

Während der Prämienzahlung, also für $n < t - x$, ist die Reserve

$$\begin{aligned} {}_nV_x &= A_{x+n} - {}_{t-n}a_{x+n}\, P_x \\ &= \frac{M_{x+n}}{D_{x+n}} - \frac{N_{x+n} - N_t}{D_{x+n}} \cdot \frac{M_x}{N_x - N_t}; \end{aligned} \tag{21}$$

nach abgeschlossener Prämienzahlung, also für $n \geqq t - x$, wird

$${}_nV_x = A_{x+n}. \tag{22}$$

267. Prämienreserve der gemischten Versicherung. Das Alter des Versicherten sei x, die Versicherung sei zum Alter t abgeschlossen und längstens bis zu diesem Alter sei die Jahresprämie

$$P_x = \frac{1}{{}_{t-x}a_x} - d$$

zu zahlen.

Die Prämienreserve nach n Jahren beträgt

$$
\begin{aligned}
{}_nV_x &= A_{x+n,\,\overline{t-x-n}|} - {}_{t-x-n}a_{x+n}\,P_x \\
&= 1 - d\;{}_{|t-x-n}a_{x+n} - {}_{|t-x-n}a_{x+n}\left(\frac{1}{{}_{|t-x}a_x} - d\right) \\
&= 1 - \frac{{}_{|t-x-n}a_{x+n}}{{}_{|t-x}a_x}\,;
\end{aligned}
\tag{23}
$$

die Formel hat dieselbe Struktur, wie die Formel (18), Nr. 265, bei der gewöhnlichen Todesfallversicherung, mit dem Unterschiede, daß die Renten bei dem Alter t aufhören.

Bei $n = t - x$ wird ${}_nV_x = 1$, weil ${}_0a_t = 0$ ist.

Mit den Grundlagen der Tafel V ergibt sich, wenn $x = 30$, $t = 65$ ist,

$$
{}_{10}V_{30} = 1 - \frac{{}_{|65-40}a_{40}}{{}_{|65-30}a_{30}} = 1 - \frac{14{,}45}{17{,}55} = 0{,}17664,
$$

$$
{}_{20}V_{30} = 1 - \frac{{}_{|65-50}a_{50}}{{}_{|65-30}a_{30}} = 1 - \frac{10{,}26}{17{,}55} = 0{,}41538;
$$

eine auf 1000 ℳ lautende Police hat also bei dem Alter 40 des Versicherten den Wert 176,64 ℳ, der bis zum 50. Jahre steigt auf 415,38 ℳ.

268. Prämienreserve der Erlebensversicherung mit Prämienrückgewähr. Es habe (x) sich auf das Kapital 1 versichert für den Fall, daß er das Alter $x + n$ erlebt, mit der Maßgabe, daß im Falle früheren Todes die eingezahlten Nettoprämien rückerstattet werden. Die für diese Versicherung während der Versicherungsdauer oder bis zum früher eingetretenen Tode zu zahlende Nettoprämie sei ${}_nP_x$. Es ist die Prämienreserve nach $m\,(< n)$ Jahren zu ermitteln.

Wie schon bemerkt worden, empfiehlt sich bei Versicherungen mit Rückgewähr die retrospektive Methode.

Nach dieser bewerten sich die Einnahmen der Anstalt, auf den Zeitpunkt des Abschlusses reduziert, mit ${}_{|m}a_x\,{}_nP_x$; die Ausgaben betragen $(IA)_{x,\overline{m}|}\,{}_nP_x$, weil die Prämienrückgewähr sich als eine steigende abgekürzte Ablebensversicherung darstellt. Die auf denselben Zeitpunkt bezogene Prämienreserve hat den Wert $\frac{D_{x+m}}{D_x}\,{}_mV_x$. Es ergibt sich also der Ansatz:

$$
\frac{D_{x+m}}{D_x}\,{}_mV_x = {}_nP_x\left({}_{|m}a_x - (IA)_{x,\overline{m}|}\right).
\tag{α}
$$

Nun ist nach Nr. 216, (27):

$$
(IA)_{x,\overline{m}|} = \frac{R_x - R_{x+m} - m\,M_{x+m}}{D_x},
$$

ferner nach Nr. 255, (55) [wegen der Nettoprämienrückgewähr $k = 1$, $c = 0$ gesetzt]:

$${}_nP_x = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n} - (R_x - R_{x+n} - n\,M_{x+n})};$$

substituiert man den ersten dieser Werte in die obige Formel, gleichzeitig die darin auftretende Rente durch die Grundzahlen ausdrückend, so ergibt sich:

$${}_mV_x = {}_nP_x \frac{N_x - N_{x+m} - (R_x - R_{x+m} - m\,M_{x+m})}{D_{x+m}}, \tag{24}$$

d. i. mit Rücksicht auf den Wert von ${}_nP_x$:

$${}_mV_x = \frac{{}_nP_x}{{}_mP_x}. \tag{25}$$

Diese Formel stimmt der Gestalt nach mit jener (5) in Nr. 259 überein, wo sie sich auf die gewöhnliche Erlebensversicherung bezog.

Wäre Rückersatz der *Brutto*prämien bedungen, so müßte in dem Ansatz (α) rechts im zweiten Gliede die Nettoprämie durch die Bruttoprämie ersetzt werden; bezeichnet man sie mit ${}_nP_x'$, so wäre von der Gleichung auszugehen:

$$\frac{D_{x+m}}{D_x}\,{}_mV_x = {}_{|m}a_x\,{}_nP_x - (IA)_{x,\overline{m|}}\,{}_nP_x'. \tag{β}$$

269. Prämienreserve der gemischten Versicherung mit Prämienrückgewähr. Die Prämienbestimmung für eine solche Versicherung ist in Nr. 254, 9), respektive Nr. 255, 4) erfolgt, jenachdem die Netto- oder die Bruttoprämien rückgewährt werden. Die Nettoprämie heiße in jedem Falle P, die Bruttoprämie P'. Es handle sich um die Reserve nach m Jahren.

Wenn die Rückgewähr *auch* im Todesfalle erfolgt, so bewerten sich die Einnahmen der Anstalt mit ${}_{|m}a_x\,P$, ihre Ausgaben während der m Jahre mit ${}_mA_x + (IA)_{x,\overline{m|}}\,P$; denn ${}_{|m}A_x$ ist der Wert der Auszahlungen an die Gestorbenen, und $(IA)_{x,\overline{m|}}\,P$ der Wert der rückgewährten *Netto*prämien, alles auf den Zeitpunkt des Versicherungsabschlusses reduziert. Zu dieser Zeit hat die Prämienreserve den Wert $\frac{D_{x+m}}{D_x}\,{}_mV_x$. Man hat also

$$\frac{D_{x+m}}{D_x}\,{}_mV_x = {}_{|m}a_x\,P - {}_{|m}A_x - (IA)_{x,\overline{m|}}\,P$$
$$= \frac{(N_x - N_{x+m})\,P - (M_x - M_{x+m}) - (R_x - R_{x+m} - m\,M_{x+m})\,P}{D_x},$$

woraus sich berechnet:

$${}_mV_x = \frac{(N_x - N_{x+m})\,P - (M_x - M_{x+m}) - (R_x - R_{x+m} - m\,M_{x+m})\,P}{D_{x+m}}. \tag{26}$$

Werden *Brutto*prämien rückgewährt, so tritt im dritten Gliede des Zählers P' an die Stelle von P.

Findet Rückgewähr *nur* im Erlebensfalle statt, so entfällt dieses dritte Glied, weil bis dahin keine Rückgewährleistungen erfolgt sind; diese stellen sich dann erst bei Ablauf der Versicherungen ein und kämen daher nur bei Anwendung der prospektiven Methode in Betracht.

§ 3. Rückkauf, Reduktion und Abänderung von Versicherungen.

270. Rückkaufswert einer Police. Die Berechnung der Prämienreserve des ganzen Bestandes einer Versicherungsanstalt ist eine der wichtigsten Vorarbeiten für die Aufstellung der Bilanz. Aus dieser soll nämlich zu ersehen sein, daß sich die Anstalt im Besitze solcher Fonds befindet, die sie bei Zuziehung der künftigen Prämienzahlungen in den Stand setzen, allen den Versicherten gegenüber eingegangenen Verpflichtungen nachzukommen. Den Grundstock dieser Fonds bildet aber die Gesamtprämienreserve.

Die Kenntnis einer Einzelreserve für einen bestimmten Termin wird notwendig, wenn es sich um Vornahme gewisser versicherungstechnischer Transaktionen handelt; solche sind der Policenrückkauf, die Policenreduktion und die Abänderung einer Versicherung.

Die Prämienreserve eines Versicherungsbestandes bildet eine Schuld der Anstalt an die Gesamtheit der Versicherten. Würde erstere alle Verträge lösen, so wäre sie verpflichtet, die Prämienreserve an die letztere auszufolgen. Gegen Übernahme der Prämienreserve und des Rechtes auf den Bezug der weiteren Prämienzahlungen könnte eine andere Anstalt sich verpflichten, die eingegangenen und noch aufrechten Verträge zu erfüllen.

Die Beantwortung der Frage aber, ob der einzelne Versicherte im Falle der vorzeitigen Lösung des Vertrages ein Anrecht auf die seiner Police entsprechende Prämienreserve habe, erfordert ein genaues Eingehen auf die Natur des Vertrages.

Bei Versicherungskombinationen, wo die Anstalt dem Einzelnen gegenüber nicht in die Lage zu kommen braucht, eine Auszahlung zu leisten, hat der Versicherte, der die Police aufgibt, d. h. die ferneren Prämienzahlungen einstellt, keinen rechtlichen Anspruch auf die Reserve. Wenn z. B. l_x Personen des Alters x Erlebensversicherungen auf das Kapital 1, zahlbar nach n Jahren, abschließen, etwa gegen jährliche Prämienzahlung, so ist die Prämie schon mit Rücksicht darauf bemessen, daß die von den vor Erreichung des Zieles Sterbenden geleisteten Einzahlungen verfallen und mit verwendet werden zur Befriedigung der das Alter $x + n$ Erlebenden. Wenn

daher ein Versicherter in der Zwischenzeit zurücktritt, so ist wohl eine Reserve für ihn vorhanden, aber einen Anspruch auf sie hat er nicht; denn stürbe er vor Erreichung des Alters $x+n$, ohne die Versicherung aufgegeben zu haben, so verfiele die Reserve nach den vorigen Erwägungen; bei seinem Austritt ist aber nicht zu ermessen, ob er vor Ablauf der Versicherungsdauer sterben oder das versicherte Alter erleben werde; bei endgiltiger Lösung des Vertragsverhältnisses erlangt die Anstalt auch keine Kenntnis darüber.

Anders steht es bei Versicherungen, wo die Anstalt einmal in die Lage kommen muß, zu zahlen, wie bei lebenslänglichen Todesfall-, bei gemischten, bei Erlebensversicherungen mit Prämienrückgewähr im Falle vorzeitigen Todes u. a. Hier kommt bei einer Lösung des Vertrages auch eine sichere Leistung der Anstalt in Wegfall, und daraus ergibt sich der Anspruch auf eine Abfindung. Wie groß diese sein soll, ist keine rein mathematische Frage, hängt vielmehr von verschiedenen Rücksichten ab; daher haben sich verschiedene Grundsätze für die Bemessung der Abgangsentschädigung, des *Policenrückkaufswertes*, ausgebildet. In der Regel aber bildet die Prämienreserve die Grundlage hierfür, die, wenn jene Rücksichten nicht obwalteten, den Rückkaufswert bestimmen würde.

Wird eine Versicherung sehr früh aufgegeben, so kann es geschehen, daß durch die vereinnahmten Zuschläge die ersten Unkosten noch nicht gedeckt sind. Wird eine Todesfallversicherung sehr spät fallen gelassen, zu einer Zeit, wo die natürliche Prämie die jährlich gleichbleibende übertrifft, so muß die Prämienreserve mit einem Teile noch zur Deckung der in dem betreffenden Jahre erwachsenen Schäden herangezogen werden. Mit dem Auflassen einer Versicherung vermindert sich der Bestand und erhöht sich das Risiko der Anstalt. Im Grunde aller dieser Erwägungen wird nur ein Teil der Prämienreserve als Rückkaufswert bewilligt und das zumeist erst dann, wenn die Versicherung mindestens durch eine festgesetzte Dauer in Kraft war; z. B. ein von der Dauer (bis auf deren Minimum) unabhängiger Bruchteil ($\frac{3}{4}$), oder ein mit der Dauer steigender Anteil (z. B. von 60 bis 100%), oder die Reserve gekürzt um den Versicherungswert eines Prozentteiles der noch aushaftenden Prämienzahlungen. Mitunter wird auf der Police ein Schema der Rückkaufswerte zu verschiedenen Terminen angegeben, eine empfehlenswerte Einrichtung.

271. Reduktion. Beitragsfreie Police. Wenn ein Versicherter bei Einstellung der Prämienzahlung das eventuelle Rückkaufsrecht nicht ausübt, so bleibt er im Vertragsverhältnis und erhält nach Einziehung der ursprünglichen eine neue, *beitragsfreie Police*, lautend auf ein entsprechend *reduziertes Kapital* oder eine solche *Rente*. Der Reduktion liegt die Reserve zugrunde in der Weise, daß ihr ganzer

oder ein nach einem festgestellten Grundsatz gekürzter Wert[1]) gleichkommt dem Werte der reduzierten Versicherung. Die Reduktion geschieht entweder über Ansuchen des Policeninhabers oder automatisch, wenn eine gewisse Frist seit der letzten Prämienzahlung abgelaufen ist.

Einige Beispiele werden das Verfahren der Reduktion klar machen; gerechnet wird dabei mit der *ganzen* Prämienreserve.

Erstes Beispiel. Eine Erlebensversicherung auf das Kapital 1, lautend auf das Leben (x) und fällig nach n Jahren, wird nach Bezahlung von t Prämien von der *(Netto-)* Höhe

$$P_x = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

aufgegeben; es ist das reduzierte Kapital ${}_tW$ zu bestimmen.

Nach dem oben aufgestellten Grundsatze muß

$${}_tW\,{}_{n-t}E_{x+t} = {}_tV_x$$

sein, woraus sich

$${}_tW = \frac{{}_tV_x}{{}_{n-t}E_{x+t}} \tag{27}$$

ergibt.

Man kann sich von der Richtigkeit dieses Vorganges durch folgende Betrachtung überzeugen.

Die successiven jährlichen Einzahlungen des Versicherten können als einmalige Prämien für bestimmte Anteile des versicherten Kapitales angesehen werden; auf diese Anteile hat der Versicherte einen rechtlichen Anspruch, *wenn er den versicherten Zeitpunkt erlebt.*

Mit der ersten Prämie P_x sichert sich (x) das Kapital

$$\frac{P_x}{{}_nE_x},$$

da er mit ${}_nE_x$ sich das Kapital 1 sichern würde; die zweite Prämie begründet den Anspruch auf die Summe

$$\frac{P_x}{{}_{n-1}E_{x+1}},$$

die dritte auf

$$\frac{P_x}{{}_{n-2}E_{x+2}},$$

u. s. w. die t-te Prämie auf

$$\frac{P_x}{{}_{n-t+1}E_{x+t-1}};$$

---

1) Letzteres insbesondere bei Erlebens- und gemischten Versicherungen; die Kürzung richtet sich hier nach der zurückgelegten und der vereinbarten Versicherungsdauer.

wenn hier die Zahlung aufhört, so hat (x) im Alter $x + n$ Anspruch auf das Kapital

$$
\begin{aligned}
{}_tW &= P_x \left\{ \frac{1}{{}_nE_x} + \frac{1}{{}_{n-1}E_{x+1}} + \frac{1}{{}_{n-2}E_{x+2}} + \cdots + \frac{1}{{}_{n-t+1}E_{x+t-1}} \right\} \\
&= P_x \left\{ \frac{D_x}{D_{x+n}} + \frac{D_{x+1}}{D_{x+n}} + \frac{D_{x+2}}{D_{x+n}} + \cdots + \frac{D_{x+t-1}}{D_{x+n}} \right\} \\
&= P_x \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+n}} = \frac{N_x - N_{x+t}}{N_x - N_{x+n}}.
\end{aligned}
$$

Nun ist nach Nr. 259, (γ),

$$\frac{N_x - N_{x+t}}{N_x - N_{x+n}} = \frac{D_{x+t}}{D_{x+n}} \, {}_tV_x$$

und

$$\frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} = {}_{n-t}E_{x+t},$$

folglich in der Tat

$$ {}_tW = \frac{{}_tV_x}{{}_{n-t}E_{x+t}}.$$

Zweites Beispiel. Eine lebenslängliche Todesfallversicherung auf das Kapital 1 für das Leben (x) wird nach t Prämienzahlungen von dem *(Netto-)* Betrage P_x storniert; auf welches Kapital hat die beitragsfreie Police zu lauten?

Dieses Kapital ${}_tW$ ergibt sich aus dem Ansatze:

$${}_tW A_{x+t} = {}_tV_x,$$

und zwar ist

$${}_tW = \frac{{}_tV_x}{A_{x+t}}.$$

Da nun [Nr. 265, (16)] ${}_tV_x = A_{x+t} - a_{x+t} P_x$ und $\frac{A_{x+t}}{a_{x+t}} = P_{x+t}$ ist, so hat man in anderer, bemerkenswerter Darstellung:

$${}_tW = 1 - \frac{P_x}{P_{x+t}}. \tag{28}$$

Stellt beispielsweise eine Person, die sich mit 30 Jahren versichert hat, nach 20 Jahren die Prämienzahlung ein, so erhält sie nach den Grundlagen der Tafel III eine beitragsfreie Police, lautend auf

$${}_{20}W = 1 - \frac{P_{30}}{P_{50}} = 1 - \frac{0{,}01762}{0{,}03675} = 0{,}5805,$$

d. h. auf 58 % des ursprünglichen Kapitales.

Die Formel (28) ist ein spezieller Fall einer allgemeinen Formel, die mit gewissen Einschränkungen für alle Versicherungsarten gilt.

Ist P die jährliche gleichbleibende Prämie für eine Versicherung, $'P$ die Prämie, die für *dieselbe* Versicherung gezahlt werden müßte, wenn der Abschluß t Jahre später erfolgte, so würde sich die Person, wenn sie von da ab die Prämie $'P$ zahlte, das Kapital 1, durch die Prämie 1 also das Kapital $\frac{1}{'P}$ sichern; da aber die Prämie P in Kraft ist, so ist durch ihre weitere Zahlung das Kapital $\frac{P}{'P}$ gesichert, das jedoch entfällt, wenn die Prämienzahlung zu der angegebenen Zeit aufhört; folglich ist das reduzierte Kapital:

$$_{t}W = 1 - \frac{P}{'P}. \tag{29}$$

Die Formel ist nicht anwendbar, wenn der versicherte Vorteil sich mit der Zeit ändert, wie bei Prämienrückgewähr, oder wenn die Prämie veränderlich ist; sie setzt voraus, daß $'P$ so lange läuft, als dies bei P der Fall wäre, wenn die Prämienzahlung vertragsmäßig fortdauerte.

Demnach ist bei einer auf n Jahre abgekürzten Prämienzahlung bei lebenslänglicher Todesfallversicherung

$$_{t}W = 1 - \frac{_{n}P_x}{_{n-t}P_{x+t}},$$

wobei $_{n}P_x = \frac{A_x}{_{|n}a_x}$.

Bei einer durch n Jahre aufgeschobenen Leibrente vom Jahresbetrage 1, wenn die für die Aufschubszeit vereinbarte Prämienzahlung nach t Jahren eingestellt wird, ist der reduzierte Rentenbetrag $_{t}W$ gleichfalls nach Formel (29) zu rechnen; dabei ist, wenn x das Alter der Person bei Begründung der Rente,

$$P = \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}},$$

$$'P = \frac{N_{x+n}}{N_{x+t} - N_{x+n}};$$

folglich wird

$$_{t}W = 1 - \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} = \frac{N_x - N_{x+t}}{N_x - N_{x+n}}.$$

Wenn also beispielsweise ein 30-jähriger sich eine mit dem 61. Jahre beginnende Altersrente von 500 ℳ versichert, nach 20 Jahren jedoch zur Einstellung der Prämienzahlung genötigt ist, so wird ihm die Rente auf

$$_{20}W = \frac{N_{30} - N_{50}}{N_{30} - N_{60}} 500 = \frac{436\,490}{540\,359} 500 = 403{,}88 \text{ ℳ}$$

reduziert; dabei sind die Grundlagen der Tafel III benützt worden.

272. Abänderung einer Versicherung. Unter der *Abänderung* einer Versicherung versteht man den Übergang zu einer andern Versicherungssumme, oder zu einer andern Versicherungsart, oder zu einem andern Modus der Prämienzahlung, nachdem die ursprüngliche Versicherung schon eine Zeitlang in Kraft bestand.

Das Prinzip, nach welchem dabei vorgegangen wird, besteht darin, daß man die Summe aus der zur Zeit der Abänderung vorhandenen Prämienreserve und dem Werte der künftigen Prämienzahlungen gleichsetzt dem auf diese Zeit bezogenen Werte der eventuell abgeänderten Versicherung. Aus dieser Gleichung berechnet sich die unbekannte Größe, in der Regel die neue Prämie. Mitunter wird die Prämienreserve mit einem etwas gekürzten Betrage (Umänderungsspesen) in die Rechnung gestellt. Noch ist zu bemerken, daß der Umänderung der Versicherungsart unter Umständen eine ärztliche Untersuchung vorangehen muß, so bei dem Übergang von einer Erlebens- zur Todesfall- oder gemischten Versicherung.

Zur Erläuterung des Vorganges mögen die folgenden Beispiele dienen.

Erstes Beispiel. Eine durch n Jahre in Kraft stehende, ursprünglich auf das Leben (x) abgeschlossene Todesfallversicherung mit dem Kapitale c soll in eine ebensolche Versicherung auf das größere Kapital C umgewandelt werden; es ist die weiterhin zu zahlende Prämie P' zu bestimmen.

Dem obigen Grundsatze gemäß hat man die Gleichung

$$c\,{}_nV_x + a_{x+n}P' = CA_{x+n}$$

zu bilden; darin ist nun, wenn P die ursprüngliche Jahresprämie war, ${}_nV_x = A_{x+n} - a_{x+n}P$; nach Einsetzung dieses Wertes ergibt sich:

$$P' - P = \frac{A_{x+n}}{a_{x+n}}(C - c). \tag{30}$$

Diese Formel hätte unmittelbar hingeschrieben werden können; sie besagt, daß die Prämienerhöhung gleich ist der vom Zeitpunkte der Abänderung an zahlbaren Prämie für die Kapitalserhöhung.

Bei $C < c$ ergäbe die Formel den Prämiennachlaß.

Zweites Beispiel. Nach n-jährigem Bestande soll eine Todesfallversicherung mit lebenslänglich bedungener Prämienzahlung derart abgeändert werden, daß die Prämienzahlung mit dem Alter t aufhört, d. h. daß am Beginne des t-ten Lebensjahres die letzte Prämie gezahlt wird. Es handelt sich um deren Höhe P'.

Aus dem Ansatze

$${}_nV_x + {}_{|t-x-n}a_{x+n}P' = A_{x+n},$$

wenn man darin ${}_nV_x$ durch $A_{x+n} - a_{x+n} P$ ersetzt, wobei P die alte Prämie bedeutet, ergibt sich:

$$P' = \frac{a_{x+n}}{{}_{|t-x-n}a_{x+n}} P = \frac{N_{x+n}}{N_{x+n} - N_t} P. \tag{31}$$

Die Prämienerhöhung macht

$$P' - P = \frac{N_t}{N_{x+n} - N_t} P$$

aus.

Wird z. B. bei $x = 30$ nach $n = 20$-jährigem Bestande die Prämienzahlung zum Alter $t = 70$ abgekürzt, so beträgt die neue Prämie nach den Grundlagen der Tafel III

$$P' = \frac{N_{50}}{N_{50} - N_{70}} P = \frac{184\,709}{159\,181} P = 1{,}1603\, P;$$

die frühere Prämie erhöht sich also um 16 % ihres Betrages.

Drittes Beispiel. Die lebenslängliche Todesfallversicherung soll n Jahre nach Abschluß in eine gemischte Versicherung zum Alter $t (> x + n)$ umgewandelt werden; zu bestimmen ist die neue Prämie P'.

Dieselbe ist zu rechnen aus dem Ansatze:

$${}_nV_x + {}_{|t-x-n}a_{x+n} P' = A_{x+n, \overline{t-x-n|}};$$

ersetzt man ${}_nV_x$ durch seinen Wert $1 - \frac{a_{x+n}}{a_x}$ und $A_{x+n,\overline{t-x-n|}}$ durch $1 - d\ {}_{|t-x-n}a_{x+n}$, so ergibt sich:

$$P' = \frac{a_{x+n}}{a_x} \frac{1}{{}_{|t-x-n}a_{x-n}} - d;$$

er alten Prämie

$$P = \frac{1}{a_x} - d$$

genüber besteht also der Unterschied

$$P' - P = \frac{a_{x+n}}{a_x} \left[\frac{1}{{}_{|t-x-n}a_{x+n}} - \frac{1}{a_{x+n}} \right]. \tag{32}$$

Mit den Daten des vorigen Beispieles: $x = 30$, $n = 20$, $t = 70$ rt Tafel III:

$$P' = \frac{14{,}172}{19{,}441} 0{,}081881 - 0{,}03382 = 0{,}02583;$$

gen war

$$P = 0{,}01762;$$

h ist $\frac{P'}{P} = 1{,}4659$, d. h. die frühere Prämie erfährt infolge der lerung einen Aufschlag von 46,6 %.

iertes Beispiel. Eine durch n Jahre aufgeschobene Rente auf **ben** (x) soll während der Aufschubszeit, t Jahre nach erfolgtem

Abschluß, unter Einstellung der Prämienzahlung in eine sofort beginnende Leibrente umgewandelt werden; es ist der jährliche Betrag r der letzteren zu bestimmen, wenn 1 der Betrag der ursprünglichen Rente war.

Zur Lösung dieser Aufgabe hat man den Ansatz:

$${}_tV_x = r a_{x+t};$$

da nun

$${}_tV_x = \frac{D_x}{D_{x+t}}\, {}_t a_x P_x = \frac{D_x}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x} \cdot \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

und

$$a_{x+t} = \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}},$$

so ergibt sich

$$r = \frac{N_{x+n}}{N_{x+t}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{N_x - N_{x+n}}. \tag{33}$$

Hat also eine 30-jährige Person sich eine nach dem 60. Jahre beginnende Altersrente von 500 ℳ gegen jährliche Prämienzahlung versichert, und befindet sie sich nach Ablauf von 20 Jahren in der Lage, die Prämienzahlung einstellen und sofortige Flüssigmachung der Rente verlangen zu müssen, so wird die Rente nur mehr den Jahresbetrag von

$$r = \frac{N_{60}}{N_{50}} \cdot \frac{N_{30} - N_{50}}{N_{30} - N_{60}}\, 500 = \frac{80\,839{,}8}{184\,709} \cdot \frac{436\,490}{540\,359}\, 500 = 176{,}76 \text{ ℳ}$$

erreichen, wenn mit den Grundlagen der Tafel III gerechnet wird (vgl. hiermit das Schlußbeispiel in Nr. 271).

IV. Abschnitt. Das Risiko in der Lebensversicherung.

273. Begriffsentwicklung. Die Rechnungen der Lebensversicherung stützen sich auf den wahrscheinlichsten Fall, nämlich auf die Voraussetzung, daß der wirkliche Verlauf der versicherten Ereignisse genau den zugrunde gelegten statistischen Tabellen entsprechen werde. Dies wird jedoch in der Regel nicht zutreffen, selbst dann nicht, wenn die aus den Tabellen gebildeten Verhältniszahlen die Bedeutung typischer Wahrscheinlichkeitsgrößen mit normaler Dispersion, also denselben Charakter wie auf apriorischer Grundlage ermittelte Wahrscheinlichkeiten hätten (s. Nr. 169), und wenn das versicherte Material völlig homogen wäre demjenigen, aus dessen Beobachtung die Tabellen hervorgegangen sind. Denn auch in diesem Falle, der übrigens stillschweigend vorausgesetzt wird [s. Nr. 172, d)],

wären Abweichungen von dem wahrscheinlichsten Verlaufe, die man als *zufällige* bezeichnet, zu erwarten.

Jede Abweichung bedingt aber eine Störung in dem Gleichgewichte zwischen den beiderseitigen Leistungen, die auf die beiden Partner, die Gesamtheit der Versicherten und die Versicherungsanstalt, in entgegengesetztem Sinne wirkt. Soll nun die Anstalt auch dann, wenn sie ungünstig beeinflußt würde, imstande sein, den erhöhten Verpflichtungen gegen die Versicherten nachzukommen, so bedarf sie neben den Nettofonds noch anderer Mittel. Die Bemessung ihrer Höhe hätte sich auf die Theorie des mathematischen Risikos zu stützen (s. Nr. 111—115); denn diese Theorie befaßt sich mit der Beurteilung des finanziellen Effektes der zufälligen Abweichungen im Verlaufe der Ereignisse.

Die Praxis hat jedoch diesen Weg bisher nicht betreten; sie hat vielmehr durch die Wahl der Grundlagen, durch die Bemessung der Zuschläge zu den Nettoprämien über das Bedürfnis der Regie hinaus für die Bildung von Sicherheitsfonds gesorgt und konnte bezüglich des Erfolges solcher Maßnahmen auf ausgebreitete Erfahrungen hinweisen.

Trotzdem sind zahlreiche Untersuchungen über das Risiko in der Lebensversicherung angestellt worden[1]); neben dem theoretischen Interesse, zu dessen Befriedigung sie unternommen wurden, liegt ihre Beleutung in gewissen allgemeinen Resultaten und Einblicken; vielleicht vird eine spätere Zeit weitergehenden Gebrauch von ihnen machen.

Das allgemeinste Problem, das zu lösen wäre, bestünde in der ufstellung des auf einen bestimmten Zeitpunkt bezogenen Maßes r das Risiko, das eine Anstalt ihren Versicherten gegenüber (und ıgekehrt auch diese der Anstalt gegenüber) in einer festgesetzten riode läuft.

Hierzu wären folgende Vorarbeiten erforderlich:

1) Auflösung des Versicherungsbestandes in unabhängige Einzele durch Zusammenlegung mehrfacher Versicherungen;

2) Aufstellung aller im Bereiche der Möglichkeit liegenden ıbinationen über das Sterben der Versicherten, wobei nicht der ›unkt als solcher, sondern das Versicherungsjahr des Todes ins zu fassen wäre; mit dieser Einschränkung ergibt sich immer endliche Anzahl von Kombinationen, die nach einem Prinzip get und numeriert gedacht werden mögen.

) Berechnung der Wahrscheinlichkeit Q_ν für das Eintreffen einer Kombination (ν).

Eine historische Übersicht über dieselben und einen reichen Literatur- ı hat K. Wagner in der Schrift: „Das Problem vom Risiko in der rsicherung“ (1898) gegeben.

4) Berechnung der Ausgaben $\mathfrak{A}_\nu$ und der Einnahmen $\mathfrak{E}_\nu$, beide reduziert auf den Zeitpunkt t, die der Anstalt aus der Kombination (ν) in der in Betracht gezogenen Periode (t_1, t_2) erwachsen würden; unter den Ausgaben sind die gemachten Auszahlungen und die Prämienreserve am Ende der Periode, unter den Einnahmen die eingelaufenen Nettoprämien und die Prämienreserve am Beginne der Periode zu verstehen.

Als Maß des Risikos wäre dann aus diesen Größen entweder das *durchschnittliche Risiko* (der Anstalt sowohl als Versicherungbestandes)

$$R = \frac{1}{2} \sum_\nu Q_\nu \,|\mathfrak{A}_\nu - \mathfrak{E}_\nu| \tag{1}$$

(s. Nr. 111—112) oder das *mittlere Risiko* M gemäß der Gleichung

$$M^2 = \sum_\nu Q_\nu (\mathfrak{A}_\nu - \mathfrak{E}_\nu)^2 \tag{2}$$

zu bilden. Dem ersteren käme dabei die Bedeutung der Prämie zu, mittels welcher sich die Anstalt bei einer andern gegen die ihr aus den zufälligen Abweichungen drohenden Verluste versichern könnte[1]).

Diese Begriffsentwicklung hat jedoch lediglich theoretisches Interesse; die Formeln, zu welchen sie führt, sind praktisch nicht verwendbar, weil sie selbst bei einem sehr mäßigen Versicherungsstande eine nicht zu bewältigende Rechenarbeit erforderten.

Will man also zu ziffermäßigen Resultaten gelangen, so muß das Problem in einer ganz andern Weise in Angriff genommen werden. Man wird *erstens* darauf ausgehen, das mittlere Risiko der einzelnen Versicherung zu bestimmen, und wird *zweitens* aus den Einzelrisiken das Gesamtrisiko gemäß dem Satze (s. Nr. 114)

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + \cdots} \tag{3}$$

berechnen. Dabei bieten sich Vereinfachungen dar: gleichartige Versicherungen können zusammengefaßt werden und ergeben nur ein Glied unter der Wurzel, bestehend in dem Produkte des Quadrates des Risikos einer solchen Versicherung mit der Anzahl der ihr gleichartigen; will man sich mit einer bloßen Schätzung begnügen, so kann man Gruppen von Versicherungen, die sich über mehrere Altersstufen und ungleiche Versicherungssummen erstrecken, bilden und mit einem mittleren Alter und einer mittleren Versicherungssumme rechnen.

---

1) Vgl. hierzu G. Bohlmann, Encykl. d. mathem. Wissensch. I, p. 90... Bohlmann unterscheidet auch noch die extremen Risiken, nämlich das der Anstalt gegenüber den Versicherten, bestehend in dem größten $\mathfrak{A}_\nu - \mathfrak{E}_\nu$, und das des Versicherungsbestandes gegenüber der Anstalt, dargestellt durch das größte $\mathfrak{E}_\nu - \mathfrak{A}_\nu$. Diese Werte fallen aber nicht eigentlich unter den Begriff des Risiko, stellen vielmehr die *größtmöglichen Verluste* einer- und andererseits vor.

Solche Vorteile bietet das durchschnittliche Risiko nicht dar, wenn es sich um einen ganzen Bestand handelt. Man kann zwar wieder ohne Schwierigkeit das durchschnittliche Risiko jeder einzelnen Versicherung bestimmen; aber die strenge Zusammensetzung dieser Einzelrisiken zum Gesamtrisiko bietet Schwierigkeiten dar und ist nur für einige einfache Fälle gelungen. Unter gewissen Voraussetzungen, wenn es sich um eine große Anzahl gleichartiger vom Zufall abhängiger Unternehmungen handelt, ist in Nr. 114 ein einfacher Zusammenhang zwischen dem mittleren und durchschnittlichen Risiko nachgewiesen worden [s. Gleichung (3) dortselbst]. Wenn auch bei einem Versicherungsbestande die erwähnten Voraussetzungen nicht völlig zu Recht bestehen, so bedient man sich dieses Zusammenhanges doch auch hier und leitet aus M das R des Bestandes gemäß der Formel

$$R = \frac{M}{\sqrt{2\pi}} = 0{,}39894\,M \tag{4}$$

ab.

Im Grunde der Formeln (3) und (4) ergibt sich das Risiko einer Gruppe gleichartiger Versicherungen, indem man das Risiko der einzelnen mit der Quadratwurzel aus der Anzahl aller multipliziert. Das *relative* Risiko, das durch Division des vorigen mit der Summe der geleisteten Einzahlungen entsteht, ist somit der Quadratwurzel aus der Anzahl der Versicherungen umgekehrt proportional, weil jene Summe diese Anzahl als Faktor enthält. Nach dem relativen mittleren oder durchschnittlichen Risiko oder einem Vielfachen desselben bemißt sich aber der Beitrag, den der einzelne Versicherte zur Bildung des Sicherheitsfonds zu leisten hat; in dem letzten Satze ist daher der mathematische Grund dafür zu erblicken, daß es für den Versicherungsnehmer in Ansehung der Aufbringung des Sicherheitsfonds um so günstiger ist, an eine je zahlreichere Gesellschaft er sich anschließt.

Was die Periode betrifft, für die man das Risiko rechnet, so sind zwei Fälle von hervorragender Wichtigkeit: das Risiko für die ganze Dauer der Versicherung, gerechnet für den Zeitpunkt des Abschlusses, und das Risiko für die fernere Dauer einer Versicherung nach längerem Bestande derselben.

274. Das durchschnittliche Risiko einer einzelnen Versicherung bei deren Beginn. 1) Auf das Leben (x) sei eine Pränumerando-Leibrente vom Betrage 1 gegründet gegen Leistung der einmaligen Prämie a_x. Stirbt (x) im Laufe des n-ten Jahres, wofür ${}_{n-1|}q_x$ die Wahrscheinlichkeit ist, so hat er die Rente n-mal bezogen; der gegenwärtige Wert dieser an ihn geleisteten Auszahlungen ist

$$a_{\overline{n|}} = \frac{1 - v^n}{d}. \tag{5}$$

Mithin beträgt das durchschnittliche Risiko

$$R(a_n) = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\omega} {}_{n-1|}q_x \,|\, a_x - a_{\overline{n}|} \,|. \tag{6}$$

Bei einer Postnumerando-Leibrente betrüge die einmalige Prämie $a_x - 1$, und der Wert der Auszahlung wäre

$$v + v^2 + \cdots + v^{n-1} = a_{\overline{n}|} - 1;$$

für das Risiko gilt also dieselbe Formel (6).

2) Es sei (x) gegen die einmalige Prämie $A_x = 1 - d a_x$ lebenslänglich für den Todesfall auf das Kapital 1 versichert. Stirbt (x) im Laufe des n-ten Jahres, wofür ${}_{n-1|}q_x$ die Wahrscheinlichkeit ist, so kommt das Kapital am Ende des Jahres zur Auszahlung, und der gegenwärtige Wert hiervon ist v^n. Hiernach ist das durchschnittliche Risiko dieser Versicherung:

$$R(A_x) = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\omega} {}_{n-1|}q_x \,|\, A_x - v^n \,|. \tag{7}$$

Ersetzt man A_x durch den gleichwertigen Ausdruck $1 - d a_x$, so schreibt sich

$$R(A_x) = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\omega} {}_{n-1|}q_x \,|\, 1 - d a_x - v^n \,| = \frac{d}{2} \sum_{1}^{\omega} {}_{n-1|}q_x \left| \frac{1 - v^n}{d} - a_x \right|,$$

woraus mit Rücksicht auf (6) und (5) folgt, daß

$$R(A_x) = d\, R(a_x). \tag{8}$$

Das durchschnittliche Risiko der Todesfallversicherung macht also etwa so viel Prozente des Risikos der Rente aus, als es dem zugrunde gelegten Zinsfuße entspricht; denn bei $i = 0{,}035$ z. B. ist $d = 0{,}0338$.

3) Es sei (x) gegen Zahlung der Jahresprämie $P_x = \frac{1}{a_x} - d$ lebenslänglich für den Todesfall auf das Kapital 1 versichert. Erfolgt der Tod im Laufe des n-ten Jahres, was mit der Wahrscheinlichkeit ${}_{n-1|}q_x$ zu erwarten ist, so wird das Kapital am Ende dieses Jahres ausgezahlt; der gegenwärtige Wert hiervon ist v^n, während der Wert der geleisteten Einzahlungen gleichkommt $a_{\overline{n}|} P_x$. Aus diesen Elementen bestimmt sich das Risiko:

$$R(P_x) = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\omega} {}_{n-1|}q_x \,|\, a_{\overline{n}|} P_x - v^n \,|. \tag{9}$$

Substituiert man für P_x den Ausdruck $\frac{1}{a_x} - d$, so wird wegen (5)

$$R(P_x) = \frac{1}{2}\sum_{1}^{\omega}{}_{n-1|}q_x \left|\frac{a_{\overline{n}|}}{a_x} - d a_{\overline{n}|} - v^n\right|$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{1}^{\omega}{}_{n-1|}q_x \left|\frac{a_{\overline{n}|}}{a_x} - 1\right|$$

$$= \frac{1}{2a_x}\sum_{1}^{\omega}{}_{n-1|}q_x \left|a_x - a_{\overline{n}|}\right|;$$

mit Rücksicht auf (6) und (8) ist also auch:

$$R(P_x) = \frac{1}{a_x} R(a_x) = \frac{R(A_x)}{1 - A_x}. \qquad (10)$$

Da $1 - A_x$ ein um so kleinerer echter Bruch ist, je höher das Alter x, so ist das Risiko bei jährlicher Prämienzahlung ein um so höheres Vielfaches des Risikos bei einmaliger Prämie, in einem je höheren Alter die Versicherung abgeschlossen wird.

Aus den vorstehenden Formeln ist zu ersehen, daß sich mit Hilfe von $R(a_x)$ die beiden andern Risikos ausdrücken lassen. Was nun die Ausrechnung von $R(a_x)$ anlangt, so kann sie einfacher gestaltet werden, als es die Formel (6) vorschreibt. Von den Differenzen $a_x - a_{\overline{n}|}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ ist ein Teil positiv, ein Teil negativ, und sowohl die über die positiven erstreckte Summe wie auch der absolute Wert jener Summe, die sich über die negativen erstreckt, gibt R (s. Nr. 112). Die Grenzscheide zwischen den positiven und negativen Differenzen liegt aber bei jenem Werte n, der sich aus der Geichung

$$a_{\overline{n}|} = a_x \qquad (11)$$

ergibt. Der Sinn dieser Gleichung ist unmittelbar einleuchtend: sie besagt, daß bei dieser Dauer der Versicherung der Wert dessen, was die Anstalt zahlt, gleich ist dem empfangenen Betrage; diesseits und jenseits liegen die Gebiete, wo entweder die Anstalt oder der Versicherte ein Zuviel leistet. Wir nennen das aus (11) berechnete n die *kritische Dauer* der Rente. Der Begriff läßt sich auch auf andere Versicherungen übertragen. Ersetzt man $a_{\overline{n}|}$ durch den Ausdruck (5), so ergibt sich nach einer Transformation:

$$v^n = 1 - d a_x = A_x,$$

woraus

$$n = \frac{\log A_x}{\log v} \qquad (12)$$

folgt. Die Gleichung, welche zur kritischen Dauer der Todesfallversicherung führt, ist nach (7)

$$v^n = A_x,$$

also dieselbe wie bei der Rente; und bei der Todesfallversicherung gegen jährliche Prämienzahlung hat man nach (9):

$$v^n = a_{\overline{n}|} P_x,$$

woraus nach und nach

$$v^n = \frac{1 - v^n}{d} \left(\frac{1}{a_x} - d\right)$$

$$v^n = 1 - d a_x = A_x$$

folgt. Es haben also alle drei Versicherungsarten dieselbe kritische Dauer. Hat man diese bestimmt, so weiß man im voraus, wie viele Glieder zur Bestimmung von $R(a_x)$ erforderlich sind.

Beispiel. Mit den Grundlagen der Tafel III soll das durchschnittliche Risiko der drei Versicherungsarten a_x, A_x, P_x für das Alter $x = 70$ berechnet werden.

Zunächst hat man die kritische Dauer

$$n = \frac{\log A_{70}}{\log v} = \frac{\log 0{,}74738}{0{,}98506 - 1} = 8{,}5;$$

es reichen also acht Glieder zur Bestimmung von $R(a_x)$ hin. Man wird die Rechnung tabellarisch wie folgt anlegen:

$$a_{70} = 7{,}46929$$

n	$_{n-1\|}q_{70}$	$a_{\overline{n}\|}$	$a_{70} - a_{\overline{n}\|}$	$_{n-1\|}q_{70}(a_{70} - a_{\overline{n}\|})$
1	0,06410	1,00000	6,46929	0,41468
2	0,06499	1,96618	5,50311	0,35765
3	0,06557	2,89969	4,56960	0,29963
4	0,06572	3,80164	3,66765	0,24103
5	0,06549	4,67308	2,79621	0,18311
6	0,06475	5,51505	1,95424	0,12654
7	0,06351	6,32855	1,14074	0,07244
8	0,06169	7,11454	0,35475	0,02187
			Summe	1,71695

Es ist somit

$$R(a_{70}) = 1{,}71695,$$

das relative Risiko beträgt also

$$\frac{R(a_{70})}{a_{70}} = \frac{1{,}71695}{7{,}46929} = 0{,}229,$$

zu seiner Deckung sind also 23 % der einmaligen Prämie erforderlich.

Ferner ergibt sich nach (8):

$$R(A_{70}) = 0{,}0338 \cdot 1{,}71695 = 0{,}05806,$$

sodaß das relative Risiko dieses Falles

$$\frac{R(A_{70})}{A_{70}} = \frac{0{,}05806}{0{,}74738} = 0{,}078,$$

also 7,8 % der einmaligen Jahresprämie ausmacht.

Endlich hat man:

$$R(P_{70}) = \frac{R(a_{70})}{a_{70}} = \frac{1{,}71695}{7{,}46929} = 0{,}22987$$

und relativ zur Prämie

$$\frac{R(P_{70})}{P_{70}} = \frac{0{,}22987}{0{,}10005} = 2{,}297;$$

hier beträgt also das Risiko das 2,297-fache der Jahresprämie.

275. Das durchschnittliche Risiko einer einzelnen Versicherung nach längerem Bestande. Das Risiko einer flüssigen Rente und einer kapitalisch begründeten Todesfallversicherung nach m-jähriger Dauer stimmt mit dem Risiko einer gleichartigen Versicherung, jedoch für eine um m Jahre ältere Person überein; denn die Reserve, welche als Einzahlung übernommen wird, ist die der ferneren Versicherung entsprechende einmalige Prämie, und in allem übrigen liegen die Verhältnisse wie am Beginne.

Bezeichnet man also das nach m-jährigem Bestande herrschende Risiko mit R_m, so gelten die Formeln:

$$R_m(a_x) = R(a'_{x+m}), \tag{13}$$

$$R_m(A_x) = R(A_{x+m}). \tag{14}$$

Anders verhält es sich mit der Todesfallversicherung gegen jährliche Prämienzahlung. Besteht sie m Jahre, so ist die versicherte Person $x+m$ Jahre alt geworden und hat den Tod im Laufe des n-ten Jahres mit der Wahrscheinlichkeit ${}_{n-1}q_{x+m}$ zu erwarten; erfüllt sich diese Erwartung, so besteht die Ausgabe der Anstalt, auf den Zeitpunkt der Rechnung reduziert, in v^n, ihre Einnahme in der Prämienreserve ${}_mV_x$ und der Prämienzahlung $a_{\overline{n}|}P_x$; folglich ist

$$R_m(P_x) = \frac{1}{2}\sum_1^{\omega} {}_{n-1|}q_{x+m}\,|{}_mV_x + a_{\overline{n}|}P_x - v^n|.$$

Die eingeklammerte Differenz reduziert sich aber, wenn man für ${}_mV_x$ den Ausdruck $1 - \frac{a_{x+m}}{a_x}$, für P_x den Wert $\frac{1}{a_x} - d$ und für $a_{\overline{n}|}$ den Wert $\frac{1-v^n}{d}$ einsetzt, auf $\frac{a_{\overline{n}|} - a_{x+m}}{a_x}$; daher ist weiter

$$R_m(P_x) = \frac{1}{2a_x}\sum_1^{\omega} {}_{n-1}\,q_{x+m}\,|a_{x+m} - a_{\overline{n}|}|. \tag{15}$$

Nun war aber (s. die vorige Nummer)

$$R(P_x) = \frac{1}{2a_x}\sum_1^{\omega} {}_{n-1|}q_x\,|a_x - a_{\overline{n}|}|,$$

daraus folgt:

$$R(P_{x+m}) = \frac{1}{2\,a_{x+m}} \sum_{1}^{\omega} {}_{n-1|}q_{x+m} \left| a_{x+m} - a_{\overline{n}|} \right| ,$$

und durch Vergleichung mit (15):

$$R_m(P_x) = \frac{a_{x+m}}{a_x} R(P_{x+m}). \tag{16}$$

Es ist also das Risiko zum Alter $x+m$ im Verhältnis der Rentenabnahme vom Alter x zum Alter $x+m$ zu verkleinern, um das Risiko zum Alter x nach m-jährigem Bestande zu erhalten.

Beispielsweise ist nach den Grundlagen der Tafel III und mit Benützung eines am Schlusse der vorigen Nummer berechneten Resultates

$$R_{10}(P_{60}) = \frac{a_{70}}{a_{60}} R(P_{70}) = \frac{7{,}470}{10{,}823}\, 0{,}22987 = 0{,}15864.$$

276. Das mittlere Risiko einer einzelnen Versicherung bei deren Beginn. Um ein möglichst umfassendes Resultat zu erzielen, möge der von F. Hausdorff[1]) eingeschlagene Weg befolgt und eine Versicherungskombination konstruiert werden, die sich durch Spezialisierung einzelner Größen in die üblichen Versicherungsarten überführen läßt.

Auf das Leben (x) werde gegen einmalige Prämie eine auf n Jahre abgekürzte Pränumerando-Leibrente und eine gemischte Versicherung zu demselben Termine, erstere mit dem Jahresbetrage r, letztere auf das Kapital C, abgeschlossen.

Um das mittlere Risiko dieses Vertrages zu bestimmen, hat man die einmalige Prämie

$$E = r\,{}_{|n}a_x + C A_{x\overline{n}|} \tag{17}$$

mit den verschiedenen möglichen Auszahlungswerten in Vergleich zu setzen. Führt man für die Wahrscheinlichkeiten

$${}_0q_x, \quad {}_{1|}q_x, \quad \cdots \quad {}_{n-2|}q_x, \quad {}_{n-1}p_x$$

die einheitliche Bezeichnung

$$w_1, \quad w_2, \quad \cdots \quad w_{n-1}, \quad w_n$$

ein, so ist $w_\alpha (\alpha < n)$ die Wahrscheinlichkeit für (x), im α-ten Jahre zu sterben, w_n die Wahrscheinlichkeit, den Beginn des n-ten Jahres zu erleben, und es besteht die Beziehung:

$$\sum_{1}^{\omega} w_\alpha = 1. \tag{18}$$

1) Das Risiko bei Zufallsspielen. Ber. d. Sächs. G. d. W. zu Leipzig, 49 (1897), p. 585 ff.

Die Auszahlung, wenn das der Wahrscheinlichkeit w_α ($\alpha \leqq n$) entsprechende Ereignis eintritt, hat dann den Wert

$$A_\alpha = r a_{\overline{\alpha}|} + C v^\alpha$$

$$= r \frac{1 - v^\alpha}{d} + C v^\alpha$$

$$= \frac{r}{d} + \left(C - \frac{r}{d}\right) v^\alpha, \tag{19}$$

und es kann E auch in der Form geschrieben werden:

$$E = \sum_1^n w_\alpha A_\alpha = \frac{r}{d} + \left(C - \frac{r}{d}\right) \sum_1^n w_\alpha v^\alpha. \tag{20}$$

Das Quadrat des mittleren Risikos $M(E)$ ist nun:

$$M^2(E) = \sum_1^n w_\alpha (E - A_\alpha)^2,$$

und nach Einführung der Werte aus (19) und (20) weiter:

$$M^2(E) = \left(C - \frac{r}{d}\right)^2 \sum_1^n w_\alpha \left[\sum_1^n w_\alpha v^\alpha - v^\alpha\right]^2.$$

Die Entwicklung des Quadrates gibt:

$$\left(\sum_1^n w_\alpha v^\alpha\right)^2 - 2 v^\alpha \sum_1^n w_\alpha v^\alpha + v^{2\alpha};$$

multipliziert man diesen Ausdruck, Glied für Glied, mit w_α und summiert, ebenfalls gliedweise, von 1 bis n, so erhält man mit Rücksicht auf (18):

$$\left(\sum_1^n w_\alpha v^\alpha\right)^2 - 2\left(\sum_1^n w_\alpha v^\alpha\right)^2 + \sum_1^n w_\alpha v^{2\alpha}$$

$$= \sum_1^n w_\alpha v^{2\alpha} - \left(\sum_1^n w_\alpha v^\alpha\right)^2.$$

Es ist aber

$$\sum_1^n w_\alpha v^\alpha = A_{x\overline{n}|} = 1 - (1 - v) \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x},$$

und $\sum_1^n w_\alpha v^{2\alpha}$ der analog, jedoch mit v^2 statt mit v gerechnete Wert, der kurz mit $A'_{x\overline{n}|}$ bezeichnet werden möge. Führt man also neben

den diskontierten Zahlen der Lebenden und ihren Summen noch die neuen Zahlen:

$$\begin{gathered} v^{2x} l_x = D_x' \\ D_x' + D_{x+1}' + D_{x+2}' + \cdots = N_x' \end{gathered} \tag{21}$$

ein, so wird

$$\sum_1^n w_\alpha v^{2\alpha} = A_{x\overline{n}|}' = 1 - (1 - v^2) \frac{N_x' - N_{x+n}'}{D_x'}. \tag{22}$$

Man hat also schließlich

$$M^2(E) = \left(C - \frac{r}{d}\right)^2 [A_{x\overline{n}|}' - A_{x\overline{n}|}^2], \tag{23}$$

und $M(E)$ selbst ist die positive Quadratwurzel dieses Ausdruckes.

Diese Formel erledigt nun, wenn man spezialisiert, die folgenden Fälle:

1) Bei $C = 0$, $r = 1$ geht die Versicherung in die kurze Rente $_{|n}a_x$ vom Jahresbetrage 1 über, und es ist

$$M(a_x) = \frac{1}{d} \sqrt{A_{x\overline{n}|}' - A_{x\overline{n}|}^2}. \tag{24}$$

2) Mit $r = 0$, $C = 1$ ergibt sich die gemischte Versicherung $A_{x\overline{n}|}$ gegen einmalige Prämie auf das Kapital 1, wofür

$$M(A_{x\overline{n}|}) = \sqrt{A_{x\overline{n}|}' - A_{x\overline{n}|}^2}. \tag{25}$$

3) Setzt man $C = 1$, $r = -P_x$, so entsteht die gemischte Versicherung auf das Kapital 1 gegen jährliche Prämienzahlung; (23) liefert nun

$$M(P_x) = \left(1 + \frac{P_x}{d}\right) \sqrt{A_{x\overline{n}|}' - A_{x\overline{n}|}^2};$$

da aber bei dieser Versicherung [s. Nr. 248, 6)]

$$P_x = \frac{1}{{}_n a_x} - d,$$

also

$$1 + \frac{P_x}{d} = \frac{1}{d\,{}_n a_x} = \frac{1}{1 - A_{x\overline{n}|}},$$

so ist endgiltig

$$M(P_x) = \frac{\sqrt{A_{x\overline{n}|}' - A_{x\overline{n}|}^2}}{1 - A_{x\overline{n}|}}. \tag{26}$$

Rückt man n bis an die äußerste Lebensgrenze, so geht $_{|n}a_x$ in die lebenslängliche Leibrente a_x, $A_{x\overline{n}|}$ in die lebenslängliche Todesfallversicherung A_x über, und A_x' bekommt den Ausdruck:

$$A_x' = \frac{M_x'}{D_x'}, \tag{27}$$

wenn

$$\left.\begin{aligned} v^{2x+2} d_x &= C_x' \\ C_x' + C_{x+1}' + C_{x+2}' + \cdots &= M_x' \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

genommen wird. Man hat also die weitere Formelgruppe:

$$\left.\begin{aligned} M(a_x) &= \frac{1}{d}\sqrt{A_x' - A_x^2} \\ M(A_x) &= \sqrt{A_x' - A_x^2} \\ M(P_x) &= \frac{\sqrt{A_x' - A_x^2}}{1 - A_x} \end{aligned}\right\}. \quad (29)$$

Die Vergleichung mit den Resultaten der Nr. 274 zeigt, daß das Verhältnis der mittleren Risikos der drei ersten und der drei letzten Versicherungsarten dasselbe ist, wie das Verhältnis der durchschnittlichen Risikos.

Die rechnerische Durchführung des mittleren Risiko erfordert die Anlage neuer Tafeln, welche den Grundtafeln der Versicherungsrechnung analog sind und zunächst, soweit die Betrachtung hier geführt ist, die Zahlen D_x', N_x', C_x', M_x' umfassen; bei steigenden Renten und Prämienrückgewähr würde sich auch die Notwendigkeit der Zahlen S_x', R_x' ergeben, die den Zahlen S_x, R_x der Grundtafeln entsprächen.

Nachstehend ist ein Bruchstück einer solchen Tafel, für die Alter von 70 aufwärts, beruhend auf den Grundlagen der Tafel III, mitgeteilt, um daran einige Zahlenbeispiele zu erklären.

Hilfszahlen zur Berechnung des mittleren Risiko.
Grundlagen der Tafel III.

x	D_x'	N_x'	C_x'	M_x'
70	307,52	1941,08	18,399	177,586
71	268,67	1633,51	17,416	159,187
72	217,81	1364,84	16,404	141,771
73	201,47	1147,03	15,349	125,367
74	172,73	945,56	14,267	110,018
75	146,97	772,83	13,177	95,751
76	124,02	625,86	12,066	82,574
77	103,71	501,84	10,942	70,508
78	85,870	398,134	9,8306	59,5660
79	70,332	312,264	8,7334	49,7354
80	56,947	241,932	7,6663	41,0020
81	45,471	184,985	6,6425	33,3357
82	38,805	139,514	5,6678	26,6932
83	27,756	100,709	4,7593	21,0254
84	21,151	72,953	3,9265	16,2661
85	15,819	51,802	3,1780	12,3396
86	11,589	35,983	2,5192	9,1616
87	8,2992	24,3936	1,9480	6,6424
88	5,5384	16,0944	1,4701	4,6944
89	3,9436	10,5560	1,0778	3,2243

x	D_x'	N_x'	C_x'	M_x'
90	2,6036	6,6124	0,75005	2,14647
91	1,6630	4,0088	0,52756	1,39642
92	1,0249	2,3458	0,34775	0,86886
93	0,6089	1,3209	0,22366	0,52111
94	0,3448	0,71204	0,13484	0,29745
95	0,1870	0,36724	0,07850	0,16261
96	0,09610	0,18024	0,04296	0,08411
97	0,04675	0,08414	0,02123	0,04115
98	0,02241	0,03739	0,01101	0,01992
99	0,00991	0,01498	0,00514	0,00891
100	0,00411	0,00507	0,00288	0,00377
101	0,00096	0,00096	0,00089	0,00089

Mit Hilfe dieser Tafel und der Formel (22) findet man beispielsweise

$$A'_{70,\overline{10|}} = 0{,}630698;$$

daneben gibt Tafel III:

$$A_{70,\overline{10|}} = 0{,}788311;$$

mit diesen zwei Zahlen ergibt sich:

$$M(A_{70,\overline{10|}}) = 0{,}0962; \quad \text{relativ:} \quad \frac{M}{A} = 0{,}122,$$

$$M(P_{70}) = 0{,}4544; \quad \text{„} \quad \frac{M}{A} = 0{,}576,$$

$$M({}_{|10}a_{70}) = 2{,}8447; \quad \text{„} \quad \frac{M}{a} = 0{,}515.$$

Weiter liefert die vorstehende Tafel

$$A'_{70} = \frac{177{,}586}{307{,}52} = 0{,}577474,$$

während nach Tafel III

$$A_{70} = 0{,}74738;$$

hiermit berechnet sich gemäß der Formelgruppe (29):

$$M(A_{70}) = 0{,}1374; \quad \text{relativ:} \quad \frac{M}{A} = 0{,}184,$$

$$M(P_{70}) = 0{,}5439; \quad \text{„} \quad \frac{M}{A} = 0{,}727,$$

$$M(a_{70}) = 4{,}0630; \quad \text{„} \quad \frac{M}{a} = 0{,}544.$$

277. Das mittlere Risiko einer einzelnen Versicherung nach längerem Bestande. Wir führen die Rechnung wieder allgemein für die kombinierte Versicherung, von welcher in der vorigen Nummer ausgegangen worden war, und zwar m Jahre nach Abschluß ($m < n$), wo der Versicherte das Alter $x + m$ hat. Zu dieser Zeit kommt ihm eine Prämienreserve

$${}_mV_x = r_{|n-m}a_{x+m} + CA_{x+m,\overline{n-m}|}$$

zu, die gleich ist dem Werte der ferneren Versicherung, weil kapitalische Begründung vorausgesetzt wurde.

Bezeichnet man die Reihe der Wahrscheinlichkeiten

$${}_{0|}q_{x+m},\quad {}_{1|}q_{x+m},\quad \ldots\quad {}_{n-m-2|}q_{x+m},\quad {}_{n-m-1}p_{x+m}$$

einheitlich durch

$$w_1,\quad w_2,\quad \ldots\quad w_{n-m-1},\quad w_{n-m},$$

so haben diese analoge Bedeutung wie bei der vorigen Untersuchung, nur daß der Ausgangspunkt der Zählung bei dem Alter $x+m$ liegt.

Tritt das der Wahrscheinlichkeit w_α $(\alpha \leqq n-m)$ entsprechende Ereignis ein, so ist eine Auszahlung erfolgt, deren Wert

$$\begin{aligned} A_\alpha &= r a_{\overline{\alpha}|} + Cv^\alpha \\ &= \frac{r}{d} + \left(C - \frac{r}{d}\right) v^\alpha \end{aligned}$$

ist; die Prämienreserve kann, da weitere Einzahlungen nicht stattfinden, nunmehr auch so ausgedrückt werden:

$${}_mV_x = \sum_1^{n-m} w_\alpha A_\alpha = \frac{r}{d} + \left(C - \frac{r}{d}\right) \sum_1^{n-m} w_\alpha v^\alpha,$$

weil wiederum $\sum\limits_1^{n-m} w_\alpha = 1$ ist.

Das Quadrat des mittleren Risiko hat zunächst den Ausdruck:

$$\begin{aligned} M_m^2(E) &= \sum_1^{n-m} w_\alpha ({}_mV_x - A_\alpha)^2 \\ &= \left(C - \frac{r}{d}\right)^2 \sum_1^{n-m} w_\alpha \left[\sum_1^{n-m} w_\alpha v^\alpha - v^\alpha\right]^2, \end{aligned}$$

der sich genau wie im vorigen Falle umgestalten läßt in:

$$M_m^2(E) = \left(C - \frac{r}{d}\right)^2 \left\{\sum_1^{n-m} w_\alpha v^{2\alpha} - \left(\sum_1^{n-m} w_\alpha v^\alpha\right)^2\right\}.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \sum_1^n w_\alpha v^\alpha &= {}_{0|}q_{x+m} v + {}_{1|}q_{x+m} v^2 + \cdots + {}_{n-m-2|}q_{x+m} v^{n-m-1} + {}_{n-m-1}p_{x+m} v^{n-m} \\ &= A_{x+m,\overline{n-m}|}, \end{aligned}$$

und die zweite Summe in der Hauptklammer bedeutet dementsprechend $A'_{x+m,\overline{n-m}|}$.

Mithin ist endgiltig

$$M_m^2(E) = \left(C - \frac{r}{d}\right)^2 \{A'_{x+m,\overline{n-m|}} - A^2_{x+m,\overline{n-m|}}\}, \tag{31}$$

und $M_m(E)$ selbst die positive Quadratwurzel daraus.

Durch die Substitutionen 1) $C = 0$, $r = 1$, 2) $r = 0$, $C = 1$, 3) $C = 1$, $r = -P_x$ ergeben sich die speziellen Formeln:

$$\left.\begin{aligned} M_m({}_n a_x) &= \frac{1}{d}\sqrt{A'_{x+m,\overline{n-m|}} - A^2_{x+m,\overline{n-m|}}} \\ M_m(A_{x,\overline{n|}}) &= \sqrt{A'_{x+m,\overline{n-m|}} - A^2_{x+m,\overline{n-m|}}} \\ M_m(P_x) &= \frac{\sqrt{A'_{x+m,\overline{n-m|}} - A^2_{x+m,\overline{n-m|}}}}{1 - A_{x,\overline{n|}}} \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

und weiter durch die Substitution $n = \omega$ (oberste Altersgrenze) die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} M_m(a_x) &= \frac{1}{d}\sqrt{A'_{x+m} - A^2_{x+m}} \\ M_m(A_x) &= \sqrt{A'_{x+m} - A^2_{x+m}} \\ M_m(P_x) &= \frac{\sqrt{A'_{x+m} - A^2_{x+m}}}{1 - A_x} \end{aligned}\right\}. \tag{33}$$

Aus diesen Formeln geht, wenn man sie mit den entsprechenden der vorigen Nummer zusammenhält, zunächst hervor, daß bei den behandelten Versicherungsarten das *Verhältnis* der Risikos durch die ganze Versicherungsdauer konstant und gleich dem ursprünglichen Verhältnis bleibt, die Einzelwerte jedoch ändern sich mit fortschreitender Dauer in dem Maße, als der Wert der Quadratwurzel sich verändert.

Vergleicht man ferner die Risikowerte (32) und (33) mit den anfänglichen Risiken zum Alter $x + m$, so ergeben sich die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} M_m({}_{|n}a_x) &= M({}_{|n-m}a_{x+m}) \\ M_m(A_{x,\overline{n|}}) &= M(A_{x+m,\overline{n-m|}}) \\ M_m(P_x) &= \frac{a_{x+m}}{a_x} M(P_{x+m}) \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

und ähnliche für die lebenslänglichen Versicherungsformen.

Nach den Grundlagen der Tafel III und mit Hilfe der aus ihnen abgeleiteten Hilfstafel der vorigen Nummer ergibt sich beispielsweise:

$$M_{10}(a_{70}) = M(a_{80}) = 3{,}1641$$

$$M_{10}(A_{70}) = M(A_{80}) = 0{,}1070$$

$$M_{10}(P_{70}) = \frac{a_{80}}{a_{70}} M(P_{80}) = 0{,}4235.$$

278. Das Risiko eines Versicherungsbestandes. Den einfachsten Fall eines Bestandes bildet eine Gruppe völlig gleichartiger Versicherungen. Ist s ihre Anzahl, C das versicherte Kapital (oder die Rente), E die dafür zu leistende Einzahlung, μ das mittlere Risiko der versicherten Einheit, so beträgt das Gesamtrisiko, gemäß der Formel (3),

$$M = C\mu\sqrt{s}, \tag{35}$$

und das relative, d. h. auf eine Zahlungseinheit entfallende Risiko:

$$\frac{M}{sE} = \frac{C\mu}{E\sqrt{s}}. \tag{36}$$

Beispielsweise ist das mittlere Risiko einer Gruppe von $s = 400$ lebenslänglichen Todesfallversicherungen auf je $C = 1000$ *M*, abgeschlossen von $x = 70$-jährigen Personen gegen Zahlung der einmaligen Prämie $E = 747{,}38$ *M*, mit Benützung des am Schlusse von Nr. 276 gefundenen Wertes $\mu = 0{,}1374$:

$$M = 1000 \cdot 0{,}1374 \cdot \sqrt{400} = 2748 \text{ M};$$

relativ, d. i. im Verhältnis zu den Einzahlungen per $400 \cdot 747{,}38 = 298\,952$ *M*,

$$0{,}00919;$$

wollte also die Anstalt einen dem mittleren Risiko gleichen Sicherheitsfonds aufbringen, so hätte sie jede Prämie um $0{,}00919 \cdot 747{,}38 = 6{,}87$ *M* zu erhöhen.

Es handle sich weiter um eine Gruppe von Versicherungen, die gleichartig sind bis auf die Höhe der versicherten Summe; sie stimmen also überein im Alter, in der Versicherungsdauer, in der Versicherungskombination und der Art der Prämienzahlung; die versicherten Summen seien aber verschieden, und zwar $C_1, C_2, \cdots C_s$. Wenn μ das Risiko der versicherten Einheit bedeutet, so ist das gesamte mittlere Risiko:

$$M = \mu\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + \cdots + C_s^2}. \tag{37}$$

Bei gegebener Gesamtsumme $C_1 + C_2 + \cdots + C_s$ wird die Quadratsumme unter dem Wurzelzeichen und damit auch M am kleinsten, wenn $C_1 = C_2 = \cdots = C_s$ ist; je mehr sich die Versicherungssummen voneinander unterscheiden, desto größer wird M. Einem allzu großen Anwachsen des Risiko wird durch Limitierung der Höhe des Versicherungskapitales und Abgabe der überschießenden Beträge in Rückversicherung vorgebeugt.

Wenn sich beispielsweise die versicherte Gesamtsumme von 400 000 *M* auf die 400 Versicherten wie folgt verteilte:

5	à	10 000	ℳ
25	„	5 000	„
50	„	2 000	„
70	„	1 000	„
250	„	220	„ ,

so betrüge das mittlere Risiko

$$M = 0{,}1374 \sqrt{1407100000} = 5154 \text{ ℳ}$$

und relativ

$$0{,}0172,$$

so daß jetzt zur Bildung eines dem Risiko gleichkommenden Sicherheitsfonds auf die Prämie einer Versicherung per 1000 ℳ ein Zuschlag von 12,66 ℳ erforderlich wäre.

Den allgemeinsten Fall, wie ihn die Praxis darbietet, bildet ein Versicherungsbestand, bestehend aus verschiedenen Versicherungskombinationen, aus Personen verschiedenen Beitrittsalters, verschiedener Versicherungsdauer und mit verschiedenen Versicherungssummen. Ist s die Anzahl der (unabhängigen) Versicherungen, ist bei der ν-ten Versicherung

$$\left.\begin{array}{l} C_\nu \text{ die Versicherungssumme (Rente)} \\ \mu_\nu \text{ das Risiko der versicherten Einheit} \end{array}\right\} \quad (\nu = 1, 2, \cdots s),$$

so gilt für das totale mittlere Risiko die Formel:

$$M = \sqrt{C_1^2 \mu_1^2 + C_2^2 \mu_2^2 + \cdots + C_s^2 \mu_s^2}; \tag{38}$$

würde also in den Büchern, etwa neben der Reserve, bei jeder Versicherung oder Versicherungsgruppe das entsprechende $C_\nu^2 \mu_\nu^2$ hinzugeschrieben, so ergäbe die Hauptsumme dieser Rubrik das Quadrat von M. Dazu wären Tabellen der μ für alle Kombinationen, Alter und Versicherungsdauern erforderlich.

Wenn es sich nun darum handelt, die *versicherungstechnische Bedeutung* der so ermittelten Größe M festzustellen, so kann dazu zuvörderst der I. Tchebycheffsche Satz herangezogen werden (siehe Nr. 109).

Es sei x die Differenz zwischen der Auszahlung A_α an einen *ersten* Versicherten und seiner Einzahlung E_α ($\alpha = 1, 2, \cdots l$, wenn l die Anzahl der möglichen zusammengehörigen Wertepaare bedeutet), beide auf den Zeitpunkt t reduziert; w_α ($\alpha = 1, 2, \cdots l$) die Wahrscheinlichkeit der Wertverbindung A_α, E_α, so daß

$$\sum_1^l w_\alpha = 1$$

ist. Die Buchstaben y, A_β, E_β, w_β ($\beta = 1, 2, \cdots m$); z, A_γ, E_γ, w_γ

$(\gamma = 1, 2, \cdots n)$ ··· mögen die analogen Bedeutungen für einen zweiten, dritten, ··· Versicherten haben.

Die Mittelwerte von $x, y, z, \cdots$ sind notwendig einzeln gleich Null, weil nach dem obersten Grundsatze der Versicherungsrechnung

$$\sum_1^l w_\alpha A_\alpha = \sum_1^l w_\alpha E_\alpha,$$

$$\sum_1^m w_\beta A_\beta = \sum_1^m w_\beta E_\beta,$$

$$\sum_1^n w_\gamma A_\gamma = \sum_1^n w_\gamma E_\gamma,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ist, wenn Ein- und Auszahlungen richtig bemessen wurden.

Die Mittelwerte von $x^2, y^2, z^2, \cdots$ sind die mittleren Risikoquadrate der entsprechenden Versicherungen, nämlich

$$M^2_{(\alpha)} = \sum_1^l w_\alpha (A_\alpha - E_\alpha)^2$$

$$M^2_{(\beta)} = \sum_1^m w_\beta (A_\beta - E_\beta)^2$$

$$M^2_{(\gamma)} = \sum_1^n w_\gamma (A_\gamma - E_\gamma)^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Anwendung des zitierten Satzes auf den vorliegenden Fall führt nun zu dem folgenden Ergebnis: „Die Wahrscheinlichkeit P, daß die totale Abweichung der Einzahlungen von den Auszahlungen:

$$\mathsf{E} = x + y + z + \cdots,$$

ihrem absoluten Werte nach das θ-fache Totalrisiko

$$M = \sqrt{M^2_{(\alpha)} + M^2_{(\beta)} + M^2_{(\gamma)} + \cdots}$$

nicht übertreffe, ist größer als $1 - \frac{1}{\theta^2}$."

Dieser Satz, der unabhängig von der Anzahl und Art der Versicherungen und daher in hohem Grade allgemein ist, bestimmt jedoch nicht die *engsten* Grenzen, die einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit entsprechen. Ihm zufolge wäre z. B. die Wahrscheinlichkeit, daß das dreifache mittlere Risiko nicht überschritten werde, größer als $\frac{9}{10}$.

Man kann aber auch, von dem bei Versicherungsunternehmungen

platzgreifenden Umstande der *sehr großen* Anzahl von Einzelfällen Gebrauch machend, die Frage auf ein anderes Gebiet übertragen, auf das der *Fehlertheorie.*

Es läßt sich nämlich die totale Abweichung

$$\mathsf{E} = x + y + z + \cdots$$

der Einzahlungen von den Auszahlungen als *zusammengesetzter Fehler* in der Beobachtung einer Größe betrachten, deren wahrscheinlichster Wert Null ist, entstehend durch das Zusammentreffen der *Elementarfehler* $x, y, z, \cdots$, die aus den einzelnen Versicherungen entspringen. Wenn nun die Anzahl dieser Elementarfehler sehr groß ist, so befolgt der Totalfehler E unabhängig davon, nach welchem Gesetz die $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma, \cdots$ mit fortlaufendem Zeiger sich ändern, ein Gesetz, das durch die Funktion

$$\varphi(\mathsf{E}) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(\mathsf{E}-a)^2} \tag{39}$$

dargestellt ist [s. Nr. 123, (15*)]. Dabei ist a die Summe der Mittelwerte von $x, y, z, \cdots$, im vorliegenden Falle also Null, und h^2 die halbe reziproke Summe der Mittelwerte von $x^2, y^2, z^2, \cdots$, d. h. also

$$h^2 = \frac{1}{2\left(M^2_{(\alpha)} + M^2_{(\beta)} + M^2_{(\gamma)} + \cdots\right)} = \frac{1}{2M^2},$$

so daß endgiltig:

$$\varphi(\mathsf{E}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi M^2}} e^{-\frac{\mathsf{E}^2}{2M^2}}. \tag{40}$$

Sobald einmal das Gesetz des Fehlers feststeht, läßt sich auch der „mittlere“ und der „durchschnittliche“ Fehler ermitteln, die, sofern es sich um eigentliche Beobachtungsfehler handelt, Präzisionsmaße bilden, hier jedoch in der übertragenen Bedeutung *Maße für die Gefahr* des Unternehmers darstellen. Und zwar ist nach Nr. 130 der mittlere Fehler, d. i. die Quadratwurzel aus dem Mittelwerte von E^2, gleich

$$M,$$

und der durchschnittliche Fehler, d. i. der Mittelwert von $|\mathsf{E}|$, nach Nr. 129 gleich

$$M\sqrt{\frac{2}{\pi}};$$

da aber die Hälfte dieses Mittelwertes begrifflich mit dem durchschnittlichen Risiko R zusammenfällt, so ist

$$R = \frac{M}{\sqrt{2\pi}} \tag{41}$$

(vgl. Nr. 114).

Im Sinne dieser Auffassung läßt sich nun auf Grund von (40) die Wahrscheinlichkeit P dafür bestimmen, daß E den k-fachen Betrag

von M und daß es den k-fachen Betrag von R nicht überschreite. Wie in Nr. 115 und 114 ausgeführt worden, hängen dabei die Werte von k und P derart zusammen, daß in bezug auf M:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{k}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt, \tag{42}$$

in bezug auf R:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{k}{2\sqrt{\pi}}} e^{-t^2} dt \tag{43}$$

ist; nachstehend einige zusammengehörige Wertepaare:

k	in bezug auf M	in bezug auf R
	Wahrscheinlichkeit P	
1	0,68267	0,31006
2	0,95449	0,57498
3	0,99730	0,76863
4	0,99994	0,88945
5	·	0,95392
6	·	0,98332

Von diesem Zusammenhange könnte Gebrauch gemacht werden, um die Höhe des Sicherheitsfonds festzustellen, von dem mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit zu erwarten wäre, daß er zur Deckung eines durch zufällige Schwankungen in der Sterblichkeit entstehenden Abganges ausreichen werde. Wie hoch diese Wahrscheinlichkeit gegriffen werden soll, muß dem subjektiven Ermessen oder einer von außen kommenden Festsetzung überlassen bleiben. Ein Fonds von der Höhe des mittleren Risiko würde die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ gewährleisten, dagegen ein Fonds im Betrage des durchschnittlichen Risiko nur eine solche von weniger als $\frac{1}{3}$. Wollte man mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ gegen alle Zufälle gesichert sein, so wäre ein Fonds im Betrage von 1,8 M oder 4,16 R erforderlich.

Wie man bemerkt, sind M und R für den gedachten Zweck gleich verwendbar, keine der beiden Größen verdient vor der andern den Vorzug; die erste aber verdient ihn in Ansehung der Möglichkeit ihrer Berechnung.

Angenommen, eine Versicherungsanstalt hätte festgesetzt, einen Sicherheitsfonds in der Höhe θM zu bilden; es handle sich um einen Versicherungsbestand, der soeben, und zwar nur durch kapitalische Einzahlungen begründet wird, deren Summe E sei. Setzt man

$$\frac{\theta M}{E} = \vartheta,$$

so ist ϑE der *Sicherheitszuschlag* zu den einmaligen Nettoprämien, durch welchen der Sicherheitsfonds aufgebracht wird. Dieser Fonds ist unabhängig von den späteren zufälligen Schwankungen der Sterblichkeit, weil er zu Beginn und auf einmal gebildet wurde.

Anders steht es bei jährlicher Prämienzahlung, wo die Sicherheitszuschläge sowie die Prämien selbst successive einlaufen und daher, strenge genommen, von den zufälligen Störungen mit betroffen werden. Von dem letzteren Umstande soll jedoch hier abgesehen werden.

Zu einem Zeitpunkte t sei nun M das fernere mittlere Risiko, E der Wert der ferneren Prämieneinnahmen, ϑE der Wert der noch zu gewärtigenden Sicherheitszuschläge. Dann ist ein Teil des erforderlichen Sicherheitsfonds θM durch die künftigen Einnahmen ϑE gedeckt, der übrige Teil soll also aus der vor t liegenden Zeit vorhanden sein; diesen Teil:

$$\mathfrak{V} = \theta M - \vartheta E$$

darf man als *Risikoreserve* bezeichnen, da seine mathematische Konstitution analog ist jener der Prämienreserve. Bohlmann[1]) will in der Risikoreserve ein Maß für die *Stabilität* einer Versicherungsunternehmung erblicken: diese sei um so größer, je kleiner sich $\mathfrak{V}$ herausstellt. Indessen handelt es sich hier vorläufig um rein theoretische Begriffsbildungen.

1) Encykl. d. math. Wissensch. I, p. 915. — Bohlmann will bei der Bestimmung der Risikoreserve noch schärfer vorgehen und den oben gestreiften Einfluß der Sterblichkeitsschwankungen auf die Einnahme an Sicherheitszuschlägen mit in Rechnung ziehen; er unterscheidet daher zwischen dem *mittleren Nettorisiko* M, das mit den Nettoprämien gerechnet ist, und dem *mittleren Bruttorisiko* M', bei dessen Bewertung auch die Sicherheitszuschläge berücksichtigt sind. Zur Berechnung der Risikoreserve benützt er das letztere und setzt $\mathfrak{V} = \theta M' - \vartheta E$.

Tafel I.

Werte der Funktion $\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt.$

γ	$\Phi(\gamma)$	Diff.	γ	$\Phi(\gamma)$	Diff.	γ	$\Phi(\gamma)$	Diff.
0,00	0,0000 000	112 833	0,40	0,4283 922	95 768	0,80	0,7421 010	59 023
0,01	0,0112 833	112 811	0,41	0,4379 690	94 986	0,81	0,7480 033	58 075
0,02	0,0225 644	112 766	0,42	0,4474 676	94 191	0,82	0,7538 108	57 130
0,03	0,0338 410	112 699	0,43	0,4568 867	93 384	0,83	0,7595 238	56 189
0,04	0,0451 109	112 609	0,44	0,4662 251	92 567	0,84	0,7651 427	55 253
0,05	0,0563 718	112 497	0,45	0,4754 818	91 737	0,85	0,7706 680	54 322
0,06	0,0676 215	112 362	0,46	0,4846 555	90 897	0,86	0,7761 022	53 396
0,07	0,0788 577	112 204	0,47	0,4937 452	90 046	0,87	0,7814 398	52 475
0,08	0,0900 781	112 025	0,48	0,5027 498	89 185	0,88	0,7866 873	51 559
0,09	0,1012 806	111 824	0,49	0,5116 683	88 316	0,89	0,7918 432	50 650
0,10	0,1124 630	111 600	0,50	0,5204 999	87 438	0,90	0,7969 082	49 746
0,11	0,1236 230	111 354	0,51	0,5292 437	86 550	0,91	0,8018 828	48 849
0,12	0,1347 584	111 087	0,52	0,5378 987	85 654	0,92	0,8067 677	47 958
0,13	0,1458 671	110 799	0,53	0,5464 641	84 751	0,93	0,8115 635	47 075
0,14	0,1569 470	110 489	0,54	0,5549 392	83 841	0,94	0,8162 710	46 198
0,15	0,1679 959	110 158	0,55	0,5633 233	82 924	0,95	0,8208 908	45 328
0,16	0,1790 117	109 806	0,56	0,5716 157	82 001	0,96	0,8254 236	44 467
0,17	0,1899 923	109 434	0,57	0,5798 158	81 071	0,97	0,8298 703	43 612
0,18	0,2009 357	109 041	0,58	0,5879 229	80 136	0,98	0,8342 315	42 766
0,19	0,2118 398	108 627	0,59	0,5959 365	79 196	0,99	0,8385 081	41 927
0,20	0,2227 025	108 193	0,60	0,6038 561	78 251	1,00	0,8427 008	41 097
0,21	0,2335 218	107 740	0,61	0,6116 812	77 302	1,01	0,8468 105	40 275
0,22	0,2442 958	107 267	0,62	0,6194 114	76 349	1,02	0,8508 380	39 462
0,23	0,2550 225	106 775	0,63	0,6270 463	75 394	1,03	0,8547 842	38 657
0,24	0,2657 000	106 263	0,64	0,6345 857	74 435	1,04	0,8586 499	37 861
0,25	0,2763 263	105 734	0,65	0,6420 292	73 473	1,05	0,8624 360	37 075
0,26	0,2868 997	105 185	0,66	0,6493 765	72 510	1,06	0,8661 435	36 297
0,27	0,2974 182	104 618	0,67	0,6566 275	71 545	1,07	0,8697 732	35 529
0,28	0,3078 800	104 034	0,68	0,6637 820	70 579	1,08	0,8733 261	34 769
0,29	0,3182 834	103 433	0,69	0,6708 399	69 611	1,09	0,8768 030	34 020
0,30	0,3286 267	102 814	0,70	0,6778 010	68 644	1,10	0,8802 050	33 280
0,31	0,3389 081	102 178	0,71	0,6846 654	67 676	1,11	0,8835 330	32 549
0,32	0,3491 259	101 526	0,72	0,6914 330	66 708	1,12	0,8867 879	31 828
0,33	0,3592 785	100 859	0,73	0,6981 038	65 742	1,13	0,8899 707	31 116
0,34	0,3693 644	100 175	0,74	0,7046 780	64 776	1,14	0,8930 823	30 415
0,35	0,3793 819	99 477	0,75	0,7111 556	63 811	1,15	0,8961 238	29 724
0,36	0,3893 296	98 763	0,76	0,7175 367	62 849	1,16	0,8990 962	29 042
0,37	0,3992 059	98 034	0,77	0,7238 216	61 888	1,17	0,9020 004	28 370
0,38	0,4090 093	97 292	0,78	0,7300 104	60 931	1,18	0,9048 374	27 709
0,39	0,4187 385	96 537	0,79	0,7361 035	59 975	1,19	0,9076 083	27 057

γ	$\Phi(\gamma)$	Diff.	γ	$\Phi(\gamma)$	Diff.	γ	$\Phi(\gamma)$	Diff.
1,20	0,9103 140	26 415	1,70	0,9837 904	6 166	2,20	0,9981 372	872
1,21	0,9129 555	25 784	1,71	0,9844 070	5 958	2,21	0,9982 244	835
1,22	0,9155 339	25 162	1,72	0,9850 028	5 757	2,22	0,9983 079	799
1,23	0,9180 501	24 551	1,73	0,9855 785	5 561	2,23	0,9983 878	764
1,24	0,9205 052	23 949	1,74	0,9861 346	5 371	2,24	0,9984 642	731
1,25	0,9229 001	23 358	1,75	0,9866 717	5 186	2,25	0,9985 373	698
1,26	0,9252 359	22 777	1,76	0,9871 903	5 007	2,26	0,9986 071	668
1,27	0,9275 136	22 206	1,77	0,9876 910	4 832	2,27	0,9986 739	638
1,28	0,9297 342	21 645	1,78	0,9881 742	4 664	2,28	0,9987 377	609
1,29	0,9318 987	21 093	1,79	0,9886 406	4 499	2,29	0,9987 986	582
1,30	0,9340 080	20 552	1,80	0,9890 905	4 340	2,30	0,9988 568	556
1,31	0,9360 632	20 020	1,81	0,9895 245	4 186	2,31	0,9989 124	531
1,32	0,9380 652	19 498	1,82	0,9899 431	4 036	2,32	0,9989 655	507
1,33	0,9400 150	18 987	1,83	0,9903 467	3 892	2,33	0,9990 162	484
1,34	0,9419 137	18 485	1,84	0,9907 359	3 751	2,34	0,9990 646	461
1,35	0,9437 622	17 992	1,85	0,9911 110	3 615	2,35	0,9991 107	441
1,36	0,9455 614	17 510	1,86	0,9914 725	3 482	2,36	0,9991 548	420
1,37	0,9473 124	17 036	1,87	0,9918 207	3 355	2,37	0,9991 968	401
1,38	0,9490 160	16 573	1,88	0,9921 562	3 231	2,38	0,9992 369	382
1,39	0,9506 733	16 118	1,89	0,9924 793	3 111	2,39	0,9992 751	364
1,40	0,9522 851	15 673	1,90	0,9927 904	2 995	2,40	0,9993 115	347
1,41	0,9538 524	15 238	1,91	0,9930 899	2 883	2,41	0,9993 462	331
1,42	0,9553 762	14 811	1,92	0,9933 782	2 775	2,42	0,9993 793	315
1,43	0,9568 573	14 393	1,93	0,9936 557	2 664	2,43	0,9994 108	300
1,44	0,9582 966	13 984	1,94	0,9939 226	2 568	2,44	0,9994 408	286
1,45	0,9596 950	13 585	1,95	0,9941 794	2 469	2,45	0,9994 694	272
1,46	0,9610 535	13 194	1,96	0,9944 263	2 374	2,46	0,9994 966	260
1,47	0,9623 729	12 812	1,97	0,9946 637	2 283	2,47	0,9995 226	246
1,48	0,9636 541	12 483	1,98	0,9948 920	2 194	2,48	0,9995 472	235
1,49	0,9648 979	12 073	1,99	0,9951 114	2 109	2,49	0,9995 707	223
1,50	0,9661 052	11 716	2,00	0,9953 223	2 025	2,50	0,9995 930	213
1,51	0,9672 768	11 367	2,01	0,9955 248	1 947	2,51	0,9996 143	202
1,52	0,9684 135	11 027	2,02	0,9957 195	1 868	2,52	0,9996 345	192
1,53	0,9695 162	10 695	2,03	0,9959 063	1 795	2,53	0,9996 537	183
1,54	0,9705 857	10 370	2,04	0,9960 858	1 733	2,54	0,9996 720	173
1,55	0,9716 227	10 054	2,05	0,9962 581	1 654	2,55	0,9996 893	165
1,56	0,9726 281	9 745	2,06	0,9964 235	1 587	2,56	0,9997 058	157
1,57	0,9736 026	9 444	2,07	0,9965 822	1 522	2,57	0,9997 215	149
1,58	0,9745 470	9 150	2,08	0,9967 344	1 461	2,58	0,9997 364	141
1,59	0,9754 620	8 864	2,09	0,9968 805	1 400	2,59	0,9997 505	135
1,60	0,9763 484	8 585	2,10	0,9970 205	1 343	2,60	0,9997 640	127
1,61	0,9772 069	8 312	2,11	0,9971 548	1 288	2,61	0,9997 767	121
1,62	0,9780 381	8 048	2,12	0,9972 836	1 234	2,62	0,9997 888	115
1,63	0,9788 429	7 789	2,13	0,9974 070	1 183	2,63	0,9998 003	109
1,64	0,9796 218	7 538	2,14	0,9975 253	1 133	2,64	0,9998 112	103
1,65	0,9803 756	7 293	2,15	0,9976 386	1 086	2,65	0,9998 215	98
1,66	0,9811 049	7 055	2,16	0,9977 472	1 039	2,66	0,9998 313	93
1,67	0,9818 104	6 824	2,17	0,9978 511	994	2,67	0,9998 406	88
1,68	0,9824 928	6 598	2,18	0,9979 505	954	2,68	0,9998 494	84
1,69	0,9831 526	6 378	2,19	0,9980 459	913	2,69	0,9998 578	79

γ	$\Phi(\gamma)$	Diff.	γ	$\Phi(\gamma)$	Diff.	γ	$\Phi(\gamma)$
2,70	0,9998 657	75	3,20	0,9999 940	4	3,70	0,9999 9983 285
2,71	0,9998 732	71	3,21	0,9999 944	3	3,71	0,9999 9984 517
2,72	0,9998 802	67	3,22	0,9999 947	4	3,72	0,9999 9985 663
2,73	0,9998 870	63	3,23	0,9999 951	3	3,73	0,9999 9986 726
2,74	0,9998 933	61	3,24	0,9999 954	3	3,74	0,9999 9987 712
2,75	0,9998 994	57	3,25	0,9999 957	3	3,75	0,9999 9988 629
2,76	0,9999 051	54	3,26	0,9999 960	2	3,76	0,9999 9989 477
2,77	0,9999 105	51	3,27	0,9999 962	3	3,77	0,9999 9990 265
2,78	0,9999 156	48	3,28	0,9999 965	2	3,78	0,9999 9990 995
2,79	0,9999 204	46	3,29	0,9999 967	2	3,79	0,9999 9991 672
2,80	0,9999 250	43	3,30	0,9999 969	2	3,80	0,9999 9992 300
2,81	0,9999 293	41	3,31	0,9999 971	2	3,81	0,9999 9992 881
2,82	0,9999 334	38	3,32	0,9999 973	2	3,82	0,9999 9993 421
2,83	0,9999 372	37	3,33	0,9999 975	2	3,83	0,9999 9993 921
2,84	0,9999 409	34	3,34	0,9999 977	1	3,84	0,9999 9994 383
2,85	0,9999 443	33	3,35	0,9999 978	2	3,85	0,9999 9994 812
2,86	0,9999 476	31	3,36	0,9999 980	1	3,86	0,9999 9995 208
2,87	0,9999 507	29	3,37	0,9999 981	1	3,87	0,9999 9995 575
2,88	0,9999 536	27	3,38	0,9999 982	2	3,88	0,9999 9995 915
2,89	0,9999 563	26	3,39	0,9999 984	1	3,89	0,9999 9996 230
2,90	0,9999 589	24	3,40	0,9999 985	1	3,90	0,9999 9996 521
2,91	0,9999 613	23	3,41	0,9999 986	1	3,91	0,9999 9996 790
2,92	0,9999 636	22	3,42	0,9999 987	1	3,92	0,9999 9997 039
2,93	0,9999 658	21	3,43	0,9999 988	1	3,93	0,9999 9997 260
2,94	0,9999 679	19	3,44	0,9999 989	0	3,94	0,9999 9997 482
2,95	0,9999 698	18	3,45	0,9999 989		3,95	0,9999 9997 678
2,96	0,9999 716	17	3,46	0,9999 9900 780		3,96	0,9999 9997 860
2,97	0,9999 733	17	3,47	0,9999 9907 672		3,97	0,9999 9998 028
2,98	0,9999 750	15	3,48	0,9999 9914 101		3,98	0,9999 9998 183
2,99	0,9999 765	14	3,49	0,9999 9920 097		3,99	0,9999 9998 327
3,00	0,9999 779	14	3,50	0,9999 9925 691		4,0	0,9999 9998 458
3,01	0,9999 793	12	3,51	0,9999 9930 905		4,1	0,9999 9999 330
3,02	0,9999 805	12	3,52	0,9999 9935 766		4,2	0,9999 9999 714
3,03	0,9999 817	12	3,53	0,9999 9940 296		4,3	0,9999 9999 881
3,04	0,9999 829	10	3,54	0,9999 9944 519		4,4	0,9999 9999 951
3,05	0,9999 839	10	3,55	0,9999 9948 452		4,5	0,9999 9999 980
3,06	0,9999 849	10	3,56	0,9999 9952 115		4,6	0,9999 9999 992
3,07	0,9999 859	8	3,57	0,9999 9955 527		4,7	0,9999 9999 997
3,08	0,9999 867	9	3,58	0,9999 9958 703		4,8	0,9999 9999 999
3,09	0,9999 876	8	3,59	0,9999 9961 661			
3,10	0,9999 884	7	3,60	0,9999 9964 414			
3,11	0,9999 891	7	3,61	0,9999 9966 975			
3,12	0,9999 898	6	3,62	0,9999 9969 358			
3,13	0,9999 904	6	3,63	0,9999 9971 574			
3,14	0,9999 910	6	3,64	0,9999 9973 636			
3,15	0,9999 916	5	3,65	0,9999 9975 551			
3,16	0,9999 921	5	3,66	0,9999 9977 333			
3,17	0,9999 926	5	3,67	0,9999 9978 990			
3,18	0,9999 931	5	3,68	0,9999 9980 528			
3,19	0,9999 936	4	3,69	0,9999 9981 957			

Tafel II. Deutsche Sterbetafel.

Männliches Geschlecht.

Alter x	Überlebende l_x	Gestorbene d_x	Bevölkerung L_x	Sterbenswahrscheinlichkeit q_x	Lebenswahrscheinlichkeit p_x	(Abgekürzte) Lebenserwartung e_x
0	100 000	25 273	81 527	0,25 273	0,74 727	35,58
1	74 727	4 851	71 833	0,06 492	0,93 508	46,52
2	69 876	2 319	68 606	0,03 319	0,96 681	48,72
3	67 557	1 560	66 706	0,02 309	0,97 691	49,38
4	65 997	1 126	65 385	0,01 705	0,98 295	49,53
5	64 871	843	64 420	0,01 300	0,98 700	49,39
6	64 028	659	63 678	0,01 030	0,98 970	49,03
7	63 369	520	63 094	0,00 820	0,99 180	48,54
8	62 849	418	62 629	0,00 665	0,99 335	47,93
9	62 431	342	62 252	0,00 548	0,99 452	47,25
10	62 089	289	61 939	0,00 466	0,99 534	46,61
11	61 800	253	61 670	0,00 409	0,99 591	45,72
12	61 547	227	61 431	0,00 368	0,99 632	44,91
13	61 320	212	61 213	0,00 347	0,99 653	44,07
14	61 108	216	61 001	0,00 352	0,99 648	43,23
15	60 892	235	60 778	0,00 387	0,99 613	42,38
16	60 657	274	60 525	0,00 451	0,99 549	41,54
17	60 383	320	60 229	0,00 531	0,99 469	40,72
18	60 063	367	59 885	0,00 610	0,99 390	39,94
19	59 696	409	59 496	0,00 685	0,99 315	39,18
20	59 287	444	59 069	0,00 750	0,99 250	38,45
21	58 843	474	58 609	0,00 805	0,99 195	37,73
22	58 369	498	58 121	0,00 853	0,99 147	37,04
23	57 871	493	57 624	0,00 852	0,99 148	36,35
24	57 378	486	57 134	0,00 847	0,99 153	35,66
25	56 892	482	56 651	0,00 848	0,99 152	34,96
26	56 410	483	56 169	0,00 855	0,99 145	34,25
27	55 927	485	55 685	0,00 868	0,99 132	33,55
28	55 442	491	55 197	0,00 885	0,99 115	32,83
29	54 951	497	54 703	0,00 905	0,99 095	32,12
30	54 454	505	54 203	0,00 928	0,99 072	31,41
31	53 949	515	53 693	0,00 954	0,99 046	30,70
32	53 434	526	53 173	0,00 984	0,99 016	29,99
33	52 908	539	52 640	0,01 019	0,98 981	29,29
34	52 369	554	52 094	0,01 058	0,98 942	28,58
35	51 815	571	51 532	0,01 101	0,98 899	27,88
36	51 244	588	50 952	0,01 148	0,98 852	27,19
37	50 656	607	50 355	0,01 199	0,98 801	26,50
38	50 049	627	49 738	0,01 253	0,98 747	25,81
39	49 422	647	49 101	0,01 308	0,98 692	25,13
40	48 775	665	48 445	0,01 363	0,98 637	24,46
41	48 110	682	47 771	0,01 418	0,98 582	23,79
42	47 428	699	47 081	0,01 475	0,98 525	23,13
43	46 729	719	46 372	0,01 537	0,98 463	22,46
44	46 010	738	45 644	0,01 605	0,98 395	21,81
45	45 272	761	44 894	0,01 680	0,98 320	21,16
46	44 511	783	44 122	0,01 761	0,98 239	20,51
47	43 728	809	43 327	0,01 848	0,98 152	19,87
48	42 919	833	42 506	0,01 941	0,98 059	19,23
49	42 086	858	41 660	0,02 040	0,97 960	18,60

Deutsche Sterbetafel. Tafel II.

Weibliches Geschlecht.

Alter x	Überlebende l_x	Gestorbene d_x	Bevölkerung L_x	Sterbenswahrscheinlichkeit q_x	Lebenswahrscheinlichkeit p_x	(Abgekürzte) Lebenserwartung e_x
0	100 000	21 740	84 355	0,21 740	0,78 260	38,45
1	78 260	4 980	75 275	0,06 364	0,93 636	48,06
2	73 280	2 338	71 965	0,03 258	0,96 742	50,30
3	70 892	1 597	70 028	0,02 253	0,97 747	50,98
4	69 295	1 169	68 657	0,01 687	0,98 313	51,14
5	68 126	877	67 657	0,01 287	0,98 713	51,01
6	67 249	677	66 889	0,01 007	0,98 993	50,67
7	66 572	537	66 288	0,00 807	0,99 193	50,18
8	66 035	436	65 806	0,00 660	0,99 340	49,51
9	65 599	362	65 410	0,00 552	0,99 448	48,91
10	65 237	311	65 076	0,00 476	0,99 524	48,18
11	64 926	277	64 784	0,00 427	0,99 573	47,41
12	64 649	259	64 518	0,00 401	0,99 599	46,61
13	64 390	254	64 263	0,00 394	0,99 606	45,80
14	64 136	258	64 008	0,00 402	0,99 598	44,97
15	63 878	269	63 745	0,00 422	0,99 578	44,15
16	63 609	287	63 468	0,00 451	0,99 549	43,34
17	63 322	309	63 170	0,00 487	0,99 513	42,53
18	63 013	332	62 850	0,00 527	0,99 473	41,74
19	62 681	357	62 506	0,00 570	0,99 430	40,96
20	62 324	383	62 136	0,00 614	0,99 386	40,19
21	61 941	407	61 741	0,00 658	0,99 342	39,43
22	61 534	432	61 321	0,00 701	0,99 299	38,09
23	61 102	454	60 878	0,00 743	0,99 257	37,96
24	60 648	474	60 414	0,00 783	0,99 217	37,24
25	60 174	494	59 929	0,00 820	0,99 180	36,53
26	59 680	510	59 427	0,00 854	0,99 146	35,83
27	59 170	523	58 910	0,00 885	0,99 115	35,13
28	58 647	536	58 380	0,00 913	0,99 087	34,44
29	58 111	545	57 841	0,00 939	0,99 061	33,76
30	57 566	556	57 289	0,00 965	0,99 035	33,07
31	57 010	565	56 729	0,00 992	0,99 008	32,39
32	56 445	576	56 158	0,01 020	0,98 980	31,71
33	55 869	587	55 577	0,01 050	0,98 950	31,03
34	55 282	597	54 985	0,01 080	0,98 920	30,35
35	54 685	607	54 383	0,01 110	0,98 890	29,60
36	54 087	616	53 771	0,01 140	0,98 860	29,01
37	53 462	625	53 150	0,01 168	0,98 832	28,34
38	52 837	630	52 522	0,01 192	0,98 808	27,66
39	52 207	631	51 892	0,01 210	0,98 790	26,99
40	51 576	630	51 261	0,01 222	0,98 778	26,32
41	50 946	626	50 632	0,01 228	0,98 772	25,64
42	50 320	619	50 010	0,01 230	0,98 770	24,95
43	49 701	611	49 395	0,01 230	0,98 770	24,25
44	49 090	609	48 785	0,01 240	0,98 760	23,55
45	48 481	611	48 176	0,01 260	0,98 740	22,84
46	47 870	622	47 561	0,01 300	0,98 700	22,12
47	47 248	643	46 929	0,01 360	0,98 640	21,41
48	46 605	666	46 275	0,01 430	0,98 570	20,70
49	45 939	694	45 596	0,01 510	0,98 490	19,99

Männliches Geschlecht.

Alter x	Überlebende l_x	Gestorbene d_x	Bevölkerung L_x	Sterbenswahrscheinlichkeit q_x	Lebenswahrscheinlichkeit p_x	(Abgekürzte) Lebenserwartung e_x
50	41 228	885	40 789	0,02 145	0,97 885	17,98
51	40 343	910	39 891	0,02 256	0,97 744	17,36
52	39 433	936	38 968	0,02 374	0,97 626	16,75
53	38 497	963	38 019	0,02 501	0,97 499	16,15
54	37 534	990	37 043	0,02 639	0,97 361	15,55
55	36 544	1 020	36 038	0,02 790	0,97 210	14,96
56	35 524	1 050	35 003	0,02 956	0,97 044	14,37
57	34 474	1 082	33 937	0,03 139	0,96 861	13,79
58	33 392	1 116	32 838	0,03 342	0,96 658	13,22
59	32 276	1 152	31 705	0,03 568	0,96 432	12,66
60	31 124	1 189	30 534	0,03 820	0,96 180	12,11
61	29 935	1 227	29 326	0,04 100	0,95 900	11,57
62	28 708	1 266	28 080	0,04 409	0,95 591	11,05
63	27 442	1 303	26 795	0,04 748	0,95 252	10,53
64	26 139	1 337	25 475	0,05 118	0,94 882	10,03
65	24 802	1 369	24 121	0,05 520	0,94 480	9,55
66	23 433	1 396	22 738	0,05 956	0,94 044	9,08
67	22 037	1 417	21 331	0,06 429	0,93 571	8,62
68	20 620	1 431	19 906	0,06 942	0,93 058	8,18
69	19 189	1 439	18 470	0,07 500	0,92 500	7,75
70	17 750	1 440	17 029	0,08 108	0,91 892	7,34
71	16 310	1 430	15 593	0,08 770	0,91 230	6,94
72	14 880	1 412	14 171	0,09 489	0,90 511	6,56
73	13 468	1 383	12 772	0,10 267	0,89 733	6,19
74	12 085	1 342	11 408	0,11 105	0,88 895	5,85
75	10 743	1 289	10 091	0,12 004	0,87 996	5,51
76	9 454	1 226	8 832	0,12 965	0,87 035	5,20
77	8 228	1 151	7 643	0,13 989	0,86 011	4,90
78	7 077	1 067	6 532	0,15 077	0,84 923	4,62
79	6 010	975	5 511	0,16 230	0,83 770	4,35
80	5 035	879	4 583	0,17 448	0,82 552	4,10
81	4 156	778	3 754	0,18 731	0,81 269	3,86
82	3 378	678	3 027	0,20 074	0,79 926	3,64
83	2 700	580	2 398	0,21 467	0,78 533	3,43
84	2 120	485	1 866	0,22 900	0,77 100	3,24
85	1 635	399	1 425	0,24 363	0,75 637	3,06
86	1 236	319	1 067	0,25 846	0,74 154	2,90
87	917	251	784	0,27 344	0,72 656	2,74
88	666	192	563	0,28 852	0,71 148	2,60
89	474	144	397	0,30 370	0,69 630	2,46
90	330	105	273	0,31 902	0,68 098	2,34
91	225	75	184	0,33 457	0,66 543	2,22
92	150	53	121	0,35 047	0,64 953	2,10
93	97	36	77	0,36 689	0,63 311	1,99
94	61	23	48	0,38 404	0,61 596	1,89
95	38	15	30	0,10 217	0,59 783	1,80
96	23	10	17,4	0,42 158	0,57 842	1,68
97	13	5,7	9,7	0,44 259	0,55 741	1,57
98	7,3	3,4	5,4	0,46 560	0,53 440	1,49
99	3,9	1,9	2,8	0,49 102	0,50 898	1,41
100	2,0	1,0	1,4	0,51 930	0,48 070	1,36

Weibliches Geschlecht.

Alter x	Überlebende l_x	Gestorbene d_x	Bevölkerung L_x	Sterbenswahrscheinlichkeit q_x	Lebenswahrscheinlichkeit p_x	(Abgekürzte) Lebenserwartung e_x
50	45 245	724	44 887	0,01 600	0,98 400	19,29
51	44 521	754	44 148	0,01 695	0,98 305	18,59
52	43 767	786	43 378	0,01 795	0,98 205	17,91
53	42 981	819	42 576	0,01 905	0,98 095	17,22
54	42 162	854	41 740	0,02 025	0,97 975	16,55
55	41 308	894	40 867	0,02 165	0,97 835	15,88
56	40 414	942	39 949	0,02 330	0,97 670	15,22
57	39 472	996	38 981	0,02 525	0,97 475	14,57
58	38 476	1 058	37 955	0,02 750	0,97 250	13,94
59	37 418	1 125	36 864	0,03 005	0,96 995	13,31
60	36 293	1 192	35 705	0,03 285	0,96 715	12,71
61	35 101	1 258	34 480	0,03 585	0,96 415	12,13
62	33 843	1 322	33 190	0,03 905	0,96 095	11,56
63	32 521	1 381	31 837	0,04 247	0,95 753	11,01
64	31 140	1 437	30 428	0,04 613	0,95 387	10,47
65	29 703	1 486	28 966	0,05 005	0,94 995	9,96
66	28 217	1 531	27 457	0,05 425	0,94 575	9,45
67	26 686	1 568	25 906	0,05 875	0,94 125	8,97
68	25 118	1 597	24 323	0,06 360	0,93 640	8,50
69	23 521	1 620	22 713	0,06 885	0,93 115	8,04
70	21 901	1 636	21 085	0,07 470	0,92 530	7,60
71	20 265	1 648	19 442	0,08 135	0,91 865	7,17
72	18 617	1 657	17 789	0,08 900	0,91 100	6,76
73	16 960	1 653	16 132	0,09 745	0,90 255	6,37
74	15 307	1 630	14 488	0,10 650	0,89 350	6,00
75	13 677	1 587	12 877	0,11 600	0,88 400	5,66
76	12 090	1 521	11 320	0,12 585	0,87 415	5,34
77	10 569	1 438	9 838	0,13 600	0,86 400	5,03
78	9 131	1 336	8 450	0,14 640	0,85 360	4,75
79	7 795	1 225	7 168	0,15 710	0,84 290	4,48
80	6 570	1 106	6 002	0,16 830	0,83 170	4,22
81	5 464	985	4 956	0,18 025	0,81 975	3,98
82	4 479	865	4 032	0,19 310	0,80 690	3,75
83	3 614	747	3 226	0,20 685	0,79 315	3,53
84	2 867	635	2 536	0,22 135	0,77 865	3,33
85	2 232	527	1 956	0,23 635	0,76 365	3,14
86	1 705	429	1 479	0,25 160	0,74 840	2,96
87	1 276	341	1 095	0,26 700	0,73 300	2,80
88	935	264	794	0,28 250	0,71 750	2,65
89	671	200	564	0,29 810	0,70 190	2,51
90	471	148	391	0,31 384	0,68 616	2,37
91	323	106	265	0,32 981	0,67 019	2,25
92	217	75	176	0,34 612	0,65 388	2,13
93	142	52	113	0,36 296	0,63 704	2,01
94	90	34	71	0,38 052	0,61 948	1,91
95	56	22	44	0,39 905	0,60 095	1,81
96	34	14	26	0,41 885	0,58 115	1,70
97	20	9	15	0,44 025	0,55 975	1,59
98	11	5	8,1	0,46 362	0,53 638	1,46
99	5,9	2,9	4,2	0,48 939	0,51 061	1,35
100	3,0	1,6	2,1	0,51 800	0,48 200	1,24

Tafel III.

Sterbetafel H^M der 20 britischen

x	l_x	d_x	μ_x	D_x	N_x	S_x
0	127 283	14 358	0,15920	127 283	2 553 055	52 129 621
1	112 925	3 962	,07901	109 110	2 425 772	49 703 849
2	108 963	2 375	,02366	101 720	2 316 662	47 278 077
3	106 588	1 646	,01787	96 137	2 214 942	44 961 415
4	104 942	1 325	,01379	91 451	2 118 805	42 746 473
5	103 617	1 061	,01142	87 243	2 027 354	40 627 668
6	102 556	852	,00925	83 430	1 940 111	38 600 314
7	101 704	683	,00748	79 939	1 856 681	36 660 203
8	101 021	557	,00607	76 717	1 776 742	34 803 522
9	100 464	464	,00502	73 714	1 700 025	33 026 780
10	100 000	408	,00428	70 892	1 626 311	31 326 755
11	99 592	369	,00388	68 215	1 555 419	29 700 444
12	99 223	346	,00359	65 664	1 487 204	28 145 025
13	98 877	337	,00342	63 224	1 421 540	26 657 821
14	98 540	337	,00340	60 877	1 358 316	25 236 281
15	98 203	360	,00353	58 615	1 297 439	23 877 965
16	97 843	384	,00378	56 426	1 238 824	22 580 526
17	97 459	425	,00414	54 304	1 182 398	21 341 702
18	97 034	465	,00458	52 238	1 128 094	20 159 304
19	96 569	508	,00504	50 231	1 075 856	19 031 210
20	96 061	548	,00550	48 277	1 025 625	17 955 354
21	95 513	582	,00592	46 378	977 348	16 929 729
22	94 931	609	,00629	44 537	930 970	15 952 381
23	94 322	631	,00659	42 754	886 433	15 021 411
24	93 691	647	,00682	41 033	843 679	14 134 978
25	93 044	658	,00701	39 371	802 646	13 291 299
26	92 386	664	,00716	37 771	763 275	12 488 653
27	91 722	673	,00729	36 231	725 504	11 725 378
28	91 049	678	,00742	34 750	689 273	10 999 874
29	90 371	686	,00755	33 324	654 523	10 310 601
30	89 685	691	,00768	31 953	621 199	9 656 078
31	88 994	700	,00782	30 634	589 246	9 034 879
32	88 294	709	,00798	29 366	558 612	8 445 633
33	87 585	719	,00815	28 145	529 246	7 887 021
34	86 866	729	,00833	26 970	501 101	7 357 775
35	86 137	742	,00854	25 839	474 131	6 856 674
36	85 395	756	,00876	24 750	448 292	6 382 543
37	84 639	770	,00901	23 702	423 542	5 934 251
38	83 869	786	,00928	22 692	399 840	5 510 709
39	83 083	806	,00957	21 719	377 148	5 110 869
40	82 277	823	,00990	20 781	355 429	4 733 721
41	81 454	846	,01025	19 877	334 648	4 378 292
42	80 608	871	,01064	19 006	314 771	4 043 644
43	79 737	895	,01106	18 165	295 765	3 728 873
44	78 842	924	,01153	17 353	277 600	3 433 108
45	77 918	954	,01204	16 570	260 247	3 155 508
46	76 964	986	,01260	15 814	243 677	2 895 261
47	75 978	1 021	,01321	15 083	227 863	2 651 584
48	74 957	1 061	,01388	14 377	212 780	2 423 721
49	73 896	1 101	,01462	13 694	198 403	2 210 941

Gesellschaften. — $3\frac{1}{2}\%$.

Tafel III.

C_x	M_x	R_x	a_x	a_{xx}	a_{xxx}	A_x	x
13 872	40 948	785 908	20,058	15,079	11,633	0,32171	0
3 698,5	27 075,5	744 959,6	22,233	18,513	15,760	,24861	1
2 142,1	23 377,0	717 884,1	22,775	19,467	17,004	,22982	2
1 434,4	21 234,9	694 507,1	23,039	19,974	17,696	,22088	3
1 115,6	19 800,5	673 272,2	23,169	20,260	18,107	,21652	4
863,14	18 684,94	653 471,69	23,238	20,447	18,393	,21417	5
669,67	17 821,80	634 786,75	23,255	20,546	18,567	,21362	6
518,68	17 152,13	616 964,95	23,225	20,570	18,642	,21456	7
408,70	16 633,45	599 812,82	23,160	20,530	18,633	,21681	8
328,94	16 224,75	583 179,37	23,062	20,439	18,555	,22011	9
279,46	15 895,81	566 954,62	22,940	20,307	18,424	,22423	10
244,20	15 616,35	551 058,81	22,802	20,146	18,257	,22892	11
221,24	15 372,15	535 442,46	22,648	19,964	18,060	,23410	12
208,19	15 150,91	520 070,31	22,484	19,765	17,843	,23964	13
201,15	14 942,72	504 919,40	22,312	19,555	17,612	,24547	14
207,61	14 741,57	489 976,68	22,134	19,337	17,372	,25151	15
213,96	14 533,96	475 235,11	21,955	19,118	17,132	,25758	16
228,80	14 320,00	460 701,15	21,774	18,901	16,895	,26370	17
241,87	14 091,20	446 381,15	21,596	18,690	16,669	,26974	18
255,30	13 849,33	432 289,95	21,418	18,486	16,452	,27571	19
266,09	13 594,03	418 440,62	21,245	18,289	16,248	,28159	20
273,04	13 327,94	404 846,59	21,074	18,101	16,055	,28738	21
276,05	13 054,90	391 518,65	20,903	17,917	15,870	,29313	22
276,35	12 778,85	378 463,75	20,733	17,736	15,691	,29890	23
273,77	12 502,50	365 684,90	20,561	17,555	15,514	,30471	24
269,02	12 228,73	353 182,40	20,387	17,374	15,337	,31061	25
262,29	11 959,71	340 953,67	20,208	17,189	15,159	,31664	26
256,86	11 697,42	328 993,96	20,024	17,000	14,976	,32284	27
250,01	11 440,56	317 296,54	19,835	16,805	14,787	,32924	28
244,41	11 190,55	305 855,98	19,641	16,605	14,593	,33582	29
237,86	10 946,14	294 665,43	19,441	16,399	14,394	,34257	30
232,81	10 708,28	283 719,29	19,235	16,187	14,189	,34954	31
227,83	10 475,47	273 011,01	19,023	15,968	13,978	,35671	32
223,23	10 247,64	262 535,54	18,804	15,744	13,761	,36412	33
218,69	10 024,41	252 287,90	18,580	15,513	13,558	,37167	34
215,06	9 805,72	242 263,49	18,349	15,277	13,309	,37949	35
211,70	9 590,66	232 457,77	18,112	15,035	13,075	,38750	36
208,33	9 378,96	222 867,11	17,870	14,787	12,836	,39571	37
205,47	9 170,63	213 488,15	17,620	14,532	12,590	,40414	38
203,58	8 965,16	204 317,52	17,365	14,272	12,339	,41278	39
200,84	8 761,58	195 352,36	17,103	14,007	12,084	,42161	40
199,47	8 560,74	186 590,78	16,835	13,736	11,824	,43068	41
198,42	8 361,27	178 030,04	16,562	13,459	11,559	,43993	42
196,99	8 162,85	169 668,77	16,282	13,179	11,291	,44938	43
196,49	7 965,86	161 505,92	15,997	12,893	11,018	,45904	44
196,02	7 769,37	153 540,06	15,706	12,603	10,742	,46889	45
195,74	7 573,35	145 770,69	15,409	12,308	10,462	,47892	46
195,83	7 377,61	138 197,34	15,107	12,010	10,180	,48914	47
196,63	7 181,78	130 819,73	14,800	11,709	9,895	,49953	48
197,14	6 985,15	123 637,95	14,488	11,404	9,608	,51008	49

x	l_x	d_x	μ_x	D_x	N_x	S_x
50	72 795	1 144	0,01542	13 034	184 709	2 012 538
51	71 651	1 193	,01631	12 395	171 675	1 827 829
52	70 458	1 243	,01727	11 777	159 280	1 656 154
53	69 215	1 296	,01833	11 178	147 503	1 496 874
54	67 919	1 353	,01950	10 598	136 325	1 349 371
55	66 566	1 414	,02077	10 035	125 727	1 213 046
56	65 152	1 475	,02216	9 490,1	115 691,8	1 087 319,3
57	63 677	1 541	,02369	8 961,5	106 201,7	971 627,5
58	62 136	1 612	,02536	8 448,9	97 240,2	865 425,8
59	60 524	1 682	,02719	7 951,5	88 791,3	768 185,6
60	58 842	1 755	,02920	7 469,1	80 839,8	679 394,3
61	57 087	1 830	,03140	7 001,3	73 370,7	598 554,5
62	55 257	1 906	,03381	6 547,7	66 369,4	525 183,8
63	53 351	1 983	,03645	6 108,0	59 821,7	458 814,4
64	51 368	2 059	,03934	5 682,1	53 713,7	398 992,7
65	49 309	2 133	,04251	5 270,0	48 031,6	345 279,0
66	47 176	2 204	,04599	4 871,5	42 671,6	297 247,4
67	44 972	2 273	,04979	4 486,8	37 890,1	254 485,8
68	42 699	2 334	,05396	4 116,0	33 403,3	216 595,7
69	40 365	2 388	,05853	3 759,5	29 287,3	183 192,4
70	37 977	2 434	,06353	3 417,4	25 527,8	153 905,1
71	35 543	2 468	,06901	3 090,2	22 110,4	128 377,3
72	33 075	2 490	,07502	2 778,4	19 020,2	106 266,9
73	30 585	2 496	,08160	2 482,3	16 241,8	87 246,7
74	28 089	2 487	,08881	2 202,7	13 759,5	71 004,9
75	25 602	2 459	,09671	1 939,7	11 556,8	57 245,4
76	23 143	2 412	,10536	1 694,1	9 617,1	45 688,6
77	20 731	2 343	,11485	1 466,3	7 923,0	36 071,5
78	18 388	2 255	,12523	1 256,6	6 456,7	28 148,5
79	16 133	2 146	,13662	1 065,2	5 200,1	21 691,8
80	13 987	2 018	,14909	892,26	4 134,89	16 491,72
81	11 969	1 873	,16275	737,72	3 242,63	12 356,83
82	10 096	1 712	,17772	601,23	2 504,91	9 114,20
83	8 384	1 540	,19412	482,39	1 903,68	6 609,29
84	6 844	1 361	,21209	380,47	1 421,29	4 705,61
85	5 483	1 180	,23177	294,50	1 040,82	3 284,32
86	4 303	1 002	,25343	223,31	746,32	2 243,50
87	3 301	830	,27697	165,52	523,01	1 497,18
88	2 471	671	,30286	119,71	357,49	974,17
89	1 800	527	,33123	84,252	237,784	616,80
90	1 273	402	,36230	57,571	153,532	378,896
91	871	296	,39635	38,058	95,961	225,364
92	575	209	,43366	24,275	57,903	129,403
93	366	144	,47453	14,929	33,628	71,500
94	222	93	,51930	8,749	18,699	37,872
95	129	58	,56830	4,912	9,950	19,173
96	71	34	,62211	2,612	5,038	9,223
97	37	18	,68100	1,315	2,426	4,185
98	19	10	,74552	0,653	1,111	1,759
99	9	5	,81621	,299	0,458	0,648
100	4	3	,89366	,128	,159	,190
101	1	1	,97851	,031	,031	,031
102	0	...	∞	...	...	...

C_x	M_x	R_x	a_x	a_{xx}	a_{xxx}	A_x	x
197,91	6 788,01	116 652,80	14,172	11,096	9,320	0,52079	50
199,41	6 590,10	109 864,79	13,850	10,785	9,030	,53166	51
200,74	6 390,69	103 274,69	13,524	10,474	8,740	,54265	52
202,22	6 189,95	96 884,00	13,196	10,161	8,451	,55377	53
203,98	5 987,73	90 694,05	12,864	9,847	8,161	,56500	54
205,96	5 783,75	84 706,32	12,528	9,532	7,873	,57634	55
207,58	5 577,79	78 922,57	12,191	9,218	7,587	,58775	56
209,54	5 370,21	73 344,78	11,851	8,904	7,303	,59925	57
211,78	5 160,67	67 974,57	11,509	8,592	7,021	,61082	58
213,51	4 948,89	62 813,90	11,167	8,282	6,742	,62239	59
215,24	4 735,38	57 865,01	10,823	7,973	6,468	,63400	60
216,85	4 520,14	53 129,63	10,480	7,668	6,197	,64561	61
218,21	4 303,29	48 609,49	10,136	7,366	5,931	,65722	62
219,35	4 085,08	44 306,20	9,794	7,068	5,671	,66881	63
220,06	3 865,73	40 221,12	9,453	6,775	5,416	,68033	64
220,26	3 645,67	36 355,39	9,114	6,486	5,167	,69178	65
219,89	3 425,41	32 709,72	8,778	6,204	4,925	,70315	66
219,11	3 205,52	29 284,31	8,445	5,927	4,690	,71443	67
217,38	2 986,41	26 078,79	8,115	5,656	4,462	,72555	68
214,89	2 769,03	23 092,38	7,790	5,393	4,241	,73653	69
211,62	2 554,14	20 323,35	7,470	5,136	4,028	,74738	70
307,32	2 342,52	17 769,21	7,155	4,887	3,823	,75804	71
202,09	2 135,20	15 426,69	6,846	4,646	3,626	,76851	72
195,73	1 933,11	13 291,49	6,543	4,413	3,437	,77874	73
188,43	1 737,38	11 358,38	6,247	4,189	3,256	,78877	74
180,01	1 548,95	9 621,00	5,958	3,973	3,083	,79856	75
170,60	1 368,94	8 072,05	5,677	3,765	2,919	,80802	76
160,11	1 198,34	6 703,11	5,404	3,567	2,764	,81726	77
148,89	1 038,23	5 504,77	5,138	3,377	2,616	,82623	78
136,90	889,34	4 466,54	4,882	3,195	2,476	,83491	79
124,38	752,44	3 577,20	4,634	3,023	2,344	,84330	80
111,54	628,06	2 824,76	4,395	2,859	2,220	,85135	81
98,503	516,521	2 196,695	4,166	2,705	2,104	,85911	82
85,611	418,018	1 680,174	3,946	2,558	1,995	,86656	83
73,102	332,407	1 262,156	3,736	2,420	1,894	,87368	84
61,236	259,305	929,749	3,584	2,290	1,799	,88050	85
50,241	198,069	670,444	3,342	2,168	1,711	,88699	86
40,210	147,828	472,375	3,160	2,055	1,630	,89314	87
31,407	107,618	324,547	2,986	1,948	1,555	,89902	88
23,833	76,211	216,929	2,822	1,849	1,486	,90457	89
17,565	52,378	140,718	2,667	1,756	1,423	,90981	90
12,496	34,813	88,340	2,521	1,671	1,366	,91472	91
8,5251	22,3170	53,5272	2,385	1,594	1,315	,91935	92
5,6751	13,7919	31,2102	2,253	1,517	1,264	,92385	93
3,5412	8,1168	17,4183	2,137	1,455	1,225	,92773	94
2,1338	4,5756	9,3015	2,106	1,394	1,186	,93152	95
1,2086	2,4418	4,7259	1,929	1,347	1,157	,93480	96
0,6183	1,2332	2,2841	1,844	1,321	1,145	,93665	97
,3317	0,6149	1,0509	1,702	1,261	1,112	,94248	98
,1603	,2832	0,4360	1,533	1,202	1,086	,94816	99
,0930	,1229	,1528	1,242	1,060	1,015	,95803	100
,0299	,0299	,0299	...	...	...	,96618	101
...	...	...				...	102

Tafel IV.

Sterbetafel *M* und *WI* der 23 deutschen Gesellschaften. — $3\frac{1}{2}\,\%$.

x	l_x	d_x	D_x	N_x	C_x	M_x
20	100 000	919	50 257	1 013 125	446,24	15 386,49
21	99 081	908	48 109	980 868	425,99	14 940,25
22	98 173	887	46 057	932 759	402,06	14 514,26
23	97 286	861	44 097	886 702	377,08	14 112,20
24	96 425	835	42 229	842 605	353,33	13 735,12
25	95 590	816	40 449	800 376	333,61	13 381,79
26	94 774	804	38 747	759 927	317,59	13 048,18
27	93 970	797	37 119	721 180	304,17	12 730,59
28	93 173	795	35 560	684 061	293,15	12 426,42
29	92 378	800	34 062	648 501	285,02	12 133,27
30	91 578	808	32 626	614 439	278,13	11 848,25
31	90 770	818	31 246	581 813	272,06	11 570,12
32	89 952	831	29 917	550 567	267,03	11 298,06
33	89 121	841	28 637	520 650	261,11	11 031,03
34	88 280	856	27 408	492 013	256,77	10 769,92
35	87 424	873	26 224	464 605	253,02	10 513,15
35	86 551	889	25 084	438 381	248,94	10 260,13
37	85 662	906	23 987	413 297	245,12	10 011,19
38	84 756	928	22 931	389 310	242,59	9 766,07
39	83 828	950	21 913	366 379	239,94	9 523,48
40	82 878	975	20 933	344 466	237,93	9 283,54
41	81 903	1006	19 987	323 533	237,19	9 045,61
42	80 897	1035	19 072	303 546	235,78	8 808,42
43	79 862	1063	18 192	284 474	233,97	8 572,64
44	78 799	1092	17 344	266 282	232,21	8 338,67
45	77 707	1117	16 523	248 938	229,51	8 106,46
46	76 590	1140	15 736	232 415	226,31	7 876,95
47	75 450	1169	14 978	216 679	224,22	7 650,64
48	74 281	1204	14 247	201 701	223,12	7 426,42
49	73 077	1246	13 542	187 454	223,09	7 203,30
50	71 831	1303	12 861	173 912	225,42	6 980,21
51	70 528	1362	12 201	161 051	227,65	6 754,79
52	69 166	1425	11 561	148 850	230,14	6 527,14
53	67 741	1490	10 940	137 289	232,49	6 297,00
54	66 251	1556	10 337	126 349	234,58	6 064,51
55	64 695	1621	9 753,2	116 012,3	236,12	5 829,93
56	63 074	1691	9 187,4	106 259,1	237,97	5 593,81
57	61 383	1759	8 638,5	97 071,7	239,18	5 355,84
58	59 624	1832	8 107,2	88 433,2	240,68	5 116,66
59	57 792	1900	7 592,5	80 326,0	241,17	4 875,98

x	l_x	d_x	D_x	N_x	C_x	M_x
60	55 892	1976	7 094,4	72 733,5	242,33	4 634,81
61	53 916	2038	6 612,2	65 639,1	241,48	4 392,48
62	51 878	2097	6 147,2	59 026,9	240,07	4 151,00
63	49 781	2149	5 699,1	52 879,7	237,70	3 910,93
64	47 632	2197	5 268,8	47 180,6	234,79	3 673,23
65	45 435	2246	4 855,8	41 911,8	231,92	3 438,44
66	43 189	2302	4 459,6	37 056,0	229,67	3 206,52
67	40 887	2355	4 079,1	32 596,4	227,01	2 976,85
68	38 532	2399	3 714,3	28 517,3	223,43	2 749,84
69	36 133	2432	3 365,3	24 803,0	218,84	2 526,41
70	33 107	2452	3 032,5	21 437,7	213,19	2 307,57
71	31 249	2455	2 716,7	18 405,2	206,23	2 094,38
72	28 794	2436	2 418,8	15 688,5	197,70	1 888,15
73	26 358	2406	2 139,2	13 269,7	188,67	1 690,45
74	23 952	2360	1 878,2	11 130,5	178,80	1 501,78
75	21 592	2299	1 635,9	9 252,3	168,30	1 322,98
76	19 293	2210	1 412,2	7 616,4	156,31	1 154,68
77	17 083	2103	1 208,1	6 204,2	143,70	998,37
78	14 980	1982	1 023,6	4 996,1	130,86	854,67
79	12 998	1848	858,1	3 972,5	117,87	723,81
80	11 150	1730	711,3	3 114,4	106,63	605,94
81	9 420	1599	580,6	2 403,1	95,22	499,31
82	7 821	1443	465,8	1 822,5	83,02	404,09
83	6 378	1264	366,9	1 356,7	70,26	321,07
84	5 114	1080	284,4	989,8	58,01	250,81
85	4 034	896	216,6	705,4	46,50	192,80
86	3 138	715	162,8	488,8	35,85	146,30
87	2 423	566	121,5	326,0	27,42	110,45
88	1 857	442	89,9	204,5	20,68	83,03
89	1 415	344	66,2	114,6	15,56	62,35
90	1 071	1071	48,4	48,4	46,79	46,79

Tafel V.

Grundlagen: Sterbetafel *M* u. *WI* der 23 deutschen Gesellschaften. — $3\frac{1}{2}$%.

x	55: $_{\overline{55-x}\vert}a_x$	55: $A_{x,\overline{55-x}\vert}$	55: P	60: $_{\overline{60-x}\vert}a_x$	60: $A_{x,\overline{60-x}\vert}$	60: P	65: $_{\overline{65-x}\vert}a_x$	65: $A_{x,\overline{65-x}\vert}$	65: P	70: $_{\overline{70-x}\vert}a_x$	70: $A_{x,\overline{70-x}\vert}$	70: P	80: $_{\overline{80-x}\vert}a_x$	80: $A_{x,\overline{80-x}\vert}$	80: P
20	18,21	0,3842	0,0211	19,07	0,3552	0,0186	19,68	0,3346	0,0170	20,09	0,3207	0,0160	20,46	0,3082	0,0151
21	17,98	0,3921	0,0218	18,88	0,3617	0,0192	19,52	0,3399	0,0174	19,94	0,3258	0,0163	20,32	0,3129	0,0153
22	17,73	0,4004	0,0226	18,67	0,3687	0,0197	19,34	0,3461	0,0179	19,79	0,3308	0,0167	20,18	0,3177	0,0157
23	17,48	0,4090	0,0234	18,46	0,3758	0,0204	19,16	0,3521	0,0184	19,62	0,3365	0,0172	20,04	0,3224	0,0161
24	17,21	0,4180	0,0243	18,23	0,3835	0,0210	18,96	0,3589	0,0189	19,45	0,3423	0,0176	19,88	0,3279	0,0165
25	16,92	0,4278	0,0253	17,99	0,3917	0,0218	18,75	0,3659	0,0195	19,26	0,3487	0,0181	19,71	0,3335	0,0169
26	16,62	0,4379	0,0264	17,74	0,4001	0,0226	18,53	0,3734	0,0201	19,06	0,3555	0,0187	19,53	0,3396	0,0174
27	16,30	0,4488	0,0275	17,47	0,4093	0,0234	18,30	0,3812	0,0209	18,85	0,3626	0,0192	19,35	0,3457	0,0179
28	15,97	0,4600	0,0288	17,19	0,4187	0,0244	18,06	0,3893	0,0216	18,63	0,3700	0,0199	19,15	0,3524	0,0181
29	15,64	0,4711	0,0301	16,91	0,4282	0,0253	17,81	0,3978	0,0223	18,41	0,3775	0,0205	18,95	0,3592	0,0189
30	15,28	0,4833	0,0316	16,60	0,4386	0,0264	17,55	0,4065	0,0232	18,18	0,3853	0,0212	18,74	0,3663	0,0196
31	14,91	0,4959	0,0333	16,29	0,4491	0,0276	17,28	0,4157	0,0241	17,93	0,3937	0,0220	18,52	0,3737	0,0202
32	14,53	0,5087	0,0350	15,97	0,4600	0,0288	17,00	0,4251	0,0250	17,69	0,4018	0,0227	18,30	0,3812	0,0208
33	14,13	0,5222	0,0370	15,64	0,4711	0,0301	16,72	0,4345	0,0260	17,43	0,4106	0,0235	18,07	0,3890	0,0215
34	13,72	0,5360	0,0391	15,30	0,4826	0,0316	16,42	0,4447	0,0271	17,17	0,4194	0,0244	17,84	0,3955	0,0222
35	13,29	0,5506	0,0414	14,94	0,4949	0,0331	16,12	0,4548	0,0282	16,90	0,4285	0,0254	17,60	0,4048	0,0230
36	12,85	0,5655	0,0440	14,58	0,5071	0,0348	15,81	0,4654	0,0295	16,62	0,4379	0,0264	17,35	0,4133	0,0238
37	12,39	0,5811	0,0469	14,20	0,5198	0,0366	15,48	0,4766	0,0308	16,34	0,4475	0,0274	17,10	0,4217	0,0247
38	11,92	0,5969	0,0501	13,81	0,5331	0,0386	15,15	0,4876	0,0322	16,04	0,4576	0,0285	16,84	0,4306	0,0256
39	11,43	0,6135	0,0537	13,40	0,5469	0,0408	14,81	0,4993	0,0337	15,74	0,4677	0,0297	16,58	0,4394	0,0265
40	10,91	0,6311	0,0578	12,98	0,5612	0,0432	14,45	0,5114	0,0354	15,43	0,4782	0,0310	16,31	0,4485	0,0275
41				12,55	0,5756	0,0459	14,09	0,5236	0,0372	15,12	0,4886	0,0323	16,03	0,4579	0,0286
42				12,10	0,5908	0,0488	13,72	0,5360	0,0391	14,79	0,4999	0,0338	15,75	0,4673	0,0297
43				11,64	0,6064	0,0521	13,33	0,5493	0,0412	14,46	0,5111	0,0353	15,47	0,4769	0,0308
44				11,16	0,6226	0,0558	12,94	0,5625	0,0435	14,12	0,5225	0,0370	15,17	0,4870	0,0321
45				10,66	0,6395	0,0600	12,53	0,5763	0,0460	13,77	0,5440	0,0388	14,88	0,4970	0,0334
46							12,11	0,5905	0,0488	13,41	0,5466	0,0408	14,57	0,5074	0,0348
47							11,67	0,6054	0,0519	13,05	0,5587	0,0428	14,26	0,5178	0,0363
48							11,22	0,6205	0,0553	12,65	0,5722	0,0452	13,94	0,5287	0,0379
49							10,75	0,6364	0,0592	12,26	0,5854	0,0477	13,61	0,5498	0,0397
50							10,26	0,6530	0,0636	11,86	0,5990	0,0505	13,28	0,5510	0,0415
51										11,44	0,6132	0,0536	12,95	0,5621	0,0434
52										11,02	0,6273	0,0569	12,61	0,5736	0,0455
53										10,59	0,6419	0,0606	12,27	0,5851	0,0477
54										10,15	0,6567	0,0647	11,92	0,5969	0,0501
55										9,70	0,6720	0,0693	11,58	0,6085	0,0526
56													11,23	0,6202	0,0552
57													10,88	0,6322	0,0581
58													10,52	0,6442	0,0612
59													10,17	0,6561	0,0645
60													9,81	0,6684	0,0681
61													9,46	0,6802	0,0719
62													9,10	0,6923	0,0761
63													8,73	0,7048	0,0807
64													8,36	0,7174	0,0858
65													7,99	0,7299	0,0914

Tafel VI.

Grundlagen: Invaliditäts- und Sterblichkeitsverhältnisse der gesamten Eisenbahnbediensteten. — $3^1/_2$%.

Alter x	Lebende Aktive $l_x^{(a)}$	Ausgeschiedene überh. $(J_1+S_1)_x$	Ausscheidewahrsch. $w_x+q_x^{(aa)}$	Invalid geword. J_x	Invaliditätswahrsch. w_x	Diskontierte Zahlen der Aktiven $D_x^{(a)}$	Diskontierte Zahlen der Invaliden I_x	Aktivitätsrenten ${}^{a}a_x$
20	100 000	816	0,00816	14	0,00014	50 256,59	6,79799	19,43587
21	99 184	795	802	24	24	48 160,86	11,25961	19,23811
22	98 389	777	790	35	36	46 159,26	15,86500	19,02896
23	97 612	762	780	46	47	44 246,11	20,14603	18,80852
24	96 850	749	773	57	59	42 416,15	24,11938	18,57683
25	96 101	738	768	69	72	40 664,85	28,20980	18,33380
26	95 363	730	765	81	85	38 987,99	31,99599	18,07932
27	94 633	724	764	93	98	37 381,19	35,49385	17,81347
28	93 909	727	775	106	113	35 840,77	39,08731	17,53611
29	93 182	739	793	119	128	34 360,69	42,39713	17,24839
30	92 443	752	813	134	145	32 935,44	46,12686	16,95153
31	91 691	771	841	151	165	31 562,82	50,22104	16,64523
32	90 920	803	883	171	188	30 239,06	54,94960	16,33013
33	90 117	843	935	194	215	28 958,44	60,23236	16,00807
34	89 274	889	996	222	249	27 717,44	66,59487	15,68003
35	88 385	940	1064	254	287	26 513,46	73,61751	15,34665
36	87 445	998	1141	288	329	25 344,42	80,64910	15,00841
37	86 447	1 057	1223	325	376	24 207,89	87,93262	14,66608
38	85 390	1 116	1307	363	425	23 103,28	94,89274	14,31948
39	84 274	1 180	1400	402	477	22 030,28	101,5341	13,96822
40	83 094	1 240	1492	444	534	20 987,26	108,3499	13,61271
41	81 854	1 300	1598	489	597	19 974,95	115,2960	13,25191
42	80 554	1 362	1691	538	668	18 992,95	122,5596	12,88537
43	79 192	1 426	1801	586	740	18 040,40	128,9799	12,51293
44	77 766	1 489	1915	635	817	17 116,48	135,0386	12,13438
45	76 277	1 568	2056	694	910	16 221,01	142,5947	11,74905
46	74 709	1 649	2207	753	1008	15 350,30	149,4853	11,35876
47	73 060	1 747	2391	823	1126	14 503,85	157,8567	10,96330
48	71 313	1 859	2607	913	1280	13 678,30	169,1973	10,56464
49	69 454	1 986	2859	1 012	1457	12 871,23	181,2020	10,16437
50	67 468	2 117	3138	1 124	1666	12 080,37	194,4502	9,76433
51	65 351	2 264	3464	1 252	1916	11 305,62	209,2695	9,36493
52	63 087	2 404	3811	1 377	2183	10 544,88	222,3799	8,96840
53	60 683	2 545	4194	1 501	2473	9 800,056	234,2081	8,57402
54	58 138	2 685	4618	1 636	2814	9 071,545	246,6403	8,18227
55	55 453	2 826	5096	1 770	3192	8 359,989	257,8182	7,79358
56	52 627	2 974	5651	1 913	3635	7 665,649	269,2247	7,40893
57	49 653	3 122	6288	2 073	4175	6 987,880	281,8766	7,03055
58	46 531	3 274	7036	2242	4818	6 327,062	294,5472	6,66040
59	43 257	3 428	7925	2 417	5588	5 682,975	306,8002	6,30193

Alter x	Lebende Aktive $l_x^{(a)}$	Ausgeschiedene überh. $(J_1+S_1)_x$	Ausscheidewahrsch. $w_x+q_x^{(aa)}$	Invalid geword. J_x	Invaliditätswahrsch. w_x	Diskontierte Zahlen der Aktiven $D_x^{(a)}$	Diskontierte Zahlen der Invaliden I_x	Aktivitätsrenten ${}^a a_x$
60	39 829	3 559	0,08936	2 575	0,06465	5 055,666	315,8026	5,95979
61	36 270	3 623	9989	2 684	7400	4 448,218	318,0392	5,63710
62	32 647	3 659	11208	2 756	8442	3 868,490	315,5276	5,33200
63	28 988	3 622	12495	2 772	9562	3 318,764	306,6273	5,04957
64	25 366	3 485	13739	2 693	10617	2 805,883	287,8152	4,78979
65	21 881	3 289	15031	2 569	11741	2 338,538	265,2778	4,54715
66	18 592	3 061	16464	2 410	12963	1 919,830	240,4438	4,32078
67	15 531	2 767	17816	2 194	14127	1 549,515	211,4915	4,11440
68	12 764	2 445	19155	1 946	15246	1 230,391	181,2419	3,92218
69	10 319	2 143	20767	1 718	16649	961,066	154,5961	3,74108
70	8 176	1 822	22285	1 464	17906	735,726	127,2847	3,58062
71	6 354	1 508	23733	1 214	19106	552,436	101,9796	3,43683
72	4 846	1 220	25176	984	20306	407,079	79,8637	3,30696
73	3 626	964	26581	777	21429	294,294	60,9306	3,19108
74	2 662	742	27874	592	22236	208,748	44,8534	3,08899
75	1 920	558	29078	442	23007	145,471	32,3561	2,99766
76	1 362	411	30209	323	23746	99,704	22,8452	2,9147
77	951	297	31280	233	24456	67,263	15,9224	2,8381
78	654	211	32298	164	25140	44,692	10,8282	2,7664
79	443	147	33271	114	25802	29,249	7,2724	2,6990
80	296	101	34205	78	26443	18,883	4,8076	2,6317
81	195	68	35104	53	27066	12,019	3,1562	2,5635
82	127	46	35971	35	27671	7,563	2,0138	2,485
83	81	30	36809	23	28260	4,661	1,2786	2,409
84	51	19	37895	15	29024	2,835	0,8057	2,317
85	32	13	39353	10	30057	1,719	0,5190	2,172
86	19	8	41416	6	31530	0,986	0,3008	2,043
87	11	5	44560	4	33802	0,552	0,1938	1,86
88	6	3	49934	2	37760	0,291	0,0936	1,64
89	3	2	61212	1	46398	0,140	0,0452	1,32
90	1	1	1,00000	.	80000	0,045	.	1,00

Tafel VII.

Grundlagen: Invaliditäts- und Sterblichkeitsverhältnisse der gesamten Eisenbahnbediensteten. — 3½ %.

Alter	Lebende Invalide	Gestorbene	Sterbens-wahrsch.	Invaliden-renten	Invaliditäts-renten
x	$l_x^{(i)}$	$d_x^{(i)}$	$q_x^{(ii)}$	${}^{i}a_x$	${}^{ai}a_x$
25	61 720	5 238	0,0849	10,17 831	1,894 974
26	56 482	4 575	810	10,38 052	1,968 965
27	51 907	3 992	769	10,56 456	2,044 557
28	47 915	3 491	729	10,72 407	2,121 811
29	44 424	3 070	691	10,85 531	2,200 859
30	41 354	2 758	667	10,95 748	2,281 993
31	38 596	2 515	652	11,04 244	2,365 096
32	36 081	2 318	642	11,11 843	2,450 166
33	33 763	2 138	633	11,19 157	2,537 283
34	31 625	1 973	624	11,26 139	2,626 414
35	29 652	1 828	616	11,32 721	2,717 228
36	27 824	1 684	605	11,39 089	2,809 477
37	26 140	1 551	593	11,44 740	2,903 241
38	24 589	1 422	578	11,49 512	2,998 299
39	23 167	1 324	572	11,52 919	3,094 672
40	21 843	1 219	558	11,55 827	3,192 553
41	20 624	1 136	551	11,57 371	3,291 569
42	19 488	1 060	544	11,58 173	3,391 448
43	18 428	988	536	11,58 207	3,491 835
44	17 440	913	524	11,57 291	3,593 112
45	16 527	852	516	11,54 749	3,695 336
46	15 675	795	507	11,51 001	3,798 024
47	14 880	737	495	11,45 903	3,901 575
48	14 143	697	493	11,38 920	4,005 615
49	13 446	662	492	11,31 022	4,108 103
50	12 784	626	490	11,22 366	4,208 695
51	12 158	588	484	11,12 632	4,305 741
52	11 570	559	483	11,01 338	4,397 803
53	11 011	522	474	10,89 000	4,484 931
54	10 489	494	471	10,74 556	4,567 677
55	9 995	470	470	10,58 520	4,644 165
56	9 525	448	470	10,41 019	4,714 698
57	9 077	428	472	10,22 026	4,778 225
58	8 649	414	479	10,01 519	4,831 093
59	8 235	400	486	9,79 981	4,870 710

Alter x	Lebende Invalide $l_x^{(i)}$	Gestorbene $d_x^{(i)}$	Sterbens-wahrsch. $q_x^{(ii)}$	Invaliden-renten ${}^i a_x$	Invaliditäts-renten ${}^{ai} a_x$
60	7 835	390	0,0498	9,57 279	4,894 149
61	7 445	379	509	9,33 763	
62	7 066	375	531	9,09 232	
63	6 691	368	550	8,84 495	
64	6 323	363	574	8,59 208	
65	5 960	354	594	8,33 639	
66	5 606	347	619	8,07 266	
67	5 259	337	641	7,80 320	
68	4 922	331	672	7,52 341	
69	4 591	327	712	7,23 852	
70	4 264	322	755	6,95 208	
71	3 942	318	807	6,66 356	
72	3 624	313	864	6,37 614	
73	3 311	312	942	6,09 032	
74	2 999	304	1014	5,81 659	
75	2 695	296	1098	5,54 750	
76	2 399	286	1192	5,28 740	
77	2 113	273	1292	5,03 807	
78	1 840	256	1391	4,79 950	
79	1 584	238	1503	4,56 804	
80	1 346	220	1634	4,34 591	
81	1 126	196	1741	4,13 962	
82	930	176	1892	3,93 435	
83	754	153	2035	3,74 597	
84	601	130	2163	3,56 560	
85	471	109	2314	3,38 831	
86	362	89	2459	3,21 620	
87	273	71	2601	3,04 155	
88	202	56	2772	2,85 570	
89	146	44	2993	2,65 738	
90	102	33	3258	2,45 532	
91	69	25	3585	2,22 664	
92	44	18	4008	1,99 096	
93	26	12	4596	1,73 569	
94	14	8	5548	1,41 411	
95	6	6	1,0000	1,00 000	

Sachregister.

(Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.)

Abänderung einer Versicherung 541, 546.
Absterbekurve 355.
Absterbeordnung 350.
Abweichung, durchschnittliche 106; mittlere 104; wahrscheinliche 102.
Abzinsungsfaktor 431.
Änderung der Grundlagen 425.
Ärztliche Untersuchung 426.
Aktive 412.
Aktivitätsrenten 483.
Aktivitätstafeln 419.
Analytische Statistik 351.
Anwartschaft 434.
Approximatives Fehlergesetz 208.
Arithmetisches Mittel 217; — als Hauptwert einer statistischen Größe 334; — als wahrscheinlichster Wert 236; — mit dem kleinsten Fehlerrisiko verbunden 234.
Aufgeschobene Rente 437.
Aufgeschobene temporäre Rente 438.
Aufgeschobene temporäre Todesfallversicherung 445.
Aufgeschobene Todesfallversicherung 444.
Auflösung der Normal- und der Gewichtsgleichungen 266.
Aufzinsungsfaktor 430.
Ausgleichung eines Vierecks 298; graphische 409; von Sterbetafeln 392.
Ausgleichungsmethoden, mechanische 403.
Ausgleichungsrechnung 206.
Auslese 385, 425.
Ausscheideordnung der Diensttauglichen 419, 421, 483.
Ausscheidewahrscheinlichkeit 413.
Außergewöhnliche Ereignisse 27—28.

Bedingte Beobachtungen 289; ihre Zurückführung auf vermittelnde B. 289; ihre direkte Behandlung 291; — ungleicher Genauigkeit 294.
Beitragsfreie Police 542.
Beobachtungen, direkte 206; vermittelnde — 257; bedingte — 289.
Beobachtungsdifferenzen 233.
Biometrische Funktionen 349.
Bouillottespiel 63.
Bruttoprämie 488.

Chancen 12.

Dekremententafel 350.
Dichtester Wert der Lebensdauer 337.
Dichtigkeitsmittel 334.
Direkte Beobachtungen 206; — gleicher Genauigkeit 234; — ungleicher Genauigkeit 240.
Diskont 432.
Diskontierte Zahlen der Lebenden 435; — der Toten 443; — der Aktiven 483; — der Invaliden 484, 486.
Diskontierte Paare von Lebenden 462.
Diskontinuitätsfaktor 220.
Dispersion 111, 312; — normale 131, 312, 342; — unternormale 131, 321; — übernormale 132, 316, 342; — extensiver Größen 341.
Divergenzkoeffizient 315.
Durchlebte Zeit 346.
Durchschnittliches Risiko einer Versicherung bei deren Abschluß 551; nach längeren Bestande 555.
Durchschnittsfehler 227, 239; — der Gewichtseinheit 243.

Einfluß der Sterbetafel und des Zinsfußes auf die Reserve 530.
Einmalige Prämie 489.
Einsatz 170.
Ein- und Austretende, ihre Berücksichtigung 378.
Einzelreserve 523.
Elementarfehler 210.
Elementargesamtheiten von Gestorbenen 361.
Elementarwahrscheinlichkeit 133, 303.
Empirische Formeln 276—277.
Entstehungsmodi 139.
Ereignis 5.
Erfahrungswahrscheinlichkeit 162.
Erlebensversicherung 434.
Erwartung, mathematische 168.
Evolutorische Reihen 322.
Ewige Rente 433.
Extensive statistische Größen 333.

Fehler, systematische 208; unregelmäßige 208; scheinbare oder plausible 218.
Fehlerexcedent 320.
Fehlergesetz 206; approximatives 208, 210, 215, 218.
Fehlerpotenzen 229.
Fehlerrelation 315.
Fehlerrisiko 225, 257.
Formale Bevölkerungstheorie 350.
Formel von Stirling 22.
Funktionen direkt beobachteter Größen 253.

Game of Treize 37.
Geburtenkurve 355.
Gegenseitige Todesfallversicherung 474—477.
Gemischte gegenseitige Überlebensversicherung 476.
Gemischte Versicherung 447.
Genauigkeit der Beobachtungen 208, 219, 237, 293; — des arithmetischen Mittels 236—237.
Genauigkeitsmaße 225.
Generation 350.
Gesamtheiten, statistische 352.
Gesamtreserve 523.
Geschlechtsverhältnis der Geborenen 323—328; — der Gestorbenen 328—331; — der Überlebenden 329.
Gesetz der großen Zahlen 133, 136, 180, 182; seine Umkehrung 153.
Gesetz der kleinen Zahlen 321.
Gesetz einer linearen Funktion unabhängiger Fehler 219—222.
Gesetz der Beobachtungsdifferenzen 222.
Gestundete Prämienraten 538.
Gewicht einer Beobachtung 240—241.
Gewichtseinheit 241.
Gewinnquellen der Lebensversicherung 488.
Gewinnteilungsregel 170.
Gewißheit 5, 15.
Gleichmögliche Fälle 9.
Graphische Ausgleichung 409.
Graphische Statistik 351.
Grenznutzen 205.
Größter Fehler einer Beobachtungsreihe 232.
Gruppenrechnung 523.
Günstige Fälle 12.

Hauptgesamtheiten der Lebenden 357; erste Hauptgesamtheit 357; zweite 358; — der Gestorbenen 358; erste Hauptgesamtheit 358; zweite 359; dritte 360.
Höhenmessung, Ausgleichung einer solchen 280.
Hypothese Daniel Bernoullis 196, 204.
— des arithmetischen Mittels 217, 219; wahrscheinlichste — 148.
Hypothesen 139.
Hypothetisch-disjunktives Urteil 1.
Hypothetisches Urteil 1.

Interpolation einer Beobachtungsreihe 394.
Invalide 411.
Invalidenrenten 484.
Invalidensterbetafeln 418.
Invalidität 411.
Invaliditätsrenten 485.
Invaliditätstafeln 420.
Invaliditätswahrscheinlichkeit 413.

Jährliche Prämie 491; — für die lebenslängliche Todesfallversicherung 492; — für verschiedene Versicherungskombinationen 494—500.
Jeu du joint couvert 86.
Jeu du Treize 37.

Kapitalistische Begründung einer Versicherung 489.
Kapitalversicherung verbundener Leben 474; — für den Invaliditätsfall 487.

Kausalnexus 141.
Knöchelspiel 25.
Kollektivgegenstand 334.
Kollektivmaßlehre 116, 334.
Kombinationen ohne Wiederholung 17; — mit Wiederholung 18.
Kombination von Beobachtungen 207, 234.
Kombinatorische Methode der Präzisionsbestimmung 313.
Konjekturalberechnungen 309.
Konstanter Teil des Fehlers 223.
Kontinuierliche Rente 454.
Kontinuierliche Verzinsung 430.
Kontrollen 275, 293, 295.
Konvertierung eines Versicherungsstockes 532.
Korrelaten 292.
Korrelatengleichungen 292, 294.
Kritische Dauer der Rente 553; — der Todesfallversicherung 553—554.
Kurve der Überlebenden 346.
Kurze Rente 437.

Länge des Sekundenpendels 283.
Lebensdauer, normale 338; mittlere 348; wahrscheinliche 349; wahrscheinlichste 349.
Lebenserwartung 347; abgekürzte und volle 348.
Lebenslinie 351.
Lebensversicherung im engeren Sinne 425; — im weiteren Sinne 428.
Lebensversicherungsrechnung 424.
Lebenswahrscheinlichkeit 303, 344.
Leibrente, postnumerando zahlbar 437; pränumerando zahlbar 436.
Lotteriespiel 39, 47, 48, 50, 113—118.

Massenerscheinungen 302.
Massenphysiologische Konstante 314.
Mathematische Hoffnung 168, 204.
Mathematisches Risiko 183.
Mathematische Statistik 302.
Mechanische Ausgleichungsmethoden 403; — von Wittstein 403; — von Woolhouse 404; — von Karup 406.
Methode der kleinsten Quadrate 237, 241, 261, 266.
Methode von Halley 363.
Minderwertige Leben 426, 428.
Mittelwert einer zufälligen Größe 74.
Mittlere Lebensdauer 348.
Mittlerer Fehler 228, 230, 239, 293; — des arithmetischen Mittels 236, 239, 243; — der Gewichtseinheit 241, 243, 266, 294.
Mittleres Risiko 189—190; — einer einzelnen Versicherung bei deren Abschluß 556; — nach längerem Bestande 560.
Mittlere Zahlungsdauer einer Rente 438.
Mögliche Fälle 8.
Möglichkeit 2.
Moralische Erwartung 196, 197.
Mortalitätstafel 349.
m-tel-Rente 449; Näherungsformel für eine solche 449; strenge Formel 450; vollständige — 457.

Nachwirkung der Auslese 427.
Nadelproblem 73, 86.
Natürliche Prämie 503.
Negative Prämienreserve 522.
Nettoprämie 488.
Nichtlineare Relationen bei vermittelnden Beobachtungen 270.
Normale Dispersion 311.
Normale Leben 426.
Normale Lebensdauer 338.
Normalgleichungen 261, 265, 292, 294; ihre Auflösung 266; reduzierte — 268, 292.
Notwendigkeit 15.

Partialwahrscheinlichkeit 134.
Passe-dix 25.
Periodische Reihen 322.
Permutationen 17.
Petersburger Problem 201.
Physikalische Methode der Präzisionsbestimmung 314.
Physikalische Schwankungskomponente bei statistischen Relativzahlen 320.
Police 385, 487.
Policenreduktion 541.
Policenrückkauf 541.
Postnumerando-Leibrente 437.
Prämien 487; Brutto — 488; Netto — 488; einmalige und jährliche s. dort; natürliche — 503; veränderliche — 502, 504; Zillmersche — 507.
Prämienreserve 521; bei einmaliger Prämienzahlung 524; bei jährlicher Prämienzahlung 525; bei unterjähriger Prämienzahlung 527; — der Erlebensversicherung 526; — der Todesfallversicherung 527; kaufmännische — 529;

mathematische — 529; — nach einer beliebigen Dauer 529; negative — 522; — verschiedener Kombinationen 536—541.
Prämienrückgewähr 509.
Prämienübertrag 529, 532—533.
Pränumerando-Leibrente 436.
Präzision 109, 153; — einer statistischen Relativzahl 310.
Präzisionsmaß 219, 334.
Prinzip der Versicherung 483.
Prinzip des mangelnden Grundes 9; — des zwingenden Grundes 9.
Problem De Moivres 60.
Problem der Sterblichkeitsmessung 349.
Problème des partis 53.
Produktentafeln 274.
Prospektive Methode der Prämienreserveberechnung 522.
Prozentsatz 429.

Quadrattafeln 274.

Reduzierte Normalgleichungen 268.
Rencontre 37.
Rente 432, 436; aufgeschobene — 437; ewige — 433; — für verbundene Leben 461; kontinuierliche — 454; veränderliche — 440; — von besonderer Zahlungsmodalität 449; vollständige — 455—456.
Rentnersterbetafeln 427.
Retrospektive Methode der Prämienreserveberechnung 522.
Risiken, gleichwertige 428; normale — 428.
Risiko, bei einer großen Anzahl gleichartiger Fälle 187; durchschnittliches — 184; mathematisches — 183; mittleres — 189—190; relatives — 184; — eines Versicherungsbestandes 563.
Risiko in der Lebensversicherung 548.
Risikoprämie 534.
Risikoreserve 568.
Rückgewähr der Prämien 509; — der Bruttoprämien 515; — der Nettoprämien 510.
Rückkaufswert einer Police 541—542.
Rückversicherung 536.

Satz von De Morgan 463.
Sätze über Gesamtheiten von Lebenden und Gestorbenen 355.
Sätze über Mittelwerte I: 77, II: 77, III: 80.
Sätze von Tchebycheff 176; I, II: 179, 564; III: 180, 192.
Schadenreserve 533.
Seitengleichung 299.
Selektion 385.
Serienweise veränderliche statistische Wahrscheinlichkeit 318.
Sicherheitszuschlag 568.
Spannkraft des Wasserdampfes 286.
Sparprämie 535.
Stabilität, statistischer Verhältniszahlen 310, 321, 424; — einer Versicherungsunternehmung 568.
Stationäre Bevölkerung 373.
Stationsausgleichung 281.
Statistische Wahrscheinlichkeit 303—304.
Statistik, des Vereins Deutscher Eisenbahnverwaltungen 418; mathematische — 302.
Sterbensdichtigkeit 354.
Sterbenswahrscheinlichkeit 303, 344.
Sterbetafel 349; — eines gemischten Bestandes 420.
Sterbetafeln 362; — gleichzeitig Lebender 366.
Sterbetafeln, aus Beobachtungen an Versicherten 376; — der 30 amerikanischen Gesellschaften 383; — der 20 britischen Gesellschaften 383, 402, 426; — der 23 deutschen Gesellschaften 383, 386, 427; — der 4 französischen Gesellschaften 383, 427; — der 17 englischen Gesellschaften 383, 426; — des Beamtenvereins 383, 402, 410; Gothaer — 383; — von Brune 383, 404.
Sterbetafeln, aus bevölkerungsstatistischem Material 362; deutsche — 370; englische — 375; französische — 375; niederländische — 375; preußische — 375; schweizerische — 375.
Sterblichkeitsformel 393, 395; — von Gompertz 396, 465; — von Makeham 397, 464; — von Wittstein 402, 421.
Sterblichkeitsintensität 345.
Sterblichkeitskoeffizient 346.
Sterblichkeitskurven 375.
Sterblichkeitsmaße 343.
Sterblichkeitsmessung 343.
Sterblichkeitsverhältnis, seine Stabilität 331, bei Versicherten 333; zentrales — 347.

Summen der diskontierten Zahlen, der Aktiven 483; — der Invaliden 484; — der Lebenden 436; — der Toten 443.
Symptomatische Reihen 321—322.

Tatbestand 5.
Tarifprämie 488.
Teilungsproblem 53, 171.
Temporäre Rente 437.
Terme fixe-Versicherung 448.
Theorem von Bayes 140, 141, 146, 151, 154, 155, 183, 189, 216.
Theorem von Bernoulli 88, 99, 128, 133, 136, 138, 154, 180, 183, 189, 216; — seine Umkehrung 151.
Theorem von Poisson 120, 126, 127, 133, 136, 137, 180, 182.
Theorie des Zufalls 7.
Todesfallversicherung 442; lebenslängliche 442—443; aufgeschobene — 444; temporäre — 444; aufgeschobene temporäre 445; — auf das kürzeste Leben 474; — auf das längste Leben 476; sofort zahlbare — 459; — von besonderer Zahlungsmodalität 449.
Totalreserve 533.
Totalrisiko 565; — nach dem Tchebycheffschen Satze 565; — auf Grund der Fehlertheorie 566.
Totalwahrscheinlichkeit 134.
Trente et quarante 65.
Typisches Mittel 335.
Typisches Sterben 338.
Typische Wahrscheinlichkeitsgrößen, mit normaler Dispersion 311, 314, 425; — mit übernormaler Dispersion 316, 317.

Überlebende 343.
Überlebensdichtigkeit 354.
Überlebensrenten 468; aufgeschobene — 471; einseitige — 469; gegenseitige — 469; temporäre — 472; unterjährig zahlbare — 472.
Überlebensversicherung, einseitige 477; aufgeschoben 482; temporär 482; — gegenseitige 474; abgekürzt 476; aufgeschoben 475; gemischt 476.
Umkehrung des Bernoullischen Theorems 151.
Umkehrung des Gesetzes der großen Zahlen 153.
Undulatorische Reihen 322.
Ungünstige Fälle 12.
Unterjährig fällige Todesfallversicherung 458.
Unternormale Dispersion 321.
Unverbundene Massenerscheinungen 314, 317, 321.
Unwesentliche Schwankungskomponente bei statistischen Relativzahlen 320.
Ursachen 8, 12, 138, 139.
Urteil, hypothetisches 1; hypothetisch-disjunktives 1.

Variationen, ohne und mit Wiederholung 18.
Veränderliche Prämien 502.
Veränderliche Renten 440.
Veränderliche Todesfallversicherung 445.
Verbindungsrenten 461; — zum ersten Tode 461; — zu einem späteren Tode 466; aufgeschobene — 470; temporäre — 471; unterjährig zahlbare — 471; — zu verschiedenen Kombinationen 472—473.
Vermittelnde Beobachtungen, gleicher Genauigkeit 257; — ungleicher Genauigkeit 264; — bei nichtlinearer Relation 270.
Versicherer 487.
Versicherung mit bestimmter Verfallzeit 448.
Versicherungsbedingungen 487.
Versicherungsnehmer 487.
Versicherungsvertrag 487.
Verzinsung, einfache und zusammengesetzte 429; kontinuierliche — 430.
Verzinsungsintensität 431.
Vierpunktproblem 82—83.
Volkstafeln 427.
Vollständige m-tel-Rente 457.
Vollständige Rente 455—456.

Wahrer Wert einer physischen Größe 222—223.
Wahrscheinlicher Fehler 228, 239.
Wahrscheinlichkeit 4, 13; geometrische — 68; mathematische — 12; vollständige — 41; zusammengesetzte — 41; — auf Grund der Erfahrung 138.
Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt 302, 306.
Wahrscheinlichkeitsbestimmung, a priori 12, 138; — a posteriori 12, 139, 162.
Wahrscheinlichkeitsgesetz der Ursachen 134.

Wahrscheinlichste Hypothese 148.
Wahrscheinlichster Wert der Unbekannten 217.
Wasserstoffspektrum 279.
Wert einer Anwartschaft 434.
Wertlehre 204.
Wette 14.
Willkürlich gewählte Gerade in der Ebene 84.
Winkelausgleichung im Dreieck 295.
Winkelgleichung 298.
Würfelversuche 118—120.
Zähleinheit bei der Sterblichkeitsmessung an Versicherten 384.
Zählkarten 383.
Zeitrente 432.
Zeitwert einer Police 524.
Zentralwert 334.
Zeunersche Fläche 354, 356.
Zillmersche Prämie 507.
Zinsfuß 425; wirklicher — 429.
Zufall 7, 8.
Zuschlag zur Prämie 488.
Zweiseitiges Gaußsches Gesetz 337.

Namenregister.

(Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.)

Adrain R. 237.
Albrecht Th. 251.
Andrae 234.
André D. 35.

Babbage 427.
Baily F. 436.
Barbier E. 36.
Barrett G. 436.
Bayes J. 140, 151.
Becker K. 352, 361.
Behm G. 413, 414.
Bentzien H. 418, 419, 420, 421.
Bernoulli Daniel 196—197, 201—202, 205.
Bernoulli Jakob 9, 12, 13, 14, 15, 17, 54, 59, 88, 92, 99, 136, 151, 183.
Bernoulli Nikolaus 37, 201.
Bertrand J. 26, 35, 101, 107, 159, 174.
Blaschke E. 403 411 428.
Bohlmann G. 338, 428, 437, 489, 490, 529, 535, 550, 568.
Bortkiewicz L. 134, 136, 138, 314, 315, 318, 320, 321, 341.
Brune 383, 404, 427.
Buffon G. 15, 73, 82, 86, 159.

Catalan E. 38.
Condorcet M. J. 15.
Cournot A. A. 15.
Crelle A. R. 274.
Crofton M. W. 82, 200, 210.

D'Alembert J. 8. 15, 24.
Davies Griffith 462, 475.
Degen C. F. 19.
De Morgan A. 15, 19, 101, 463—464, 475.
Deparcieux A. 427.
Dietrichkeit O. 484, 486.
Dirichlet G. L. 38.
Dormoy E. 315.

Eggenberger J. 101.
Encke J. F. 101.
Euler L. 37, 92, 98.

Farr 427.
Fechner G. Th. 116, 205, 334, 337.
Fermat P. 17, 53.
Fick A. 4, 5, 16.
Fick L. 196, 204.
Firks 375.
Fries J. J. 14, 16.

Galilei G. 25.
Gauß C. F. 217, 219, 223, 228, 237, 263, 267, 277.
Glaisher J. W. 101.
Goldschmidt L. 16.
Gompertz B. 396, 464.

Halley 363.
Hausdorff F. 184, 190, 194, 556.
Helmert F. R. 230, 234, 276, 284, 293.
Henke R. 278.
Hermann 205.
Huygens Ch. 454.

Jevons W. St. 204.

Kaan J. 411.
Kämpfe B. 101.
Kammann W. 329.
Karup J. 395, 406, 414.
Knapp G. F. 353, 354, 361.
Kramp Ch. 19, 100.
Kries J. 9, 11, 14, 16, 131, 134, 139.

Küttner W. 414.
Kummer 38.

Lambert J. H. 38.
Lampe E. 38.
Landré C. L. 428, 489.
Lange A. 205.
Laplace P. S. 9, 14, 15, 38, 49, 63, 92, 98, 99, 121, 140, 197, 201, 237, 303, 306, 309.
Legendre A. M. 237.
Leibniz G. W. 17, 24.
Lewin 353.
Lexis W. 131, 312, 314, 318, 320, 322, 328, 329, 335, 337, 341, 352—354, 361, 364.
Lipps G. F. 116, 334.
Lotze R. H. 6.

Maclaurin C. 92.
Makeham 397.
Meinong A. 11.
Menger 204.
Meré de 34, 53.
Meyer G. 361.
Mill J. St. 154.
Milne J. 398.
Moivre A. 54, 60, 92, 395.
Montmort P. 37, 54, 201.
Morgan De A. (s. unter D).

Opitz H. 100, 102.
Orchard W. 493.

Pascal B. 17, 34, 53—54, 171.
Peek J. H. 331.
Peirce C. S. 231.
Perozzo L. 354.
Pesch, A. J. van 331, 375
Pizzetti P. 222, 230, 263.
Poincaré H. 26.
Poisson S. D. 67, 120, 121, 134, 136, 159, 171, 182, 303.
Price 140.
Pringsheim A. 196, 203—204.

Quetelet A. 335.

Roghé E. 386, 389, 428.

Schmerler B. 428.
Sigwart Ch. 4, 9, 16.
Simpson Th. 463.
Sprague 410.
Stirling 19—20, 92.
Stumpf C. 5, 14, 16, 139, 143.
Sylvester J. 82.

Tchebycheff P. S. 176, 182, 192.
Tetens J. N. 183, 186, 437.
Todhunter J. 168.

Venn 153.

Wagner K. 549.
Wallis J. 17.
Walras 204.
Wiegand A. 414.
Wittstein Th. 185, 194, 273, 380, 395, 402, 403, 413, 421.
Wolf R. 118, 120.
Woolhouse W. S. 82, 404, 421.

Zeuner G. 354, 366, 368, 380, 414.
Zillmer A. 391, 414, 478, 507.
Zimmermann H. 274, 414, 418, 419—421.

Berichtigung.

p. 23 sind die drei ersten Stellen von 30! in Übereinstimmung mit p. 19 durch 265 zu ersetzen.

Von **Emanuel Czuber** erschien ferner im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig:

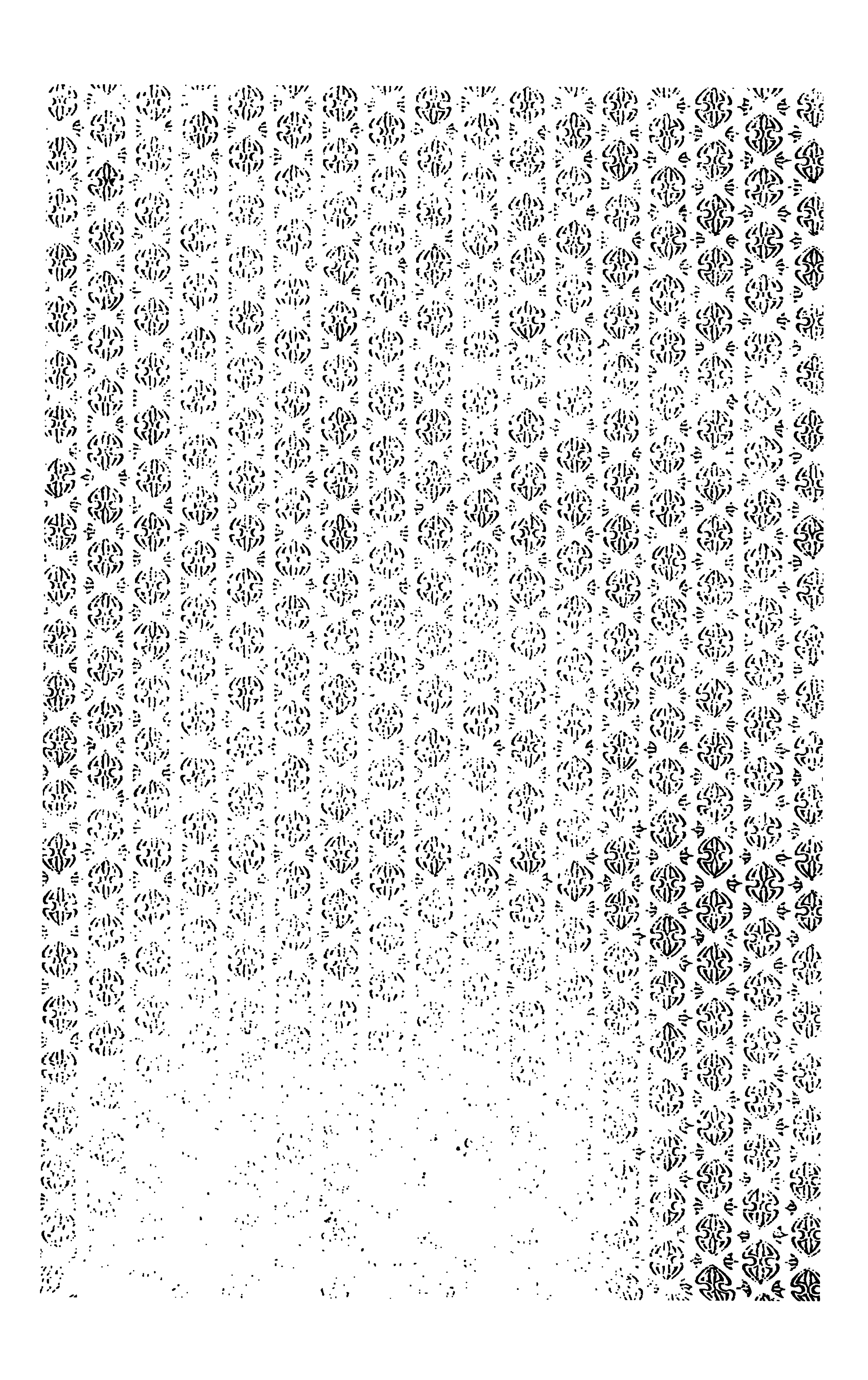
Czuber, Emanuel, Theorie der Beobachtungsfehler. Mit 7 in den Text gedruckten Fig. [XIV u. 418 S.] gr. 8. 1891. geh. n. ℳ 8.—

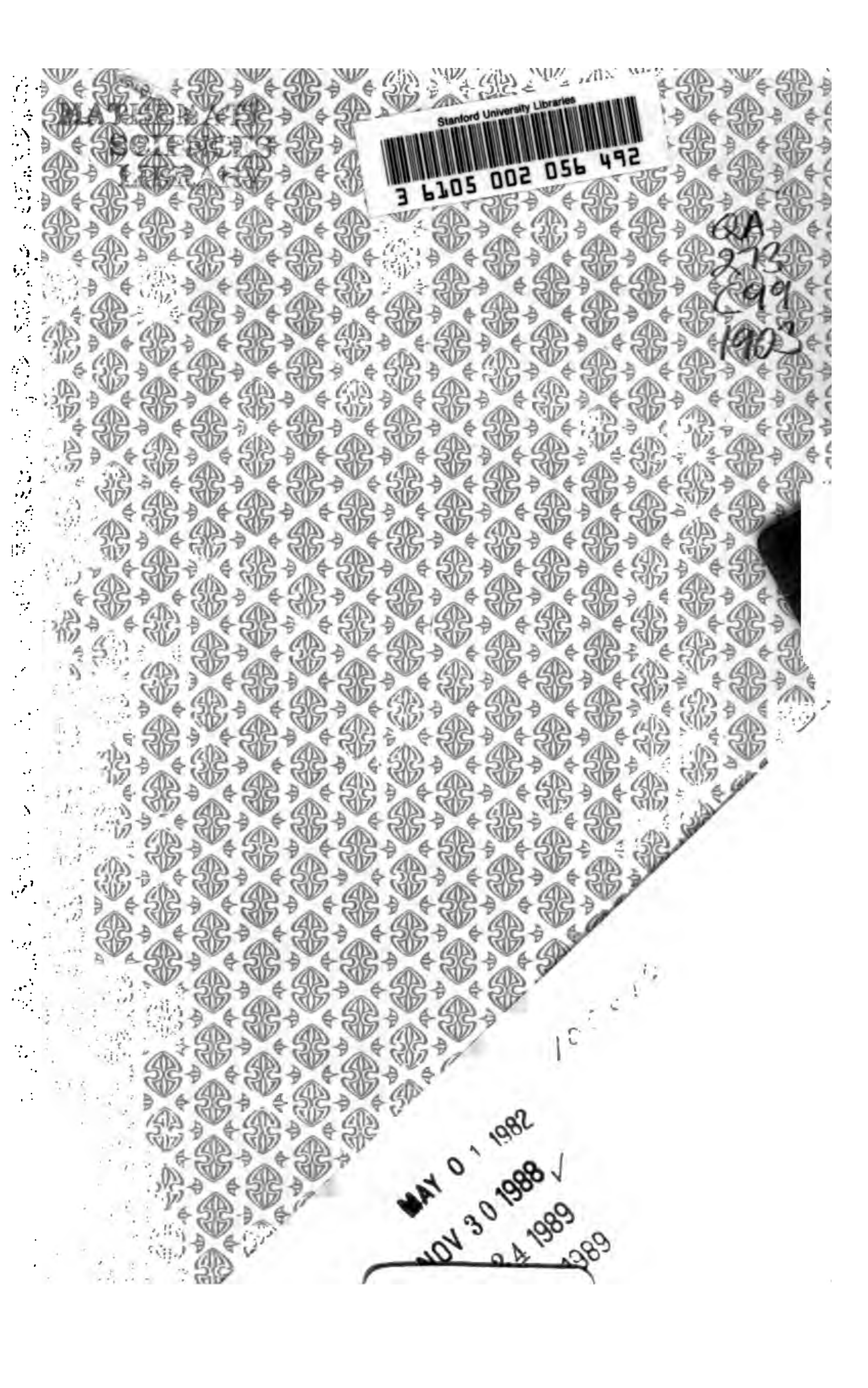
Eine zusammenfassende Darstellung der wissenschaftlichen Grundlagen der Fehlertheorie und der auf sie gegründeten Ausgleichungsrechnung, wie sie dieses Buch zu geben versucht, soll einem doppelten Zwecke dienen: Den Mathematiker in dieses durch Methaphysik und Analyse gleich interessante Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung einführen, und demjenigen, den praktische Probleme mit der Ausgleichungsrechnung, diesem unerläſslich gewordenen Bindeglied zwischen Beobachtungen einerseits und den aus ihnen gefolgerten Resultaten andererseits, zusammenführen, ein möglichst umfassendes Bild ihrer Entwicklung nach der theoretischen Seite bieten. Die technische Ausführung der Rechnungen bei Lösung spezieller Aufgaben aus verschiedenen Gebieten der Anwendung fällt hiernach nicht in den Rahmen des Buches.

Der Inhalt gliedert sich in drei groſse Abschnitte. Der erste handelt von der Theorie der linearen Fehler. Die Ableitung des Fehlergesetzes aus der Hypothese des arithmetischen Mittels und aus der Hypothese der Elementarfehler bilden den Mittelpunkt, um welchen sich Untersuchungen über den Satz des arithmetischen Mittels, über die Beurteilung der Genauigkeit von Beobachtungsreihen nach wahren und scheinbaren Fehlern, über den kleinsten und gröſsten Fehler einer Beobachtungsreihe und die damit zusammenhängende Frage der Ausscheidung widersprechender Beobachtungen ordnen. Der zweite Abschnitt hat die Begründung der Methode der kleinsten Quadrate zum Hauptgegenstande. Nach Formulierung des Problems werden die beiden Beweise von Gauſs, die Untersuchungen von Laplace und die hervorragenden Arbeiten anderer Geometer, welche sich an jene anschlieſsen, vorgeführt und ihre gegenseitigen Beziehungen dargelegt. Die Beurteilung der Genauigkeit von Reihen vermittelnder und bedingter Beobachtungen, die explicite Darstellung der Elemente, ihrer Gewichte und mittleren Fehler durch Determinanten zum Zwecke des Nachweises der Bedingungen für die Lösbarkeit des Problems, die Schätzung der Genauigkeit von Funktionen beobachteter und aus Beobachtungen abgeleiteter Gröſsen sind weitere Gegenstände dieses Abschnittes. Im dritten endlich kommt die Theorie der Fehler in der Ebene und im Raume zum Vortrage. Das Gesetz ihrer Wirkungsweise erfährt mehrfache Begründung unter verschiedenen Gesichtspunkten und aus verschiedenen Annahmen. Daran schlieſst sich die Beurteilung der Genauigkeit der Punktbestimmung in der Ebene und im Raume.

Czuber, Emanuel, die Entwickelung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihre Anwendungen. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. VII. 2. [VIII u. 279 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 8.—

Die Schrift stellt sich die Aufgabe, den Entwicklungsgang der Wahrscheinlichkeitstheorie bis zu ihrem heutigen Stande in knappen Zügen zu zeichnen und auf die Anwendungsgebiete so weit einzugehen, als es sich dabei um theoretische Fragen handelt. Der philosophischen Seite des Gegenstandes wird mehr Aufmerksamkeit zugewendet, als dies sonst in mathematischen Schriften zu geschehen pflegt. Es erwies sich als zweckmäſsig, nicht den historischen Gang, sondern die sachliche Gliederung zur Grundlage der Anordnung zu wählen. So werden denn der Reihe nach die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie; ihre Anwendung auf die Ergebnisse wiederholter Versuche; die Wahrscheinlichkeit der Ursachen beobachteter Ereignisse und das Schlieſsen auf zukünftige Ereignisse; die Beurteilung vom Zufall abhängiger Vor- und Nachteile; die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Zeugenaussagen und Entscheidungen von Gerichtshöfen, auf die Resultate von Messungen, endlich auf die Statistik behandelt.




MATHEMATICAL SCIENCES LIBRARY
Stanford University Libraries
3 6105 002 056 492
QA 273 C99 1903
MAY 0 1 1982
NOV 3 0 1988
24 1989
1989

